25. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Lösungsbeispiele für die

Aufgaben der 1. Runde 2022/2023

Aufgabe 1

Mit den Ziffern $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ *und* 9 *sollen vier zweistellige Primzahlen gebildet werden, wobei jede Ziffer nur einmal verwendet werden darf.*
Untersuche, welche Werte für die Summe dieser vier Primzahlen möglich sind.

Lösung:

Die Summe der vier Primzahlen ist immer 190.

1. Beweis (mit einer Liste der zweistelligen Primzahlen):

Es gibt genau die folgenden 21 zweistelligen Primzahlen:

$$11, 13, 17, 19, \quad 23, 29, \quad 31, 37, \quad 41, 43, 47, \quad 53, 59, \quad 61, 67, \quad 71, 73, 79, \quad 83, 89, \quad 97.$$

Da jede der acht gegebenen Ziffern nur einmal verwendet werden darf und es bei vier zweistelligen Zahlen insgesamt acht zu besetzende Ziffern gibt, muss jede Ziffer sogar genau einmal verwendet werden. Da die Ziffern 2 und Ziffern 5 vorkommen müssen, muss aus obiger Liste genau eine der beiden Zahlen 23 oder 29 und genau eine der beiden Zahlen 53 oder 59 gebildet werden. Da keine Ziffer mehrfach vorkommen darf, sind für die beiden somit zu bildenden Primzahlen nur die Paare 23 und 59 bzw. 29 und 53 möglich. In jedem der beiden Fälle wird die Ziffer 3 genutzt. Für die Ziffer 4 bleiben also nur die beiden Zahlen 41 oder 47 und für die Ziffer 6 genau die beiden Zahlen 61 oder 67. Da keine Ziffer mehrfach vorkommen darf, sind für die beiden hier zu bildenden Primzahlen nur die Paare 41 und 67 bzw. 47 und 61 möglich.
Insgesamt gibt es somit nur vier Möglichkeiten, die vier Primzahlen zu bilden:

$$23, 59, 41, 67; \qquad 23, 59, 47, 61; \qquad 29, 53, 41, 67 \quad \text{oder} \quad 29, 53, 47, 61.$$

Die Summe der vier gebildeten Zahlen ist in jedem Fall $23 + 59 + 41 + 67 = 23 + 59 + 47 + 61 = 29 + 53 + 41 + 67 = 29 + 53 + 47 + 61 = 190$.

2. Beweis (Variante mit Teilbarkeit):

Zweistellige Primzahlen sind nicht durch 2 und nicht durch 5 teilbar. Daher können die Ziffern $2, 4, 6$ (wegen Teilbarkeit durch 2) und 5 (wegen Teilbarkeit durch 5) nicht an der Einerstelle der Primzahlen stehen.
Folglich müssen die 4 gesuchten zweistelligen Primzahlen an den Zehnerstellen die Ziffern $2, 4, 6$ und 5 haben und an den Einerstellen die Ziffern $1, 3, 7$ oder 9.

Folgende Primzahlen, sortiert nach ihrer Zehnerziffer, sind daher möglich:

2: 23 oder 29

4: 41, 43 oder 47

5: 53 oder 59

6: 61 oder 67

Für die folgende Fallunterscheidung betrachten wir die Primzahlen, die eine 2 oder 6 an der Zehnerstelle haben.

1. **Fall:** Die Primzahl 23 wurde gebildet. Da die Ziffer 3 nun nicht mehr zur Verfügung steht, kann die 53 nicht gebildet werden und es muss die Zahl 59 gewählt werden.

   1.a: Die Primzahl 61 wird gebildet. Da nun nur noch die Ziffern 4 und 7 verfügbar sind, muss die Zahl 47 gebildet werden.
   Insgesamt wurden also die Primzahlen $23, 47, 59$ und 61 gebildet. Ihre Summe ist $23 + 47 + 59 + 61 = 190$.

   1.b: Die Primzahl 67 wurde gebildet. Da nun nur noch die Ziffern 4 und 1 zur Verfügung stehen, muss die Primzahl 41 gewählt werden.
   Insgesamt wurden also die Primzahlen $23, 41, 59$ und 67 gebildet. Ihre Summe ist $23 + 41 + 59 + 67 = 190$.

2. **Fall:** Die Primzahl 29 wurde gebildet. Da die Ziffer 9 nun nicht mehr zur Verfügung steht, kann die 59 nicht gebildet werden und es muss die Zahl 53 gewählt werden.

   2.a: Die Primzahl 61 wird gebildet. Da nun nur noch die Ziffern 4 und 7 verfügbar sind, muss die Zahl 47 gebildet werden.
   Insgesamt wurden also die Primzahlen $29, 47, 53$ und 61 gebildet. Ihre Summe ist $29 + 47 + 53 + 61 = 190$.

   2.b: Die Primzahl 67 wurde gebildet. Da nun nur noch die Ziffern 4 und 1 zur Verfügung stehen, muss die Primzahl 41 gewählt werden.
   Insgesamt wurden also die Primzahlen $29, 41, 53$ und 67 gebildet. Ihre Summe ist $29 + 41 + 53 + 67 = 190$.

In allen Fällen hat die Summe den Wert 190. Also ist 190 die einzige mögliche Summe.

3. Beweis (Betrachtung der Einer- und Zehnerstelle):

Angenommen es gibt vier solche Primzahlen.
Wie vorher schließen wir, dass bei den vier Primzahlen an den Zehnerstellen die Ziffern $2, 4, 5$ und 6 und an den Einerstellen die Ziffern $1, 3, 7$ und 9 stehen müssen.
Bei der Bildung der Summe der vier Zahlen können wir auch zuerst die Beiträge der Einerstellen und dann die Zehnerziffernbeiträge addieren, d.h. die Summe der vier Zahlen kann nur den Wert

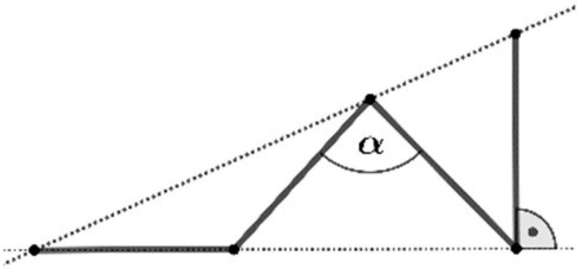
$$(1 + 3 + 7 + 9) + (2 + 4 + 5 + 6) \cdot 10 = 20 + 17 \cdot 10 = 190$$

haben.
Es bleibt zu zeigen, dass es tatsächlich vier solche Primzahlen gibt. Dazu genügt es, ein Beispiel anzugeben:

$$23, 41, 59, 67 \quad .$$

Aufgabe 2

In der Abbildung sind die vier hervorgehobenen Strecken gleich lang. Bestimme die Größe des Winkels α.

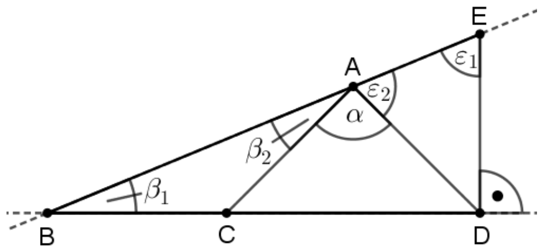


Lösung:

Die Größe des Winkels α beträgt 90°.

1. Beweis (Innenwinkelsumme im rechtwinkligen Dreieck und gleichschenklige Dreiecke):

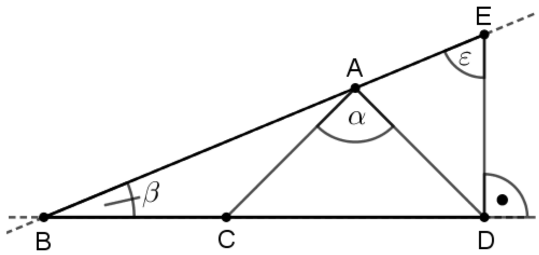
Wir bezeichnen die Punkte und Winkel wie in der nebenstehenden Skizze. Im rechtwinkligen Dreieck BDE ist die Innenwinkelsumme $\beta_1 + \varepsilon_1 + 90° = 180°$. Daher ist $\beta_1 + \varepsilon_1 = 90°$ (*). Weil die beiden Dreiecke ABC und EAD gleichschenklig sind, gelten $\beta_2 = \beta_1$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ (**). Schließlich gilt für den gestreckten Winkel am Punkt A: $\beta_2 + \alpha + \varepsilon_2 = 180°$.



Dies bedeutet aber zusammen mit (*) und (**): $180° = \beta_2 + \alpha + \varepsilon_2 = \beta_1 + \alpha + \varepsilon_1 = 90° + \alpha$, weswegen $\alpha = 90°$ ist.

2. Beweis (Winkeljagd in gleichschenkligen Dreiecken, Außenwinkelsatz[1], gestreckter Winkel):

Wir bezeichnen die Punkte und Winkel wie in der nebenstehenden Skizze. Im gleichschenkligen Dreieck CDA haben die Basiswinkel bei C und D aufgrund der Innenwinkelsumme die Größe $\angle DCA = \angle ADC = \frac{1}{2}\cdot(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$.



Gleichzeitig ist $\angle DCA$ ein Außenwinkel im gleichschenkligen Dreieck BCA. Für den Basiswinkel dieses Dreiecks bei A folgt also $\beta = \angle CBA = \angle BAC = \frac{1}{2}\angle DCA = 45° - \frac{\alpha}{4}$.
Wegen des vorgegebenen rechten Winkels bei D folgt im gleichschenkligen Dreieck DEA

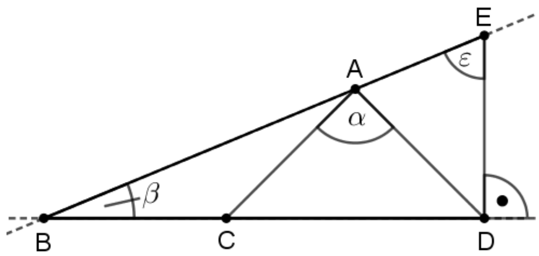
[1] siehe Bemerkung am Ende der Aufgabe

für den Innenwinkel $\angle EDA = 90° - \angle ADC = 90° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}$.
Für die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck DEA folgt wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck $\varepsilon = \angle AED = \angle DAE = \frac{1}{2}\left(180° - \angle EDA\right) = 90° - \frac{\alpha}{4}$.
Die Punkte B, A und E liegen genau dann auf einer Geraden, wenn sich bei A ein gestreckter Winkel ergibt, d.h. es muss gelten $\angle BAC + \angle CAD + \angle DAE = 180°$. Es folgt die Gleichung

$$\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) + \alpha + \left(90° - \frac{\alpha}{4}\right) = 180° \quad ,$$

Dies ist äquivalent zu $\alpha = 90°$.

3. Beweis (Winkeljagd in gleichschenkligen Dreiecken):



Wir ermitteln die Größen der Winkel $\beta = \angle CBA$ und $\varepsilon = \angle AED$.
Der Winkel $\angle DCA$ ist Außenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks ABC mit den Basiswinkeln $\beta = \angle CBA = \angle BAC$, woraus wir $\angle DCA = 2\beta$ schließen.
Im gleichschenkligen Dreieck CDA sind $\angle DCA$ und $\angle ADC$ Basiswinkel, weswegen sich $\angle ADC = 2\beta$ ergibt.
Im rechtwinkligen Dreieck BDE mit rechtem Winkel bei D gilt $\beta + \varepsilon + 90° = 180°$, woraus $\varepsilon = 90° - \beta$ folgt.
Im gleichschenkligen Dreieck EAD mit den Basiswinkeln $\varepsilon = \angle AED = \angle DAE$ gilt $180° = 2\varepsilon + \angle EDA$. Es ergibt sich

$$\angle EDA = 180° - 2\varepsilon = 180° - 2\left(90° - \beta\right) = 2\beta \quad .$$

Andererseits gilt für den rechten Winkel $\angle EDC$

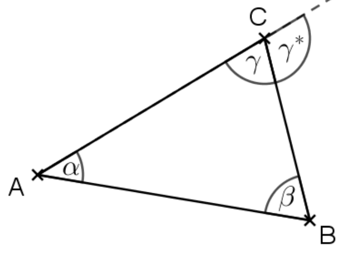
$$90° = \angle EDC = \angle EDA + \angle ADC = 2\beta + 2\beta = 4\beta \quad ,$$

woraus wir $\beta = 22,5°$ ablesen.
Damit gilt im gleichschenkligen Dreieck CDA, dass beide Basiswinkel $\angle DCA$ und $\angle ADC$ die Größe $2\beta = 45°$ haben. Für den Winkel α folgt schließlich

$$\alpha = 180° - 4\beta = 90° \quad .$$

Bemerkung:

In einem Dreieck wird ein Nebenwinkel eines Innenwinkels an einer Ecke *Außenwinkel* genannt. Der Außenwinkelsatz besagt, dass jeder Außenwinkel so groß ist, wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel. In nebenstehendem Bild gilt beispielsweise für den Außenwinkel $\gamma^* = \alpha + \beta$. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass sich sowohl Nebenwinkel als auch alle Innenwinkel eines Dreiecks zu 180° ergänzen.



Aufgabe 3

In Pauls Notizblock sind alle Blätter fortlaufend beidseitig nummeriert. Auf dem ersten Blatt stehen die Seitenzahlen 1 *und* 2*, auf dem nächsten* 3 *und* 4 *und so weiter. Paul reißt ein Blatt heraus. Die Summe aller Seitenzahlen auf den verbliebenen Blättern ist* 2223*. Bestimme, wie viele Blätter Pauls Notizblock gehabt haben kann und welches Blatt herausgerissen wurde.*

Lösung:

Es gibt genau eine Lösung. Der Notizblock hatte 34 Blätter mit den Seitenzahlen von 1 bis 68. Das Blatt mit den Seitenzahlen 61 und 62 wurde herausgerissen.

1. Beweis (Systematisches Probieren):

Zur Berechnung der Summe $S(n)$ der natürlichen Zahlen von 1 bis n kann man z.B. die Gaußsche Summenformel

$$S(n) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

benutzen. Die Seitenzahlen des Notizblocks beginnen bei 1 und enden beim Doppelten der Anzahl der Blätter des Blocks, d.h. die größte Seitenzahl ist eine gerade Zahl.

- Man addiert nacheinander die natürlichen Zahlen von 1 beginnend und überprüft, wann man das erste Mal eine Summe größer als 2223 erhält.
- Die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 66 (dann hätte der Block 33 Blätter) ist $\frac{1}{2} \cdot 66 \cdot 67 = 2211$, was noch zu klein ist. Daher muss der Block aus mindestens 34 Blättern (Seitenzahlen von 1 bis 68) bestehen.
- Die Summe aller Seitenzahlen ist bei 34 Blättern $\frac{1}{2} \cdot 68 \cdot 69 = 2346$.
  Nun ist $2346 - 2223 = 123 = 61 + 62$ und die Seitenzahlen 61 und 62 stehen tatsächlich auf einem Blatt, nämlich auf dem 31. Bei 34 Blättern muss daher das Blatt mit den Seitenzahlen 61 und 62 herausgerissen worden sein, denn jede andere Summe zweier aufeinanderfolgender Zahlen ist kleiner oder größer als 123.
- Angenommen der Block hätte mehr als 34 Blätter. Dann wäre die Summe der Seitenzahlen, nachdem das letzte Blatt mit den höchsten Seitenzahlen herausgerissen wurde, mindestens 2346 (die Summe der Zahlen von 1 bis 68) und daher in jedem Fall zu groß. Gleiches gilt dann erst recht beim Herausreißen eines Blattes, das nicht das letzte ist.

Also gibt es nur die Möglichkeit, dass der Block aus 34 Blättern bestanden hat und das 31. Blatt mit den Seitenzahlen 61 und 62 herausgerissen wurde.

2.Beweis (Aufstellen von Gleichungen und Ungleichungen):

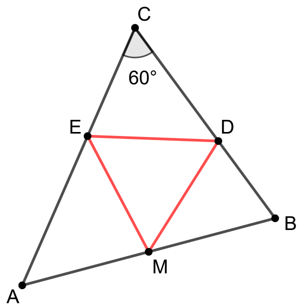
Sei n die Anzahl der Blätter und k mit $1 \le k \le n$ die Nummer des herausgerissenen Blattes. Dann hat der Notizblock die Seitenzahlen 1 bis $2n$ und es wurde das Blatt mit den Seitenzahlen $2k-1$ und $2k$ herausgerissen.
Die Summe der Seitenzahlen des ursprünglichen Blocks kann mit der Gaußschen Summenformel berechnet werden $1+2+\dots+2n = \frac{1}{2}\cdot 2n(2n+1)$. Damit muss folgende Gleichung erfüllt sein:

$$(1)\quad 2223 = \tfrac{1}{2}\cdot 2n(2n+1) - (2k-1) - 2k = 2n^2 + n - 4k + 1 \quad .$$

Wegen $1 \le k$ folgt $2223 \le 2n^2 + n - 3$ bzw. $0 \le 2n^2 + n - 2226$ (2). Zur Lösung dieser Ungleichung berechnen wir die Nullstellen n_1 und n_2 der Funktion $f(n) = 2n^2 + n - 2226$: $n_{1/2} = \frac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{17809}\right)$. Dabei ist n_1 offenbar negativ und wegen $(33\cdot 4+1)^2 = 133^2 = 17689 < 17809$ ist $33\cdot 4 < -1+\sqrt{17809}$ und daher $n_2 = \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{17809}\right) > 33$. Der Graph der Funktion f ist eine nach oben geöffnete Parabel. Da $n \ge 1$ sein muss, folgt also $n \ge n_2 > 33$, damit Ungleichung (2) gilt.
Wegen $k \le n$ folgt aus (1) weiter $2223 \ge 2n^2 - 3n + 1$ bzw. $0 \le 2n^2 - 3n - 2222$ (3). Zur Lösung dieser Ungleichung berechnen wir die Nullstellen n_3 und n_4 der Funktion $g(n) = 2n^2 - 3n - 2222$: $n_{3/4} = \frac{1}{4}\left(3 \pm \sqrt{17785}\right)$. Wieder ist n_3 offenbar negativ und wegen $(35\cdot 4-3)^2 = 137^2 = 18769 > 17785$ ist $35\cdot 4 > 3+\sqrt{17785}$ und daher $n_4 = \frac{1}{4}\left(3+\sqrt{17785}\right) < 35$. Der Graph der Funktion g ist eine nach oben geöffnete Parabel. Daher muss $n_3 \le n \le n_4 < 35$ gelten, damit Ungleichung (3) erfüllt wird.
Insgesamt folgt also $33 < n < 35$ und damit $n = 34$. Der Notizblock hatte also zu Beginn 34 Blätter. Mit Gleichung (1) folgt für k: $2223 = 2\cdot 34^2 + 34 - 4k + 1$ und damit $k = 31$. Das herausgerissene 31. Blatt trägt also die Seitenzahlen $61 = 2\cdot 31 - 1$ und 62.

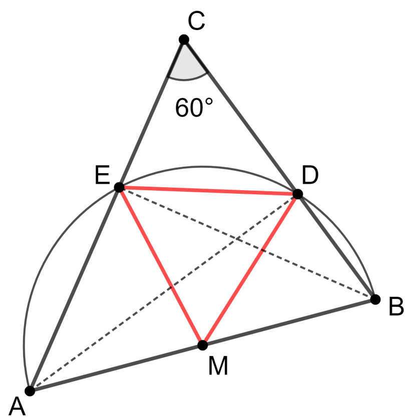
Aufgabe 4

Im spitzwinkligen Dreieck ABC mit $\angle ACB = 60°$ ist M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Die Punkte D und E sind die Höhenfußpunkte auf den Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$. Zeige: Das Dreieck MDE ist gleichseitig.



1. Beweis:

Da das Dreieck ABC spitzwinklig ist, liegen die beide Höhenfußpunkte D und E im Inneren der Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$. Des Weiteren sind die Winkel $\angle BDA$ und $\angle BEA$ beide rechte Winkel. Aus der Umkehrung des Satzes des Thales folgt, dass D und E auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser $\overline{AB}$ mit Mittelpunkt M liegen. Insbesondere ist also $|\overline{MA}| = |\overline{MB}| = |\overline{MD}| = |\overline{ME}|$, d.h. das Dreieck MDE ist gleichschenklig.



Da auch die beiden Dreiecke AME und BMD gleichschenklig sind, gilt mit dem Satz von der Innenwinkelsumme $\angle MAE = \angle AEM$ und daher $\angle EMA = 180° - 2 \cdot \angle MAE$ (1) und $\angle DBM = \angle MDB$, und deswegen $\angle BMD = 180° - 2 \cdot \angle DBM$ (2).
Aus (1) und (2) folgt mit dem gestreckten Winkel am Punkt M für den Winkel $\angle DME$:

$$\begin{aligned}\angle DME &= 180° - \angle EMA - \angle BMD \\ &= 180° - (180° - 2 \cdot \angle MAE) - (180° - 2 \cdot \angle DBM) \\ &= 2 \cdot (\angle MAE + \angle DBM) - 180° \\ &= 2 \cdot (180° - \angle ACB) - 180° \\ &= 2 \cdot 120° - 180° = 60°,\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Innenwinkelsumme im Dreieck ABC benutzt wurde. Das gleichschenklige Dreieck MDE hat also an seiner Spitze M einen Winkel der Größe 60°. Es ist also gleichseitig.

2. Beweis:

Wie im ersten Beweis zeigt man, dass das Dreieck MDE gleichschenklig ist. Nun stellen wir einige Winkelbeziehungen auf.

(1) Da die Summe der Innenwinkel im Dreieck ABC 180° beträgt, gilt
$\angle CBA + \angle BAC = 180° - 60° = 120°$.

(2) In den gleichschenkligen Dreiecken AME und MBD sind die Basiswinkel jeweils gleich groß, d.h.
$\angle BAC = \angle MAE = \angle AEM$ und $\angle CBA = \angle DBM = \angle MDB$.

(3) Mit (2) und (1) folgt $\angle MAE + \angle AEM + \angle DBM + \angle MDB = 2(\angle BAC + \angle CBA) = 240°$.

(4) Die Innenwinkelsumme im Viereck $ABDE$ beträgt 360°. Mit (3) erhält man daher $\angle MED + \angle EDM = 360° - (\angle MAE + \angle AEM + \angle DBM + \angle MDB) = 120°$.

(5) Im gleichschenkligen Dreieck MDE sind die Basiswinkel gleich groß, d.h. $\angle MED = \angle EDM$.
Mit (4) folgt dann $\angle MED = \angle EDM = 60°$

Die Summe der Innenwinkel im Dreieck MDE beträgt 180°. Folglich sind alle drei Innenwinkel des Dreiecks MDE gleich 60° und das Dreieck MDE ist gleichseitig.

Variante (Nutzung des Mittelpunktswinkel-Umfangswinkel-Satzes):

Wie vorher erkennt man, dass D und E auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser $\overline{AB}$ mit Mittelpunkt M liegen und das Dreieck MDE gleichschenklig ist.
Im rechtwinkligen Dreieck ADC gilt $\angle DAC = 180° - \angle CDA - \angle ACD = 180° - 90° - 60° = 30°$.
Nun ist der Winkel $\angle DAE = \angle DAC = 30°$ Umfangswinkel im Thaleskreis über der Sehne $\overline{DE}$.
Nach dem Mittelpunktswinkel-Umfangswinkel-Satz ist der Mittelpunktswinkel $\angle DME$

über der Sehne $\overline{DE}$ doppelt so groß wie der Umfangswinkel $\angle DAE = 30°$. Also gilt $\angle DME = 2 \cdot 30° = 60°$.
Folglich hat das gleichschenklige Dreieck MDE an der Spitze einen 60°-Winkel und ist daher auch gleichseitig.

Aufgabe 5

Antonia möchte alle Seiten zweier Holzwürfel mit positiven ganzen Zahlen beschriften. Dabei dürfen Zahlen mehrfach vorkommen. Beim einmaligen Werfen beider Würfel soll die Summe der gewürfelten Augenzahlen nur die Werte $2, 3, 4, \ldots, 13$ annehmen können und jeder dieser zwölf Werte soll gleich wahrscheinlich sein.
Bestimme alle Möglichkeiten für die Zahlen, die auf den Seiten der einzelnen Würfel stehen können.

Lösung:

Es gibt genau vier Möglichkeiten:

Würfel 1	Würfel 2
$(1;1;1;2;2;2)$	$(1;3;5;7;9;11)$
$(1;1;1;3;3;3)$	$(1;2;5;6;9;10)$
$(1;1;1;4;4;4)$	$(1;2;3;7;8;9)$
$(1;1;1;7;7;7)$	$(1;2;3;4;5;6)$

Beweis:

Die zwei Würfel werden im Folgenden mit A und B bezeichnet. Weiter werden die Zahlen auf Würfel A mit $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ und die auf Würfel B mit $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ bezeichnet. Da die Anordnung der Zahlen auf den Würfeln keine Rolle spielt, gelte $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_6$ und $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_6$.

Damit jede der 12 Augensummen gleich wahrscheinlich ist, d.h. mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{12}$ gewürfelt wird, müssen gemäß der Laplace-Formel unter den 36 möglichen, gleichwahrscheinlichen Würfelergebnissen (a_i, b_j) (mit $1 \leq i, j \leq 6$) jeweils genau drei zu einer der Augensummen 2, 3, ..., 13 führen: $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Die folgenden Aussagen gelten jeweils analog mit vertauschten Würfeln: A $\leftrightarrow B$.

- *Für die Augensumme 2 muss* $a_1 = a_2 = a_3 = 1,\ a_4 \geq 2$ *und* $b_1 = 1,\ b_2 \geq 2$ *gelten*:

  <u>Begründung:</u>

  Für die Augensumme 2 ist $a_1 = 1$ und $b_1 = 1$ notwendig. Damit mindestens ein weiteres der 36 Ergebnisse zur Augensumme 2 führt, muss weiter $a_2 = 1$ oder $b_2 = 1$ gelten. OBdA gelte $a_2 = 1$. Wäre nun auch $b_2 = 1$, dann gäbe es mindestens die vier Ergebnisse $(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1)$ und (a_2, b_2) mit Augensumme 2. Daher muss $b_2 \geq 2$ sein. Um nun genau drei Ergebnisse zur Augensumme 2 zu erhalten, muss weiter $a_3 = 1$ und $a_4 \geq 2$ gelten.

- *Weiter muss $b_1 < b_2 < \dots < b_6$ gelten und die drei Zahlen a_4, a_5 und a_6 müssen gleich sein: $a_4 = a_5 = a_6 =: a$ (mit $a \geq 2$):*

  Begründung:

  Wegen $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ kommen die sechs Augensummen $b_1+1, b_2+1, \dots, b_6+1$ jeweils dreimal vor. Da diese sechs Augensummen paarweise verschieden sein müssen, muss dies auch für Zahlen $b_1, \dots, b_6$ gelten. Daher ergibt sich $b_1 < b_2 < \dots < b_6$. Damit nun die größte Augensumme $13 = a_6 + b_6$ genau dreimal vorkommt, muss $a_4 = a_5 = a_6$ gelten.

Nun kann man auf zwei Arten weiter argumentieren:

1. Variante:

- *Nur für $a \in \{2; 3; 4; 7\}$ kann es eine passende Zahlenkombination für den Würfel B geben:*

  Begründung:

  Wegen $1 = b_1 < b_2 < \dots < b_6$ muss $b_6 \geq 6$ gelten. Zusammen mit $a + b_6 = 13$ folgt daraus: $a = 13 - b_6 \leq 13 - 6 = 7$.

  Für $a = 5$ (und für $a = 6$) kann es keine Lösung geben:
  In diesen Fällen wäre $b_1 + a$ gleich 6 (7). Für die Augensummen 3, 4 und 5 (und 6) müsste dann $b_2 = 2$, $b_3 = 3$, $b_4 = 4$ (und $b_5 = 5$) gelten. Da aber für $b_6 + a = 13$ weiter $b_6 = 8$ ($b_6 = 7$) sein müsste, käme die Augensumme 9 (8) sechsmal vor: $a_1+b_6 = 1+8 = 9$ und $a + b_4 = 5 + 4 = 9$ ($a_1 + b_6 = 1 + 7 = 8$ und $a + b_2 = 6 + 2 = 8$).

- *Für $a \in \{2; 3; 4; 7\}$ gibt es jeweils genau eine Zahlen-Kombination für den Würfel B.*

  Im Folgenden wird gezeigt, dass in diesen vier möglichen Fällen die Zahlen $b_1 < \dots < b_6$ auf Würfel B eindeutig festgelegt sind.

<u>$a = 7$:</u> A: (1, 1, 1, 7, 7, 7) $\Rightarrow$ B : (1, 2, 3, 4, 5, 6)

Da die Augensummen mit dem Summanden $a = 7$ mindestens den Wert 8 ergeben ($b_1 + a = 1 + 7 = 8$), muss für die Augenzahlen $b_2, b_3, \dots, b_6$ gelten: $b_2 + 1 = 3$, $b_3 + 1 = 4$, $\dots, b_6 + 1 = 7$; das heißt $b_2 = 2$, $b_3 = 3$, $\dots$, $b_6 = 6$.

<u>$a = 4$:</u> A: (1, 1, 1, 4, 4, 4) $\Rightarrow$ B : (1, 2, 3, 7, 8, 9)

Da die Augensummen mit dem Summanden $a = 4$ mindestens den Wert 5 ergeben ($b_1 + a = 1 + 4 = 5$), muss für die Augenzahlen b_2 und b_3 gelten: $b_2 + 1 = 3$ und $b_3 + 1 = 4$ – das heißt $b_2 = 2$ und $b_3 = 3$. Für die Augensummen 11, 12 und 13 muss weiter $b_4 + 4 = 11$, $b_5 + 4 = 12$ und $b_6 + 4 = 13$ und damit $b_4 = 7$, $b_5 = 8$ und $b_6 = 9$ gelten.

<u>$a = 3$:</u> A: (1, 1, 1, 3, 3, 3) $\Rightarrow$ B : (1, 2, 5, 6, 9, 10)

Da die Augensummen mit dem Summanden $a = 3$ mindestens den Wert 4 ergeben ($b_1 + a = 1 + 3 = 4$), muss für die Augenzahl b_2 gelten: $b_2 + 1 = 3$ – das heißt $b_2 = 2$. Für die Augensummen 12 und 13 muss weiter $b_5 + 3 = 12$ und $b_6 + 3 = 13$ und damit $b_5 = 9$ und $b_6 = 10$ gelten. Schließlich muss für die Augensummen 6 und 7 $b_3 + 1 = 6$ und $b_4 + 1 = 7$ und damit $b_3 = 5$ und $b_4 = 6$

gelten: $b_3 + 3 = 6 \iff b_3 = 3$ und $b_4 + 3 = 7 \iff b_4 = 4$ sind nicht möglich, da sonst die Augensumme 4 mit $b_1+3 = 4 = b_3+1$ beziehungsweise die Augensumme 5 mit $b_2 + 3 = 5 = b_4 + 1$ sechsmal vorkäme.

<u>$a = 2$:</u> A: $(1, 1, 1, 2, 2, 2) \Rightarrow$ B : $(1, 3, 5, 7, 9, 11)$

Für die Augensumme 4 muss $b_2 + 1 = 4$ und damit $b_2 = 3$ gelten: $b_2 + 2 = 4 \iff b_2 = 2$ ist nicht möglich, da sonst die Augensumme 3 mit $b_1 + 2 = 3 = b_2 + 1$ sechsmal vorkäme. Für die Augensumme 6 muss $b_3 + 1 = 6$ und damit $b_3 = 5$ gelten: $b_3 = 4$ ist nicht möglich, da sonst die Augensumme 5 mit $b_2 + 2 = 5 = b_3 + 1$ sechsmal vorkäme. Analog sind für die Augensummen 8, 10 und 12 nur $b_4 = 7$, $b_5 = 9$ und $b_6 = 11$ möglich: Für $b_4 = 6$, $b_5 = 8$ und $b_6 = 10$ kämen die Augensummen 7, 9 und 11 dann jeweils sechsmal vor.

Probe:
In allen vier Fällen bestätigt man durch Nachrechnen, dass unter den 36 möglichen, gleichwahrscheinlichen Würfelergebnissen (a_i, b_j) (mit $1 \le i, j \le 6$) jeweils genau drei zu einer der Augensummen $2, 3, \ldots, 13$ führen.

<u>2. Variante:</u>

Wegen $a \ge 2$ ist $a = 1 + k$ mit einer ganzen Zahl $k \ge 1$. In dieser Bezeichnung lauten die Zahlen auf dem Würfel A: $(1, 1, 1, 1 + k, 1 + k, 1 + k)$.

Da $b_1 + a = 1 + 1 + k = k + 2$ gilt, muss für die Augensummenwerte $2, \ldots, k + 1$ gelten: $b_1 + 1 = 2, \ldots, b_k + 1 = k + 1$, und damit $b_1 = 1, \ldots, b_k = k$. Diese b-Werte liefern mit den a-Werten 1 und $1 + k$ insgesamt die $2 \cdot k$ Augensummenwerte $1 + 1 = 2, \ldots k + 1$, $1 + 1 + k = k + 2, \ldots k + 1 + k = 2k + 1$.

Nun muss $2k + 1 \le 13$ und damit $k \le 6$ gelten.

- Für $k = 6$ erhält man direkt die Lösungs-Konfiguration

  A: $(1, 1, 1, 7, 7, 7)$ B : $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$

- Für $k < 6$ ist $b_k + 1 + k = 2k + 1 < 13$ und für den nächstgrößeren Summenwert $2k + 2$ muss $b_{k+1}+1 = 2k+2$ und somit $b_{k+1} = 2k+1$ gelten. ($b_{k+1}+1+k = 2k+2 \iff b_{k+1} = k+1$ ist nicht möglich, da hiermit der bereits dreimal erzeugte Summenwert $k + 2$ mit $b_{k+1} + 1$ weitere drei Male erzeugt würde.)
  Mit $b_{k+1} = 2k + 1$ gilt $b_{k+1} + 1 + k = 3k + 2$ und für die k Summenwerte $2k + 2, 2k + 3, \ldots, 3k + 1$ muss $b_{k+1} + 1 = 2k + 2$, $b_{k+2} = 2k + 3 \ldots, b_{2k} + 1 = 3k + 1$ und somit $b_{k+1} = 2k + 1$, $b_{k+2} = 2k + 2, \ldots, b_{2k} = 3k$ gelten. (Mit dem Argument von zuvor sind für $b_{k+1}, \ldots, b_{2k}$ die Werte $k + 1, \ldots, 2k$ nicht möglich: Die Summen dieser b-Werte mit dem a-Wert 1 ergäben Summenwerte kleiner oder gleich $2k+1$ – die aber bereits erzeugt sind.)
  Die b-Werte $b_{k+1} = 2k + 1, \ldots, b_{2k} = 3k$ liefern mit den a-Werten 1 und $1 + k$ insgesamt die $2 \cdot k$ Augensummenwerte $2k + 1 + 1 = 2k + 2, \ldots, 3k + 1$, $2k + 1 + 1 + k = 3k + 2, \ldots 3k + 1 + k = 4k + 1$.

  Der Fall $4k + 1 = 13$ liefert $k = 3$ und damit die Lösungs-Konfiguration

$$\text{A: } (1, 1, 1, 4, 4, 4) \qquad \text{B}: (1, 2, 3, 7, 8, 9)$$

- Für $k < 3$ erhält man analog notwendig folgende k b-Werte: $b_{2k+1} = 4k + 1, \ldots, b_{3k} = 5k$. Die Summen dieser b-Werte mit den a-Werten 1 und $1 + k$ erzeugen die $2 \cdot k$ Summenwerte $4k + 2, \ldots, 5k + 1, 5k + 2, \ldots 6k + 1$.

  Der Fall $6k + 1 = 13$ liefert $k = 2$ und die Lösungs-Konfiguration

$$\text{A: } (1, 1, 1, 3, 3, 3) \qquad \text{B}: (1, 2, 5, 6, 9, 10)$$

- Auch im verbleibenden Fall $k = 1$ gibt es eine eindeutige Lösung: Dann erhält man zu den bereits bestimmten b-Werten $b_1 = 1$, $b_2 = b_{k+1} = 2k+1 = 3$, $b_3 = b_{2k+1} = 4k+1 = 5$ die mit den a-Werten 1 und $1 + k = 2$ die $2 \cdot 3 = 6$ Summenwerte $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $3 + 1 = 4$, $3 + 2 = 5$ und $5 + 1 = 6$, $5 + 2 = 7$.
  Da mit jedem weiteren b-Wert zwei Summenwerte dazukommen, benötigt man für die insgesamt 12 Summenwerte von $2, \ldots, 13$ genau drei weitere b-Werte. Diese ergeben sich analog zu obiger Argumentation eindeutig als $b_4 = b_{3k+1} = 6k + 1 = 7$, $b_5 = b_{4k+1} = 8k + 1 = 9$ und $b_6 = b_{5k+1} = 10k + 1 = 11$. Mit den a-Werten 1 und 2 erhält man hiermit die verbleibenden Summenwerte $7 + 1 = 8$, $7 + 2 = 9, \ldots, 11 + 1 = 12$, $11 + 2 = 13$. Der Fall $k = 1$ liefert also die Lösungs-Konfiguration

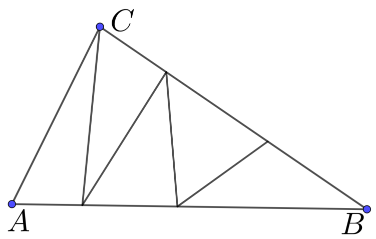
$$\text{A: } (1, 1, 1, 2, 2, 2) \qquad \text{B}: (1, 3, 5, 7, 9, 11)$$

Bemerkung:

Die vier erhaltenen Lösungskonfigurationen gehören genau zu den vier positiven Teilern der Zahl 6: $k \in \{1; 2; 3; 6\}$. Die zwölf Summenwerte $2, \ldots, 13$ müssen gemäß obiger Konstruktion durch ein Vielfaches von $2 \cdot k$ Summenwerten erzeugt werden. $2 \cdot k$ muss also 12 teilen, das heißt k muss ein Teiler der Zahl 6 sein.

Aufgabe 6

Wir betrachten Dreiecke ABC, die wie in der Abbildung mittels einer Zickzacklinie in fünf Teildreiecke mit gleichen Flächeninhalten zerlegt sind, und die folgende Eigenschaft besitzen:
Diejenigen Seiten der Teildreiecke, welche auf den Geraden AB, BC oder CA liegen, haben ganzzahlige Längen. Bestimme den kleinstmöglichen Umfang, den ein solches Dreieck ABC haben kann.

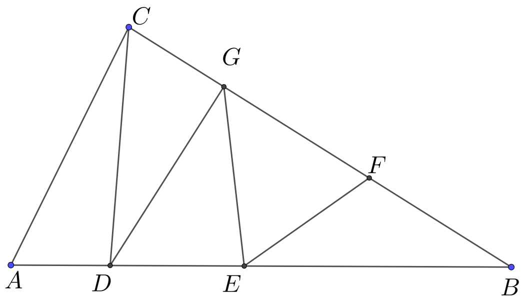


Lösung:

Der kleinstmögliche Umfang hat den Wert 31.

1. Beweis :

Wir bezeichnen die Punkte wie in der nebenstehenden Skizze. Des Weiteren seien die nach Voraussetzung ganzzahligen Seitenlängen des Dreiecks ABC wie üblich mit $a = |\overline{BC}|$, $b = |\overline{AC}|$ und $c = |\overline{AB}|$ bezeichnet.
Alle fünf kleinen Teildreiecke ADC, DGC, DEG, EFG und EBF haben den gleichen Flächeninhalt, d.h. $\frac{1}{5}$ des Flächeninhalts von Dreieck ABC.



Wir nutzen die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$ und berechnen so die Längen der Teilabschnitte der Seiten c und a.

(1) Die Dreiecke ADC und ABC haben die gleiche Höhe auf den Grundseiten $\overline{AD}$ bzw. $\overline{AB}$. Der Flächeninhalt von Dreieck ADC ist gleich $\frac{1}{5}$ des Flächeninhalts von Dreieck ABC, was wegen der identischen Höhen äquivalent ist zu $|\overline{AD}| = \frac{1}{5} \cdot |\overline{AB}| = \frac{1}{5} \cdot c$.

(2) Die Dreiecke DGC und DBC haben die gleiche Höhe auf den Grundseiten $\overline{GC}$ bzw. $\overline{BC}$. Der Flächeninhalt von Dreieck DGC ist gleich $\frac{1}{4}$ des Flächeninhalts von Dreieck DBC, was wegen der identischen Höhen äquivalent ist zu $|\overline{GC}| = \frac{1}{4} \cdot |\overline{BC}| = \frac{1}{4} \cdot a$.

(3) Wegen (1) ist $|\overline{DB}| = c - |\overline{AD}| = \frac{4}{5} \cdot c$. Die Dreiecke DEG und DBG haben die gleiche Höhe auf den Grundseiten $\overline{DE}$ bzw. $\overline{DB}$. Der Flächeninhalt von Dreieck DEG ist gleich $\frac{1}{3}$ des Flächeninhalts von Dreieck DBG, was wegen der identischen Höhen äquivalent ist zu $|\overline{DE}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{DB}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot c = \frac{4}{15} \cdot c$.

(4) Wegen (2) ist $|\overline{BG}| = a - |\overline{GC}| = \frac{3}{4} \cdot a$. Die Dreiecke EBF und EBG haben die gleiche Höhe auf den Grundseiten $\overline{BF}$ bzw. $\overline{BG}$. Der Flächeninhalt von Dreieck EBF isthalb so groß wie der Flächeninhalts von Dreieck EBG, was wegen der identischen Höhen äquivalent ist zu $|\overline{BF}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{BG}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot a = \frac{3}{8} \cdot a$.

(5) Zusammengefasst können die Längen aller sechs Abschnitte der Seiten a und c angegeben werden:

$$\left|\overline{AD}\right| = \frac{1}{5}\cdot c \quad , \quad \left|\overline{DE}\right| = \frac{4}{15}\cdot c \quad , \quad \left|\overline{EB}\right| = c - \frac{1}{5}\cdot c - \frac{4}{15}\cdot c = \frac{8}{15}\cdot c,$$
$$\left|\overline{CG}\right| = \frac{1}{4}\cdot a \quad , \quad \left|\overline{BF}\right| = \frac{3}{8}\cdot a \quad , \quad \left|\overline{FG}\right| = a - \frac{1}{4}\cdot a - \frac{3}{8}\cdot a = \frac{3}{8}\cdot a\,.$$

Unsere Überlegungen zeigen, dass die Flächeninhalte der 5 Teildreiecke genau dann gleich groß sind, wenn die Teilstrecken die angegebenen Längen haben.

Damit alle geforderten Strecken ganzzahlige Längen haben, muss die Länge c durch 15 teilbar ($\overline{DE} = \frac{4}{15}c$) und die Länge a durch 8 teilbar ($\overline{BF} = \frac{3}{8}a$) sein. Umgekehrt sind dann auch alle geforderten Streckenlängen ganzzahlig.
Eine Möglichkeit ist die Wahl $c = 15$ und $a = 8$. Wegen der Dreiecksungleichung $a + b > c$ muss dann $b > 7$ sein. Da b ganzzahlig sein soll, bleibt nur $b \geq 8$. In diesem Fall ist der Umfang also mindestens $15+8+8 = 31$. Für den minimalen Umfang haben die Teilstrecken dann die ganzzahligen Längen $\left|\overline{AD}\right| = 3, \left|\overline{DE}\right| = 4, \left|\overline{EB}\right| = 8, \left|\overline{CG}\right| = 2, \left|\overline{BF}\right| = 3, \left|\overline{FG}\right| = 3, \left|\overline{AC}\right| = 8$.
Bleibt zu zeigen, dass ein kleinerer Umfang nicht möglich ist.
Wie gezeigt, muss c durch 15 teilbar sein. Angenommen c wäre größer als 15, dann müsste c wenigstens 30 sein. Da a und b beide positiv sein müssen, wäre in diesem Fall der Umfang mindestens $32 = 30 + 1 + 1$ und damit größer als 31. Also muss $c = 15$ gelten.
Die Länge a muss durch 8 teilbar sein. Angenommen a ist größer als 8, dann muss a wenigstens 16 sein. Da b positiv ist, wäre in diesem Fall der Umfang ebenfalls wenigstens $32 = 15 + 16 + 1$ und damit größer als 31.
Wir haben also gezeigt, dass der Umfang mindestens den Wert 31 annimmt und in diesem Fall alle geforderten Strecken ganzzahlige Länge haben.