

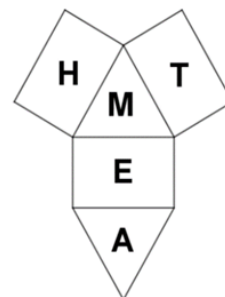
25. Landeswettbewerb Mathematik Bayern



Lösungsbeispiele für die
Aufgaben der 2. Runde 2022/2023

Aufgabe 1

Aus einem Netz, das wie in nebenstehender Abbildung beschriftet ist, bastelt Emma ein gerades Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche. Sie benutzt das Prisma als „Würfel“, wobei der unten liegende Buchstabe als gewürfelt gilt. Zeige: Wenn die Wahrscheinlichkeit, $M A T H E$ zu würfeln, größer ist als die Wahrscheinlichkeit, $E M M A$ zu würfeln, dann ist die Wahrscheinlichkeit, $T E E$ zu würfeln, größer als $\frac{1}{64}$.



Hinweis: „M A T H E würfeln“ bedeutet, bei fünfmaligem Werfen des Würfels in dieser Reihenfolge die Buchstaben M, A, T, H und E zu würfeln. Analog ist „E M M A würfeln“ und „T E E würfeln“ bei vier- bzw. dreimaligem Würfeln zu verstehen.

Beweis :

Die Wahrscheinlichkeit, mit dem Prisma „M“ zu würfeln, bezeichnen wir mit p , wobei $0 < p < 1$ gilt. Aufgrund der Symmetrie des Prismas ist dann auch die Wahrscheinlichkeit „A“ zu würfeln gleich p . Ebenso haben das Würfeln von „H“, „T“ bzw. „E“ die gleiche Wahrscheinlichkeit, die mit q bezeichnet wird ($0 < q < 1$). Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller fünf möglichen Würfelresultate gleich 1 sein muss, gilt

$$2 \cdot p + 3 \cdot q = 1 \iff p = \frac{1}{2}(1 - 3q). \quad (1)$$

Mit den Pfadregeln ergibt sich dann für die Wahrscheinlichkeiten, $M A T H E$, $E M M A$ bzw. $T E E$ zu würfeln:

$$P(MATHE) = p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q = p^2 \cdot q^3; \quad P(EMMA) = q \cdot p \cdot p \cdot p = p^3 \cdot q \quad \text{und} \quad P(TEE) = q \cdot q \cdot q = q^3.$$

Die Bedingung der zu zeigenden Behauptung ist daher wegen $p \neq 0$ und $q \neq 0$ gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$P(MATHE) > P(EMMA) \iff p^2 q^3 > p^3 q \iff q^2 > p.$$

Wenn nun also $P(MATHE) > P(EMMA)$ ist, dann folgt hieraus mit (1) zunächst $q^2 > \frac{1}{2}(1 - 3q)$ bzw. $2q^2 + 3q - 1 > 0$. Wäre nun $0 < q \leq \frac{1}{4}$, dann wäre

$$2q^2 + 3q - 1 \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{8} < 0.$$

Also muss $q > \frac{1}{4}$ und daher $P(TEE) = q^3 > \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ sein. Das war zu zeigen.

Variante 1:

Wie in obigem Beweis werden die Bedingungen $2 \cdot p + 3 \cdot q = 1$ und $q^2 > p$ hergeleitet. Aus der ersten Gleichung folgt, dass $3 \cdot q < 1$, also $q < \frac{1}{3}$ sein muss. Mit der zweiten Ungleichung folgt damit $p < q^2 < \frac{1}{9}$. Wieder mit der ersten Gleichung ergibt sich daraus: $3 \cdot q = 1 - 2 \cdot p > \frac{7}{9}$, also $q > \frac{7}{27} > \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$ und daher $P(TEE) = q^3 > \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$.

Variante 2:

Wie im obigen Beweis wird die Bedingung $2q^2 + 3q - 1 > 0$ hergeleitet. Die quadratische Funktion $f: x \mapsto 2x^2 + 3x - 1$ hat die beiden Nullstellen $x_{1/2} = \frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{17})$. Da ihr Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist, gilt $f(q) > 0$ genau dann, wenn $q < \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{17}) < 0$ oder $q > \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{17})$ ist. Weil $q > 0$ sein muss, kann nur die letzte Ungleichung gelten. Nun kann man entweder wieder mit $\sqrt{17} > \sqrt{16} = 4$ auf $q > \frac{1}{4}(-3 + 4) = \frac{1}{4}$ und dann weiter wie oben schließen, oder man berechnet exakt weiter:

$$\begin{aligned} q^3 &> \left(\frac{1}{4}(-3 + \sqrt{17})\right)^3 = \frac{1}{64}(-3 + \sqrt{17})^2(-3 + \sqrt{17}) \\ &= \frac{1}{64}(9 - 6\sqrt{17} + 17)(-3 + \sqrt{17}) = \frac{1}{64}(26 - 6\sqrt{17})(-3 + \sqrt{17}) \\ &= \frac{1}{32}(13 - 3\sqrt{17})(-3 + \sqrt{17}) = \frac{1}{32}(-39 + 9\sqrt{17} + 13\sqrt{17} - 51) \\ &= \frac{1}{32}(-90 + 22\sqrt{17}) = \frac{1}{16}(-45 + 11\sqrt{17}) \end{aligned}$$

Die zu zeigende Aussage $q^3 > \frac{1}{64}$ wäre also gezeigt, wenn

$$\frac{1}{16}(-45 + 11\sqrt{17}) > \frac{1}{64}$$

gezeigt werden kann. Multiplikation mit 64 liefert die äquivalente Bedingung $4 \cdot (-45) + 44\sqrt{17} > 1$. Addition von $4 \cdot 45 = 180$ und quadrieren liefert weiter (weil beide Seiten der Ungleichung positiv sind) äquivalent dazu $44^2 \cdot 17 > 181^2$. Weil nun $44^2 \cdot 17 = 1936 \cdot 17 = 32912$ und $181^2 = 32761$ ist, gilt die letzte Ungleichung und damit die Behauptung der Aufgabe.

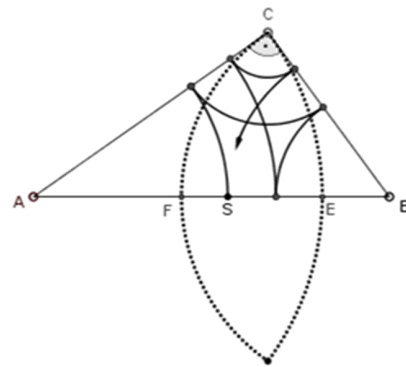
Bemerkung:

Der Taschenrechner liefert für $x_2 = \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{17})$ den Zahlenwert $x_2 \approx 0,28078\dots$ und für $x_2^3 \approx 0,02214\dots$. Ersteres ist, wenn man der Angabe des Rechners vertraut, größer als $0,25 = \frac{1}{4}$, letzteres größer als $0,15625 = \frac{1}{64}$. Dass diese Ungleichungen aber auch wirklich gelten, muss ohne Taschenrechner nachvollziehbar sein und kann beispielsweise durch Abschätzungen wie in obigem Beweis plausibel gemacht werden.

Auch wenn die Wahrscheinlichkeiten p und q durch die Geometrie des Prismas eindeutig bestimmt sind, ist deren exakte Berechnung nicht ohne Weiteres möglich. So genügt allein die Tatsache, dass die entsprechenden Seitenflächen flächengleich oder sogar kongruent sind, nicht, um die Gleichwahrscheinlichkeit für das Würfeln von „H“, „T“ bzw. „E“ bzw. von „M“ und „A“ zu begründen. Stattdessen ist die Symmetrie des Prismas bezüglich seines Schwerpunktes von entscheidender Bedeutung.

Aufgabe 2

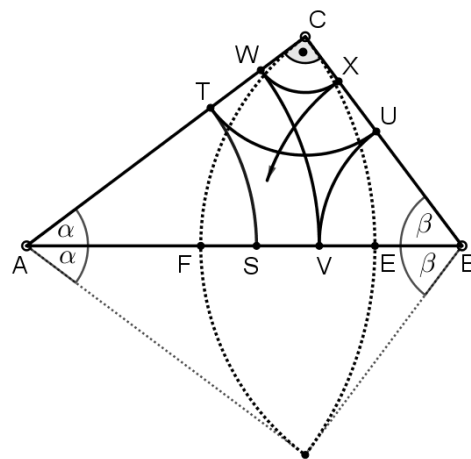
In der Figur liegt der Punkt S im Inneren der Strecke \overline{FE} . Ausgehend von S werden schrittweise sechs Kreisbögen um A, C, B, A, C, B gezeichnet. Zeige, dass der sechste Kreisbogen wieder nach S führt und dass die sechs Kreisbögen dann zusammen genau so lang sind wie die beiden gepunkteten Kreisbögen zusammen.



Beweis :

Die Seitenlängen des Dreiecks werden wie üblich mit $|\overline{BC}| = a$, $|\overline{CA}| = b$ und $|\overline{AB}| = c$ bezeichnet. Außerdem wird die Länge der Strecke \overline{AS} mit x bezeichnet. Dann folgt der Reihe nach

$$\begin{aligned} |\overline{AT}| &= |\overline{AS}| = x \\ \Rightarrow |\overline{CT}| &= b - |\overline{AT}| = b - x \\ \Rightarrow |\overline{CU}| &= |\overline{CT}| = b - x \\ \Rightarrow |\overline{BU}| &= a - |\overline{CU}| = a - (b - x) = a - b + x \\ \Rightarrow |\overline{BV}| &= |\overline{BU}| = a - b + x \\ \Rightarrow |\overline{AV}| &= c - |\overline{BV}| = c - (a - b + x) = c - a + b - x \\ \Rightarrow |\overline{AW}| &= |\overline{AV}| = c - a + b - x \\ \Rightarrow |\overline{CW}| &= b - |\overline{AW}| = b - (c - a + b - x) = -c + a + x \\ \Rightarrow |\overline{CX}| &= |\overline{CW}| = -c + a + x \\ \Rightarrow |\overline{BX}| &= a - |\overline{CX}| = a - (-c + a + x) = c - x \end{aligned}$$



Wegen $0 < x < c$ trifft der letzte Kreisbogen um B die Strecke \overline{AB} in einem inneren Punkt Y mit $|\overline{BY}| = c - x = c - |\overline{AS}|$. Daher folgt $|\overline{AY}| = c - |\overline{BY}| = c - (c - x) = x = |\overline{AS}|$, weswegen $Y = S$ sein muss. Also führt der sechste Kreisbogen wieder zu S .

Bezeichnet man die Innenwinkel des rechtwinkligen Dreiecks bei A und B mit α und β , dann ergibt sich mit der Formel für die Kreisbogenlänge die Gesamtlänge der sechs Kreisbögen zu:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi |\overline{AS}| + \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi |\overline{CT}| + \frac{\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi |\overline{BU}| + \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi |\overline{AV}| + \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi |\overline{CW}| + \frac{\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi |\overline{BX}|.$$

Dies kann man zusammenfassen zu:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi (|\overline{AS}| + |\overline{AV}|) + \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi (|\overline{CT}| + |\overline{CW}|) + \frac{\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi (|\overline{BU}| + |\overline{BX}|).$$

Setzt man hier die oben bestimmten Ausdrücke für die Streckenlängen in Abhängigkeit

von a, b, c und x ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi (x + (c - a + b - x)) + \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi (b - x + (-c + a + x)) + \frac{\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi (a - b + x + (c - x)) \\ &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi (c - a + b) + \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi (b - c + a) + \frac{\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi (a - b + c) \\ &= \frac{-\alpha + 90^\circ + \beta}{360^\circ} \cdot 2\pi a + \frac{\alpha + 90^\circ - \beta}{360^\circ} \cdot 2\pi b + \frac{\alpha - 90^\circ + \beta}{360^\circ} \cdot 2\pi c \\ &= \frac{2\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi a + \frac{2\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi b. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde dabei benutzt, dass $\alpha + \beta = 90^\circ$ bzw. $-\alpha + 90^\circ = \beta$ bzw. $90^\circ - \beta = \alpha$ gilt. Da die gepunkteten Kreisbögen in der Abbildung die Radien a bzw. b haben und aufgrund der Spiegelsymmetrie zur Achse AB die Mittelpunktswinkel 2β bzw. 2α besitzen, beschreibt der letzte Ausdruck genau die Gesamtlänge der beiden gepunkteten Kreisbögen. Damit ist auch der zweite Teil der Behauptung der Aufgabe gezeigt.

Variante:

Um den ersten Teil der Aussage zu beweisen, kann man mit den Bezeichnungen des Beweises oben auch wie folgt argumentieren:

Weil die Kreisradien \overline{AS} und \overline{AT} bzw. \overline{AV} und \overline{AW} jeweils gleich lang sind, sind auch die Strecken \overline{SV} und \overline{TW} gleich lang (im Fall $S = V$ entarten beide Strecken zu einem Punkt). Gleiches gilt für die Strecken \overline{TW} und \overline{UX} und für die Strecken \overline{UX} und \overline{VY} , wenn man den Punkt Y genau wie im Beweis oben als Schnittpunkt des sechsten Kreisbogens mit AB einführt.

Weil demnach $|\overline{SV}| = |\overline{VY}|$ gilt, liegen die Punkte S und Y auf der Gerade AB und haben die gleiche Entfernung vom Punkt V . (*)

Zusätzlich gilt, da alle Punkte (bis auf eventuell Y) auf den entsprechenden Strecken liegen:

$$\begin{aligned} S \text{ liegt auf } \overline{AB} \text{ näher an } A \text{ als } V & \iff T \text{ liegt auf } \overline{AC} \text{ näher an } A \text{ als } W \\ & \iff W \text{ liegt auf } \overline{CA} \text{ näher an } C \text{ als } T \\ & \iff X \text{ liegt auf } \overline{CB} \text{ näher an } C \text{ als } U \quad \text{Demnach} \\ & \iff U \text{ liegt auf } \overline{BC} \text{ näher an } B \text{ als } X \\ & \iff V \text{ liegt auf } \overline{BA} \text{ näher an } B \text{ als } Y \end{aligned}$$

liegen S und Y auf AB auf derselben Seite von V und stimmen wegen (*) überein: $S = Y$. Damit ist der 1. Teil der Aussage bewiesen. Der 2. Teil wird wie im Beweis oben begründet.

Aufgabe 3

Bestimme alle positiven ganzen Zahlen a, b, c , für die $a \cdot b \cdot c = a + b + c + 7$ gilt.

Lösung:

Es gibt genau die folgenden neun Lösungen:

a	1	4	4	1	1	2	2	10	10
b	4	1	4	2	10	1	10	1	2
c	4	4	1	10	2	10	1	2	1

1. Beweis (mit Faktorisierung):

Zunächst nehmen wir an, dass $1 \leq a \leq b \leq c$ gilt. Wäre dann $a \geq 3$, dann wäre auch $b \geq 3$ und deswegen

$$3 \cdot c + 7 = c + c + c + 7 \geq a + b + c + 7 = a \cdot b \cdot c \geq 3 \cdot 3 \cdot c = 9 \cdot c, \text{ also } 7 \geq 6c.$$

Das wäre nur für $c = 1$ erfüllt, im Widerspruch zu $c \geq b \geq 3$.

Deswegen kann nur $a = 2$ oder $a = 1$ gelten.

Fall 1: $a = 2$.

Dann ist $2 \cdot b \cdot c = 2 + b + c + 7 = b + c + 9$. Durch Multiplikation mit 2, anschließendes Umordnen und Addition von 1 ergibt sich dann der Reihe nach

$$\begin{aligned} 4 \cdot b \cdot c &= 2 \cdot b + 2 \cdot c + 18 \\ 4 \cdot b \cdot c - 2 \cdot b - 2 \cdot c &= 18 \\ 4 \cdot b \cdot c - 2 \cdot b - 2 \cdot c + 1 &= 19 \\ (2b - 1) \cdot (2c - 1) &= 19. \end{aligned}$$

Da $2b - 1$ und $2c - 1$ positive ganze Zahlen sind und $2b - 1 \leq 2c - 1$ ist, muss $2b - 1 = 1$ und $2c - 1 = 19$ sein. Das bedeutet, dass $b = 1$ sein muss. Wegen $b \geq a = 2$ kann das nicht sein. In diesem Fall ergibt sich also keine Lösung.

Fall 2: $a = 1$.

Dann ist $1 \cdot b \cdot c = 1 + b + c + 7 = b + c + 8$. Durch Umordnen und Addition von 1 ergibt sich dann der Reihe nach

$$\begin{aligned} b \cdot c - b - c &= 8 \\ b \cdot c - b - c + 1 &= 9 \\ (b - 1) \cdot (c - 1) &= 9. \end{aligned}$$

Da $b - 1$ und $c - 1$ nicht negative ganze Zahlen sind und $b - 1 \leq c - 1$ ist, muss $b - 1 = 1$ und $c - 1 = 9$ oder $b - 1 = 3$ und $c - 1 = 3$ sein. Das bedeutet, dass $b = 2$ und $c = 10$ oder $b = 4$ und $c = 4$ sein muss.

Insgesamt gibt es unter der Bedingung $1 \leq a \leq b \leq c$ also nur die beiden Möglichkeiten $a = 1, b = 2, c = 10$ und $a = 1, b = 4, c = 4$.

Die Probe $1 \cdot 2 \cdot 10 = 20 = 1 + 2 + 10 + 7$ bzw. $1 \cdot 4 \cdot 4 = 16 = 1 + 4 + 4 + 7$ zeigt, dass es tatsächlich auch Lösungen sind. Da sich die gegebene Gleichung bei Vertauschung der Variablen nicht ändert, gibt es dann genau die in obiger Tabelle angegebenen Lösungen.

2. Beweis (mit Abschätzungen):

Wie im 1. Beweis zeigt man, dass nur $a = 2$ oder $a = 1$ gelten kann.

Fall 1: $a = 2$.

Dann ist $2 \cdot b \cdot c = 2 + b + c + 7 = b + c + 9$. Wäre $b \geq 3$, dann wäre

$$2 \cdot c + 9 = c + c + 9 \geq b + c + 9 = 2 \cdot b \cdot c \geq 6 \cdot c \Rightarrow 9 \geq 4 \cdot c \Rightarrow 2 \geq c.$$

Das kann wegen $c \geq b$ aber nicht sein. Also bleibt nur $b = 2$ und damit $4 \cdot c = 2 \cdot b \cdot c = b + c + 9 = c + 11$, was gleichbedeutend mit $3 \cdot c = 11$ ist und keine ganzzahlige Lösung für c besitzt. In diesem Fall gibt es also keine Lösung.

Fall 2: $a = 1$.

Dann ist $1 \cdot b \cdot c = 1 + b + c + 7 = b + c + 8$. Wäre $b \geq 5$, dann wäre

$$2 \cdot c + 8 = c + c + 8 \geq b + c + 8 = b \cdot c \geq 5 \cdot c \Rightarrow 8 \geq 3 \cdot c \Rightarrow 2 \geq c.$$

Das kann wegen $c \geq b$ aber nicht sein. Demnach bleiben nur die Möglichkeiten $b = 1$, $b = 2$, $b = 3$ oder $b = 4$. In folgender Tabelle werden diese Werte in die Gleichung $b \cdot c = b + c + 8$ eingesetzt und nach ganzzahligen Lösungen für c untersucht:

b	Gleichung	ganzzahlige Lösungen für c
1	$c = c + 9$	-
2	$2 \cdot c = c + 10$	$c = 10$
3	$3 \cdot c = c + 11$	-
4	$4 \cdot c = c + 12$	$c = 4$

Insgesamt gibt es unter der Bedingung $1 \leq a \leq b \leq c$ also nur die beiden Möglichkeiten $a = 1, b = 2, c = 10$ und $a = 1, b = 4, c = 4$. Die Probe $1 \cdot 2 \cdot 10 = 20 = 1 + 2 + 10 + 7$ bzw. $1 \cdot 4 \cdot 4 = 16 = 1 + 4 + 4 + 7$ zeigt, dass es tatsächlich auch Lösungen sind und da sich die gegebene Gleichung bei Vertauschung der Variablen nicht ändert, gibt es dann genau die in obiger Tabelle angegebenen Lösungen.

Aufgabe 4

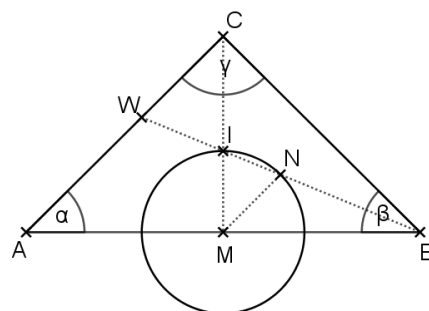
Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC mit Basis \overline{AB} . Den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels bei B mit der Seite \overline{AC} nennen wir W . Der Kreis um den Mittelpunkt der Basis durch den Inkreismittelpunkt verläuft durch den Mittelpunkt der Strecke \overline{BW} . Bestimme die Innenwinkel des gegebenen Dreiecks.

Lösung:

Die Basiswinkel des Dreiecks sind 45° groß und der dritte Innenwinkel ist 90° groß. Das Dreieck ist also gleichschenklilig rechtwinklig.

1. Beweis:

Der Mittelpunkt der Basis \overline{AB} wird mit M , der Mittelpunkt der Strecke \overline{BW} mit N und der Inkreismittelpunkt des Dreiecks mit I bezeichnet. I ist dabei der Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden BW und CM des Dreiecks. Außerdem werden die Innenwinkel des Dreiecks ABC wie üblich mit α , β und γ bezeichnet. Dann ist die Strecke \overline{MN} als Mittellinie im Dreieck ABW parallel zur Seite \overline{AW} .



Daher ist $\overline{MN} \parallel \overline{WC}$ und mit dem Wechselwinkelsatz folgt hieraus $\angle IWC = \angle INM$. Weil \overline{MN} und \overline{MI} Radien des Inkreises sind, sind sie gleich lang. Das Dreieck NIM ist somit gleichschenkelig. Mit dem Basiswinkelsatz und dem Scheitelwinkelsatz folgt dann weiter:

$$\angle IWC = \angle INM = \angle MIN = \angle CIW.$$

Also folgt mit dem Satz über die Innenwinkelsumme im somit gleichschenkligen Dreieck WIC :

$$\angle IWC = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \angle WCI) = \frac{1}{2} \cdot \left(180^\circ - \frac{1}{2} \cdot \gamma\right)$$

Weil im gleichschenkligen Dreieck ABC für die Basiswinkel $\alpha = \beta = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \gamma)$ gilt, folgt schließlich mit dem Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck BCW :

$$180^\circ = \angle BWC + \angle CBW + \angle WCB = \angle IWC + \frac{1}{2} \cdot \beta + \gamma = \frac{1}{2} \cdot \left(180^\circ - \frac{1}{2} \cdot \gamma\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \gamma)\right) + \gamma.$$

Dies lässt sich zusammenfassen zu

$$180^\circ = 135^\circ + \frac{1}{2} \cdot \gamma,$$

was gleichbedeutend mit $\gamma = 90^\circ$ ist. Da das Dreieck ABC gleichschenkelig mit Basis \overline{AB} ist, folgt daraus dann $\alpha = \beta = 45^\circ$.

2. Beweis:

Die Bezeichnungen werden wie im 1. Beweis eingeführt. Weil M und N Mittelpunkte der Strecke \overline{AB} bzw. \overline{WB} sind, folgt aus der Umkehrung des Strahlensatzes, dass MN parallel zu AW ist. Mit dem Stufenwinkelsatz folgt damit $\angle BMN = \angle BAW = \alpha$. Weil CM als Symmetrieachse im gleichschenkligen Dreieck ABC senkrecht auf der Basis \overline{AB} steht, ist dann $\angle NMI = 90^\circ - \angle BMN = 90^\circ - \alpha$. Das Dreieck NIM hat die beiden Radien \overline{MN} und \overline{MI} des Inkreises als Seiten, ist also gleichschenkelig. Also gilt für seinen Basiswinkel an der Ecke N :

$$\angle INM = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \angle NMI) = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - (90^\circ - \alpha)) = 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot \alpha.$$

Der Nebenwinkel $\angle MNB$ zu $\angle INM$ hat demnach die Größe $\angle MNB = 180^\circ - (45^\circ + \frac{1}{2} \cdot \alpha) = 135^\circ - \frac{1}{2} \cdot \alpha$.

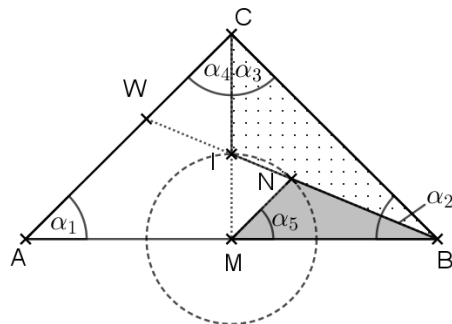
Schließlich folgt mit dem Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck MBN und der Tatsache, dass $\alpha = \beta$ ist:

$$180^\circ = \angle BMN + \angle NBM + \angle MNB = \alpha + \frac{1}{2} \cdot \beta + \left(135^\circ - \frac{1}{2} \cdot \alpha\right) = 135^\circ + \alpha,$$

was $\alpha = 45^\circ$ bedeutet. Damit muss auch $\beta = 45^\circ$ sein und $\gamma = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.

3. Beweis:

Wir bezeichnen die Punkte und Winkel wie in nebenstehender Abbildung. Weil das Dreieck ABC gleichschenkelig ist, ist dabei $\alpha_1 = \alpha_2$ (1) und CM ist Symmetrieachse und Winkelhalbierende des Innenwinkels bei C . Der Inkreismittelpunkt I liegt also auch auf CM und die beiden Winkel α_3 und α_4 sind gleich groß (2). Weil M und N Mittelpunkte der Strecke \overline{AB} bzw. \overline{WB} sind, folgt aus der Umkehrung des Strahlensatzes, dass MN parallel zu AW ist.



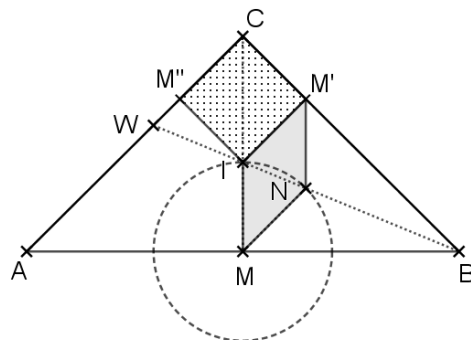
Deswegen sind die Stufenwinkel α_1 und α_5 gleich groß (3). Schließlich besitzt das Dreieck NIM die beiden Inkreisradien \overline{NM} und \overline{IM} als Seiten, ist also gleichschenkelig. Die Winkel $\angle MNB$ und $\angle BIC$ sind als Nebenwinkel der Basiswinkel (Außenwinkel) in diesem Dreieck also auch gleich groß. Demnach stimmen die hervorgehobenen Dreiecke MBN und BCI in diesem Winkel und auch in dem jeweiligen Winkel an der Ecke B , der gleich $\frac{1}{2} \cdot \alpha_2$ ist, überein. Sie sind also ähnlich zueinander und die dritten Innenwinkel α_5 und α_3 sind gleich groß (4). Insgesamt ergibt sich damit:

$$\alpha_2 \stackrel{(1)}{=} \alpha_1 \stackrel{(3)}{=} \alpha_5 \stackrel{(4)}{=} \alpha_3 \stackrel{(2)}{=} \alpha_4.$$

Die Innenwinkel des Dreiecks ABC setzen sich somit aus den vier gleich großen Winkeln α_1 bis α_4 zusammen. Jeder dieser Winkel hat also die Größe $\frac{1}{4} \cdot 180^\circ = 45^\circ$ und das Dreieck hat daher die Innenwinkel 45° , 45° und 90° .

4. Beweis:

Wie in den anderen Beweisen erkennt man, dass CM Symmetrieachse und Winkelhalbierende ist und dass $MN \parallel AC$ ist. Nun sei M' das Bild von M bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden BW . M' liegt dann auf BC und weil $|MI| = |MN| = |M'I| = |M'N|$ ist, ist das Viereck $MNM'I$ eine Raute. Da IM senkrecht auf AB steht, folgt aufgrund der Spiegelsymmetrie dabei auch: $\angle CM'I = 90^\circ$.



Spiegelt man nun M' an der Winkelhalbierenden CI , so erhält man M'' auf CA . Dabei ist $M''C = AC \parallel MN \parallel IM'$. Aufgrund der Spiegelsymmetrie gilt dann auch $M'C \parallel IM''$. Das Viereck $IM'CM''$ ist somit ein Parallelogramm, das bei M' einen rechten Innenwinkel besitzt. Es ist also ein Rechteck, weswegen $\angle M''CM' = \angle ACB = 90^\circ$ folgt. Das Dreieck ABC hat daher die Innenwinkel 45° , 45° und 90° .