24. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Lösungsbeispiele für die

Aufgaben der 2. Runde 2021/2022

Aufgabe 1

Konstantin betrachtet 2021*-stellige positive ganze Zahlen. Dabei bildet er von diesen Zahlen jeweils die Quersumme, anschließend die Quersumme dieser Quersumme und zu guter Letzt schreibt er dann die Quersumme dieser Quersumme der Quersumme auf. Bestimme die größte Zahl, die er auf diese Weise aufschreiben kann, und die kleinste* 2021*-stellige Zahl, die dazu führt.*

Lösung:

Die größte Zahl, die Konstantin aufschreiben kann, ist die 11 und die kleinste 2021-stellige Zahl, die zu ihr führt, ist

$$N = 1\,\underbrace{00\ldots00}_{1686\,\text{Nullen}}\,1\,\underbrace{99\ldots99}_{333\,\text{Neunen}}$$

Beweis:

Mit $Q(n)$ wird die Quersumme der natürlichen Zahl n bezeichnet. Dann genügt es, folgende drei Aussagen zu zeigen:

(A) Für alle 2021-stelligen Zahlen n ist $Q(Q(Q(n))) \leq 11$.

(B) Die Zahl N ist 2021-stellig und es ist $Q(Q(Q(N))) = 11$

(C) Für alle 2021-stelligen Zahlen $N' < N$ ist $Q(Q(Q(N'))) < 11$.

Zu (A): Für jede 2021-stellige Zahl n ist, weil jede Ziffer höchstens 9 sein kann, $Q(n) \leq 2021 \cdot 9 = 18189$. Für die Zahl $Q(n)$ gibt es nun zwei Fälle:
Ist $Q(n)$ fünfstellig, so ist die Zehntausenderziffer gleich 1, die Tausenderziffer höchstens 8 und die übrigen drei Ziffern höchstens 9. Demnach ist $Q(Q(n)) \leq 1 + 8 + 9 + 9 + 9 = 36$.
Ist $Q(n)$ hingegen höchstens vierstellig, so gilt ebenso $Q(Q(n)) \leq 4 \cdot 9 = 36$.
Die Zahl $Q(Q(n))$ ist also eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 36$. Die größte vorkommende Quersumme bei diesen Zahlen ist die $11 = 2 + 9$ als Quersumme von 29; eine größere Quersumme wäre nur bei einer größeren Zehnerziffer, also 3, möglich. Hier ist die größte Quersumme aber nur $3 + 6 = 9$. Also ist $Q(Q(Q(n))) \leq 11$.

Zu (B): Die Zahl N hat $1 + 1686 + 1 + 333 = 2021$ Stellen (im Dezimalsystem) und es ist

$$Q(Q(Q(N))) = Q(Q(1 + 1 + 333 \cdot 9)) = Q(Q(2999)) = Q(2 + 9 + 9 + 9) = Q(29) = 11.$$

Zu (C): Sei N' eine 2021-stellige Zahl, die kleiner als N ist. Wir betrachten die von links gezählt erste Stelle, an der sich die Ziffern von N und N' unterscheiden. Dort muss die

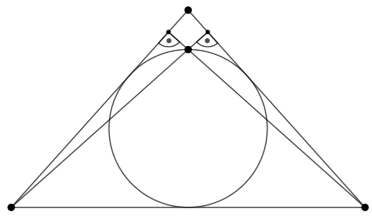
Ziffer von N' kleiner sein, als die von N, was offenbar nur an einer der letzten 334 Stellen von N der Fall sein kann.
Wäre es die Stelle mit der Ziffer 1, so wäre die zugehörige Ziffer in N' notwendigerweise die 0 und die folgenden 333 Ziffern wären alle höchstens gleich 9. Die übrigen Ziffern von N' entsprechen denen in N, so dass $Q(N') \leq 1 + 333 \cdot 9 = 2998$ folgt.
Wäre es eine der übrigen 333 Stellen, an der in N eine 9 steht, dann ist die entsprechende Ziffer in N' höchstens 8 und alle anderen der letzten 333 Ziffern von N' sind höchstens 9. Die übrigen Ziffern von N' entsprechen wieder denen von N, so dass auch hier $Q(N') \leq 1 + 1 + 8 + 332 \cdot 9 = 2998$ folgt.
Die Zahl $Q(N')$ kann nun entweder vierstellig sein, wobei wegen $Q(N') \leq 2998$ die erste Ziffer höchstens gleich 2 und nicht alle drei weiteren Ziffern gleich 9 sein können, so dass $Q(Q(N')) < 2 + 9 + 9 + 9 = 29$, also $Q(Q(N')) \leq 28$ folgt oder aber die Zahl $Q(N')$ ist höchstens dreistellig und es folgt $Q(Q(N')) \leq 3 \cdot 9 = 27$.
In jedem Fall wäre also $Q(Q(N')) \leq 28$. Weil keine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 28$ eine Quersumme hat, die größer als 10 ist, ist $Q(Q(Q(N'))) < 11$. Das war zu zeigen.

Bemerkung:

Bei der Suche nach der kleinsten 2021-stelligen Zahl N, für die $Q(Q(Q(N))) = 11$ ist, kann nicht ohne Weiteres davon ausgegangen werden, dass N genau dann minimal ist, wenn auch $Q(Q(N))$ den kleinstmöglichen Wert 29 und auch $Q(N)$ den hierbei kleinstmöglichen Wert 2999 annimmt. Für die Quersummenfunktion gilt nämlich nicht, dass aus $Q(a) > Q(b)$ immer $a > b$ folgt; die Quersummenfunktion ist nicht monoton. Daher muss bei einem solchen Vorgehen begründet werden, warum nicht beispielsweise $Q(N) = 3899$ für das kleinstmögliche N gelten kann.

Aufgabe 2

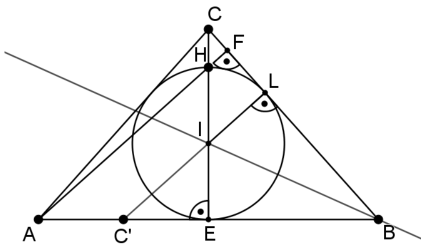
In einem gleichschenkligen Dreieck liegt der Höhenschnittpunkt auf dem Inkreis. Bestimme das Verhältnis der Schenkellänge zur Basislänge.



Lösung:

Das Verhältnis von Schenkellänge zur Basislänge beträgt $3:4$.

1. Beweis (mit Eigenschaften der Spiegelung):



Wie in nebenstehender Abbildung werden die Ecken des Dreiecks mit A, B und C so bezeichnet, dass $\overline{AB}$ die Basis ist. Weiter sind I der Mittelpunkt des Inkreises, E bzw. F die Fußpunkte der Höhen durch C bzw. A und L der Lotfußpunkt von I auf $\overline{BC}$. E ist dabei aus Symmetriegründen Mittelpunkt der Basis und L ist der Berührpunkt des Inkreises mit der Dreiecksseite $\overline{BC}$.

Weil im gleichschenkligen Dreieck $\overline{CE}$ sowohl Höhe als auch Winkelhalbierende ist, liegen H und I auf der Strecke $\overline{CE}$ und E ist gleichzeitig der Berührpunkt des Inkreises mit der Basis $\overline{AB}$.

Bei der Achsenspiegelung an der Winkelhalbierenden BI des Innenwinkels bei B wird der Inkreis auf sich selbst und die beiden Schenkel des Winkels BC und BA aufeinander abgebildet. Daher wird der Berührpunkt L auf den Berührpunkt E abgebildet. Der Bildpunkt C' von C bei dieser Achsenspiegelung liegt auf AB und weil CE senkrecht auf der Gerade AB steht, steht dabei auch $C'L$ als Spiegelbild von CE senkrecht auf der Gerade CB, dem Spiegelbild der Gerade AB. Die Geraden $C'L$ und AF stehen demnach beide senkrecht auf BC, sie sind also parallel. Das bedeutet aber, dass die Strecken $\overline{AH}$ und $\overline{C'I}$ parallel sind. Weil I der Mittelpunkt des Durchmessers $\overline{HE}$ des Inkreises ist, ist $\overline{IC'}$ Mittelparallele im Dreieck AEH, weswegen C' der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AE}$ ist.[1] Weil L im Inneren der Strecke $\overline{CB}$ liegt, liegt auch E im Inneren der Strecke $\overline{C'B}$, so dass schließlich folgt:

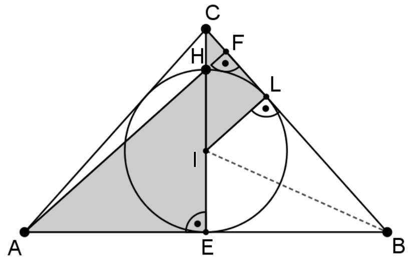
$$|\overline{CB}| = |\overline{C'B}| = |\overline{C'E}| + |\overline{EB}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AE}| + |\overline{EB}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| + \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| = \frac{3}{4} \cdot |\overline{AB}|.$$

Das war zu zeigen.

[1] Dies folgt auch mit Hilfe des Strahlensatzes.

2. Beweis (mit ähnlichen Dreiecken):

Wie im 1. Beweis werden die Bezeichnungen entsprechend nebenstehender Abbildung eingeführt und weil im gleichschenkligen Dreieck die Höhe $\overline{CE}$ auf der Winkelhalbierenden liegt, liegen H und I auf der Strecke $\overline{CE}$ und E ist gleichzeitig der Berührpunkt des Inkreises mit der Basis $\overline{AB}$.



Weil die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{IL}$ beide senkrecht auf $\overline{BC}$ stehen, sind sie parallel zueinander. Die Winkel $\angle AHE$ und $\angle LIC$ sind demnach gleich große Wechselwinkel. Da die Dreiecke AEH und ILC außer in diesem Winkel auch noch in einem rechten Winkel übereinstimmen, sind sie ähnlich zueinander. Das bedeutet aber, dass

$$\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{HE}|} = \frac{|\overline{CL}|}{|\overline{IL}|} \qquad (1)$$

ist. Weil $\overline{HE}$ ein Durchmesser des Inkreises ist, folgt $|\overline{HE}| = 2 \cdot |\overline{IL}|$ (2). Weiterhin sind $\overline{BL}$ und $\overline{BE}$ Tangentenabschnitte vom Punkt B an den Inkreis und daher gleich lang.[2] Weil aus Symmetriegründen E Mittelpunkt der Basis $\overline{AB}$ ist, ist $|\overline{AE}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}|$ (3) und auch $|\overline{CL}| = |\overline{CB}| - |\overline{BL}| = |\overline{CB}| - |\overline{BE}| = |\overline{CB}| - \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}|$ (4). In der letzten Gleichungskette wurde benutzt, dass L als Berührpunkt des Inkreises auf der Strecke $\overline{BC}$ und nicht etwa nur auf deren Verlängerung liegt.
Setzt man (2), (3) und (4) in (1) ein, so ergibt sich:

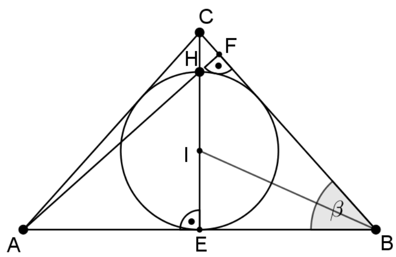
$$\frac{\frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}|}{2 \cdot |\overline{IL}|} = \frac{|\overline{CB}| - \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}|}{|\overline{IL}|}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $4 \cdot |\overline{IL}|$, so erhält man $|\overline{AB}| = 4 \cdot |\overline{CB}| - 2 \cdot |\overline{AB}|$. Addition von $2 \cdot |\overline{AB}|$ und anschließende Division durch $4 \cdot |\overline{AB}|$ liefert schließlich $\frac{3}{4} = \frac{|\overline{CB}|}{|\overline{AB}|}$. Das war zu zeigen.

3. Beweis (mit Trigonometrie):

Wie im ersten Beweis sieht man, dass E Mittelpunkt der Basis $\overline{AB}$ und $\overline{EH}$ Durchmesser des Inkreises des Dreiecks ist. Bezeichnet man den Basiswinkel des Dreiecks bei B mit β, dann halbiert IB diesen Winkel, so dass $\angle IBE = \frac{1}{2} \cdot \beta$ ist. Deswegen folgt im rechtwinkligen Dreieck EBI:

$$\tan\left(\frac{1}{2} \cdot \beta\right) = \frac{|\overline{IE}|}{|\overline{EB}|}. \qquad (1)$$



[2] Dies darf als bekannte Tatsache verwendet werden. Alternativ folgt diese Gleichheit aus der Kongruenz der Dreiecke BLI und BEI, die beide einen rechten Innenwinkel, eine gemeinsame Hypotenuse $\overline{IB}$ und Katheten $\overline{IE}$ bzw. $\overline{IL}$ besitzen, die Radien des Inkreises und daher gleich lang sind (Kongruenzsatz SsW).

Aufgrund der Innenwinkelsumme im rechtwinkligen Dreieck ABF ist $\angle EAH = \angle BAF = 90° - \beta$. Daher ergibt sich im rechtwinkligen Dreieck AEH:

$$\tan(90° - \beta) = \frac{|\overline{HE}|}{|\overline{AE}|}. \qquad (2)$$

Weil der Druchmesser $\overline{HE}$ doppelt so lang wie der Radius $\overline{IE}$ und weil $|\overline{EB}| = |\overline{AE}|$ ist, folgt aus (1) und (2):

$$\tan(90° - \beta) = 2 \cdot \tan\left(\frac{1}{2} \cdot \beta\right)$$

Vereinfacht man beide Seiten, indem man den Tangens durch Sinus und Kosinus ersetzt und auf der linken Seite für den Sinus die Doppelwinkelbeziehung $\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$ benutzt, so folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(90° - \beta)}{\cos(90° - \beta)} &= 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \beta\right)}{\cos\left(\frac{1}{2} \cdot \beta\right)} \\
\frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} &= 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \beta\right)}{\cos\left(\frac{1}{2} \cdot \beta\right)} \\
\frac{\cos(\beta)}{2\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \beta\right)\cos\left(\frac{1}{2} \cdot \beta\right)} &= 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \beta\right)}{\cos\left(\frac{1}{2} \cdot \beta\right)}.
\end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit den von Null verschiedenen Nennern ergibt sich daraus

$$\cos(\beta) = 4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \beta\right)^2.$$

Nutzt man hier schließlich rechts die Doppelwinkelbeziehung für den Kosinus $\cos(2\varphi) = 1 - 2(\sin(\varphi))^2$ in der Form $2\left(\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \beta\right)\right)^2 = 1 - \cos(\beta)$, dann folgt:

$$\cos(\beta) = 2 \cdot (1 - \cos(\beta)), \quad \text{also} \quad \cos(\beta) = \frac{2}{3}.$$

Im Dreieck EBC gilt demnach $\cos(\beta) = \frac{|\overline{EB}|}{|\overline{BC}|} = \frac{2}{3}$. Das Verhältnis von Schenkellänge zu Basislänge im Dreieck ABC ist dann $\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{EB}|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

Aufgabe 3

Für eine positive ganze Zahl n wird mit $\overline{nnn}$ diejenige Zahl bezeichnet, die entsteht, wenn man n dreimal hintereinanderschreibt. (Beispiel: Für $n = 49$ ist $\overline{nnn} = 494949$.) Sophie nennt eine positive ganze Zahl n außergewöhnlich, wenn gilt: $\overline{nnn}$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von $1 + 2 + \ldots + n$.

a) *Bestimme alle vierstelligen außergewöhnlichen Zahlen.*

b) *Beweise, dass es unendlich viele außergewöhnliche Zahlen gibt.*

Lösung:

a) Wenn n eine vierstellige Zahl ist, dann ist $\overline{nnn} = n + 10^4 \cdot n + 10^8 \cdot n$. Die Zahl n ist also genau dann außergewöhnlich, wenn es eine positive ganze Zahl k so gibt, dass

$$(1 + 10^4 + 10^8) \cdot n = k \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = k \cdot \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$$

gilt, wobei die Gaußsche Summenformel angewandt wurde. Das wiederum ist gleichbedeutend mit $2 \cdot (1 + 10^4 + 10^8) = k \cdot (n + 1)$, weswegen ein solches k genau dann existiert, wenn $n + 1$ ein Teiler der Zahl

$$\begin{aligned} 2 \cdot (1 + 10^4 + 10^8) &= 2 \cdot ((10^4 + 1)^2 - 10^4) = 2 \cdot (10^4 + 1 - 10^2)(10^4 + 1 + 10^2) \\ &= 2 \cdot (10^4 + 1 - 10^2)((10^2 + 1)^2 - 10^2) \\ &= 2 \cdot (10^4 + 1 - 10^2)(10^2 + 1 - 10)(10^2 + 1 + 10) \\ &= 2 \cdot 9901 \cdot 91 \cdot 111 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 9901. \qquad (*) \end{aligned}$$

ist. Letzteres ist die Primfaktorzerlegung der genannten Zahl. Dass hierbei 9901 wirklich prim ist, sieht man wie folgt: Wäre die Zahl 9901 nicht prim, dann hätte sie einen kleinsten echten Primteiler p, für den wegen $100^2 > 9901$ die Abschätzung $2 \le p \le 100$ gelten müsste. 9901 ist aber durch keine der 25 Primzahlen $2, 3, 5, 7, \ldots, 97$ zwischen 1 und 100 ohne Rest teilbar.[3] $n + 1$ ist demnach ein Produkt eines Teils der Primfaktoren in (*), so dass n vierstellig ist. Enthält $n + 1$ den Primfaktor 9901, dann kann es keinen weiteren Faktor enthalten, denn ansonsten wäre n nicht vierstellig. Enthält $n + 1$ den Primfaktor 9901 nicht, dann muss es den Primfaktor 37 enthalten, weil das Produkt aller anderen Primfaktoren $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 = 546$ nicht vierstellig ist und demnach auch kein Teilprodukt dieser Faktoren. Neben der 37 muss $n + 1$ noch weitere Primfaktoren enthalten, deren Produkt mindestens $1000 \div 37 > 27$, also mindestens gleich 28 ist. Die folgende Tabelle fasst die Ergebnisse dieser Überlegungen zusammen, wobei nur die Fälle aufgeführt sind, die zu vierstelligen n führen:

[3] Dies wiederum sieht man entweder durch explizite Division von 9901 durch jede der genannten Primteiler mit Rest oder etwas schneller auch an den folgenden Darstellungen, bei denen 9901 als Summe zweier Zahlen dargestellt ist, bei denen jeweils nur einer der beiden Summanden durch eine der 25 zu betrachtenden Primzahlen (fettgedruckt) teilbar ist: $9901 = \mathbf{2}^2 \cdot \mathbf{3}^2 \cdot \mathbf{5}^2 \cdot \mathbf{11} + 1 = 2^3 \cdot 5 \cdot \mathbf{13} \cdot \mathbf{19} + 21 = \mathbf{7} \cdot \mathbf{17} \cdot \mathbf{83} + 24 = 2 \cdot 5 \cdot \mathbf{23} \cdot \mathbf{43} + 11 = 11 \cdot \mathbf{29} \cdot \mathbf{31} + 12 = 3 \cdot \mathbf{37} \cdot \mathbf{89} + 22 = \mathbf{41} \cdot 241 + 20 = 2^2 \cdot \mathbf{47} \cdot \mathbf{53} + 37 = \mathbf{59} \cdot \mathbf{79} + 579 = 2 \cdot \mathbf{67} \cdot \mathbf{73} + 119 = 102 \cdot \mathbf{97} + 7 = 139 \cdot \mathbf{71} + 32 = 162 \cdot \mathbf{61} + 19.$

Primfaktorzerlegung von $n+1$	Ergebnis für n
9901	9900
$37 \cdot 13 \cdot 3 = 1443$	1442
$37 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 3 = 2886$	2885
$37 \cdot 13 \cdot 7 = 3367$	3366
$37 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 7 = 6734$	6733
$37 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 1554$	1553

Da obige Teilerbedingung für $n+1$ zusammen mit der Vierstelligkeit von n äquivalent zur Bedingung der Aufgabe war, sind genau die Zahlen $1442, 1553, 2885, 3366, 6733$ und 9900 außergewöhnlich und vierstellig.

b) Für alle positiven ganzen Zahlen k ist die Zahl

$$A_k = 10^{2k} - 10^k = \underbrace{99\ldots9}_{k \text{ Neunen}}\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ Nullen}}$$

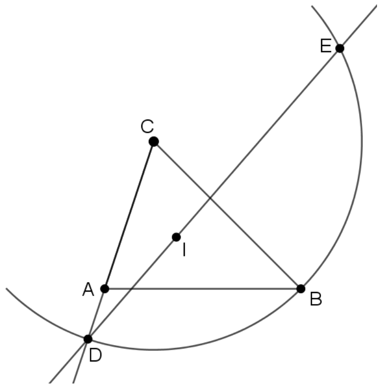
$2k$-stellig. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{A_k A_k A_k} &= 10^{4k} \cdot A_k + 10^{2k} \cdot A_k + A_k = (10^{4k} + 10^{2k} + 1) \cdot A_k \\
&= ((10^{2k} + 1)^2 - 10^{2k}) \cdot A_k \\
&= (10^{2k} + 1 + 10^k)(10^{2k} + 1 - 10^k) \cdot A_k \\
&= (10^{2k} + 1 + 10^k) \cdot (A_k + 1) \cdot A_k \\
&= 2 \cdot (10^{2k} + 1 + 10^k) \cdot \frac{1}{2} \cdot (A_k + 1) \cdot A_k \\
&= 2 \cdot (10^{2k} + 1 + 10^k) \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots A_k).
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde dabei wieder die Gaußsche Summenformel benutzt. Somit ist für die unendlich vielen Zahlen A_k mit $k = 1, 2, 3, \ldots$ die Zahl $\overline{A_k A_k A_k}$ ein Vielfaches von $1 + 2 + 3 + \ldots A_k$. Es gibt daher unendlich viele außergewöhnliche Zahlen.

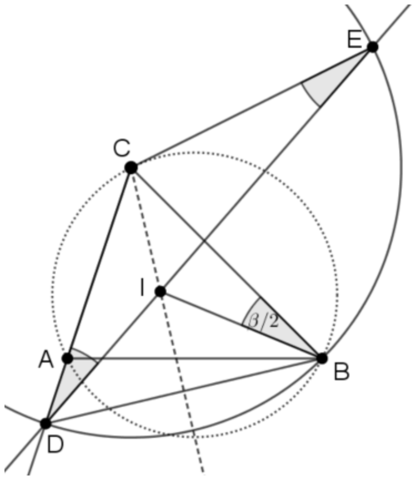
Aufgabe 4

Im spitzwinkligen Dreieck ABC mit Inkreismittelpunkt I ist $\overline{AC} < \overline{BC}$. Der Kreis k mit Mittelpunkt C durch B schneidet die Halbgerade $[CA$ in D und die Gerade DI außer in D noch in E. Beweise: Die Gerade EC ist Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABC.



Beweis:

Die Innenwinkel des Dreiecks ABC seien wie üblich mit α, β und γ bezeichnet. Das Dreieck DBC ist aufgrund der Konstruktion gleichschenklig mit Basis $\overline{DB}$. Die Gerade CI halbiert den Innenwinkel bei C und ist daher im Dreieck DBC auch Symmetrieachse. Da $\angle CBI = \frac{1}{2}\beta$ ist, ist demnach auch $\angle IDC = \frac{1}{2}\beta$. Weiter ist nach Konstruktion auch das Dreieck DEC gleichschenklig mit Basis $\overline{DE}$. Daher ist

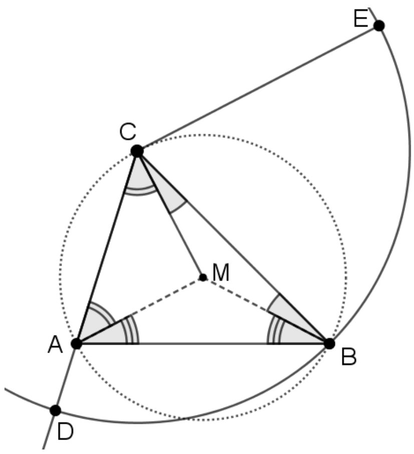


$$\angle DCE = 180° - 2 \cdot \frac{1}{2}\beta = 180° - \beta = \alpha + \gamma.$$

Weil $\angle DCB = \gamma$ ist, ist demnach $\angle BCE = \alpha$. Ab hier kann nun verschieden weiter argumentiert werden.

Variante 1: Ist M der Mittelpunkt des Umkreises des spitzwinkligen Dreiecks ABC, so haben die Dreiecke ABM, BCM und CAM jeweils zwei Radien des Umkreises als Seiten, sind also gleichschenklig.

Daraus folgt für die Innenwinkel dieser Dreiecke: $\angle MCB = \angle CBM$, $\angle MAC = \angle ACM$ und $\angle BAM = \angle MBA$. Die Summe aller sechs genannten Winkel ist die Innenwinkelsumme von Dreieck ABC, also 180°. Also ist $\angle MCB + \angle BAM + \angle MAC = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Weil aber $\angle BAM + \angle MAC = \angle BAC = \alpha$ ist, ergibt sich $\angle MCB = 90° - \alpha$ und deswegen $\angle MCE = \angle MCB + \angle BCE = 90° - \alpha + \alpha = 90°$. Die Gerade EC steht also senkrecht auf dem Radius $\overline{MC}$ des Umkreises, ist also die Tangente an diesen im Punkt C.



Variante 2: Weil der Umfangswinkel über der Sehne $\overline{BC}$ im Umkreis des Dreiecks ABC auch gleich dem Innenwinkel bei A, also gleich α ist, ist nach der Umkehrung des Sehnen-Tangenten-Winkel-Satzes die Gerade CE Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABC im Berührpunkt C.