23. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Lösungsbeispiele für die

Aufgaben der 2. Runde 2020/2021

Aufgabe 1

Theo nennt eine positive gerade Zahl genial, *wenn sie folgende Eigenschaft besitzt:*
Egal wie er eine solche Zahl als Summe zweier positiver ungerader Zahlen schreibt, immer ist mindestens einer der beiden Summanden eine Primzahl.
Zeige, dass es eine größte geniale Zahl gibt, und bestimme diese.

Lösung:

Wir zeigen im Folgenden die beiden Aussagen:

(A) 38 ist genial.

(B) Jede gerade Zahl n, die größer als 38 ist, ist nicht genial.

Wegen (A) und (B) folgt dann, dass es eine größte geniale Zahl gibt und diese gleich 38 ist.

1. Beweis (Fallunterscheidung nach Resten bei Division durch 3):

Zunächst der Beweis von (A):
Die Zahl 38 kann auf folgende Arten als Summe von zwei ungeraden Zahlen geschrieben werden:

$$38 = \mathbf{37} + 1 = 35 + \mathbf{3} = 33 + \mathbf{5} = \mathbf{31} + 7 = \mathbf{29} + 9 = 27 + \mathbf{11} = 25 + \mathbf{13} = \mathbf{23} + 15 = 21 + \mathbf{17} = \mathbf{19} + 19$$

In jeder Summe ist mindestens ein Summand eine Primzahl. Also ist 38 eine geniale Zahl.

Nun zum Beweis von (B):
Sei $n > 38$ eine gerade natürliche Zahl. Man unterscheidet drei Fälle:
Fall 1: n ist durch 3 teilbar.
Dann ist $a = n - 9$ ebenfalls durch 3 teilbar. Da $n > 38$ ist $a > 3$. Somit ist a keine Primzahl. Außerdem ist $a = n - 9$ ungerade, denn n ist gerade und 9 ist ungerade. Man hat die Summenzerlegung $n = a + 9$, bei der weder 9 noch a eine Primzahl ist. Also ist n nicht genial.
Fall 2: $n - 1$ ist durch 3 teilbar.
Dann ist $a = n - 1$ eine durch 3 teilbare ungerade Zahl mit $a > 3$. Somit ist a keine Primzahl. Man hat die Summenzerlegung $n = a + 1$, bei der weder 1 noch a eine Primzahl ist. Also ist n nicht genial.
Fall 3: $n - 2$ ist durch 3 teilbar.

Dann ist $a = n - 35$ ebenfalls eine durch 3 teilbare Zahl, denn $a = (n - 2) - 33$ und sowohl $n - 2$ also auch 33 sind durch 3 teilbar. Da $n > 38$ ist, gilt $a = n - 35 > 3$. Somit ist die durch 3 teilbare Zahl a keine Primzahl. Da n gerade ist und 35 ungerade, ist $a = n - 35$ ungerade. Man hat in diesem Fall die Summenzerlegung $n = a + 35$, bei der weder 35 noch a eine Primzahl ist. Also ist n nicht genial.

Für jede natürliche Zahl n ist entweder n oder $n - 1$ oder $n - 2$ durch 3 teilbar. Die drei Fälle decken also alle Möglichkeiten ab. Somit ist jede gerade natürliche Zahl $n > 38$ nicht genial. Das ist der Beweis von (B).

Bemerkung 1:

Eine gerade Zahl ist genau dann genial, wenn sie *nicht* als Summe zweier ungerader Nicht-Primzahlen darstellbar ist. Für Teil (A) genügt es daher festzustellen, dass einer der beiden Summanden einer solchen Summe höchstens gleich 19 sein könnte und daher eine der drei kleinsten ungeraden Nicht-Primzahlen $1, 9, 15$ sein müsste. Weil aber $38-1 = 37$, $38-9 = 29$ und $38 - 15 = 23$ alles Primzahlen sind, ist (A) bewiesen.

Bemerkung 2:

Teil (B) des Beweises kann variiert werden, indem man statt den Zahlen 1, 9 und 35, die man von n subtrahiert, jedes andere Tripel (a, b, c) ungerader Nicht-Primzahlen nutzt, bei dem jeder Rest $\bmod 3$ vorkommt. Solch ein Tripel ist beispielsweise $(15, 25, 35)$, wobei man hier wegen der Endziffer 5 sofort erkennt, dass diese Zahlen durch 5 teilbar, also Nicht-Primzahlen sind. Auch $(91, 93, 95)$ ist möglich: Die jeweils zweiten Summanden sind dann die drei aufeinander folgenden ungeraden Zahlen $n - 95$, $n - 93$ und $n - 91$; unter drei solchen Zahlen ist sicher eine durch 3 teilbar und für $n > 98$ sind auch alle Summanden größer als 3. Hier muss dann noch nachgewiesen werden, dass keine gerade Zahl im Intervall $[40, 98]$ genial ist.
Anstatt drei Zahlen mit allen Resten $\bmod 3$ können wir auch fünf ungerade Nicht-Primzahlen mit allen Resten $\bmod 5$ verwenden. Diese Reste sind leicht an den Einerziffern ablesbar, die kleinsten Zahlen, die sich hier eignen, sind $1, 9, 15, 27$ und 33. Diese werden in folgender Beweisvariante genutzt.

2. Beweis (Fallunterscheidung nach der Einerziffer, also nach Resten mod 10**):**

Teil (A) wird wie im ersten Beweisvorschlag bewiesen.

Zu (B):

Sei n eine gerade natürliche Zahl mit $n > 38$. Dann hat n entweder die Einerziffer 0 oder 2 oder 4 oder 6 oder 8.

Fall 1: n hat die Einerziffer 0.
Dann hat $a = n - 25$ die Einerziffer 5, ist also durch 5 teilbar. Da $n > 38$ ist, ist $a = n - 25 > 5$. Somit ist a keine Primzahl. Außerdem ist a ungerade. Man hat in diesem Fall die Summenzerlegung $n = a + 25$, bei der weder 25 noch a eine Primzahl ist. Also ist n nicht genial.

Fall 2: n hat die Einerziffer 2.
Dann hat $a = n - 27$ die Einerziffer 5, ist also durch 5 teilbar. Da $n > 38$ ist, ist $a =$

$n-27>5$. Somit ist a keine Primzahl. Außerdem ist a ungerade. Man hat in diesem Fall die Summenzerlegung $n=a+27$, bei der weder 27 noch a eine Primzahl ist. Also ist n nicht genial.

Fall 3: n hat die Einerziffer 4.
Dann hat $a=n-9$ die Einerziffer 5, ist also durch 5 teilbar. Da $n>38$ ist, ist $a=n-9>5$. Somit ist a keine Primzahl. Außerdem ist a ungerade. Man hat in diesem Fall die Summenzerlegung $n=a+9$, bei der weder 9 noch a eine Primzahl ist. Also ist n nicht genial.

Fall 4: n hat die Einerziffer 6.
Dann hat $a=n-1$ die Einerziffer 5, ist also durch 5 teilbar. Da $n>38$ ist, ist $a=n-1>5$. Somit ist a keine Primzahl. Außerdem ist a ungerade. Man hat in diesem Fall die Summenzerlegung $n=a+1$, bei der weder 1 noch a eine Primzahl ist. Also ist n nicht genial.

Fall 5: n hat die Einerziffer 8.
Dann hat $a=n-33$ die Einerziffer 5, ist also durch 5 teilbar. Da $n>38$ ist, ist $a=n-33>5$. Somit ist a keine Primzahl. Außerdem ist a ungerade. Man hat in diesem Fall die Summenzerlegung $n=a+33$, bei der weder 33 noch a eine Primzahl ist. Also ist n nicht genial.

Durch die fünf Fälle sind alle Möglichkeiten der Einerziffer einer geraden Zahl abgedeckt. Alle geraden Zahlen $n>38$ sind also nicht genial. Das war für (B) zu zeigen.

3. Beweis (Reste bei Division durch 6):

Teil (A) wird wie im ersten Beweisvorschlag bewiesen.

Zu (B):

Sei n eine gerade Zahl mit $n>38$. Dann ist entweder n oder $n-2$ oder $n-4$ gerade und durch 3 teilbar, also durch 6 teilbar.

Fall 1: n ist durch 6 teilbar.
Dann ist $n\geq 42$ und $n-42$ durch 6 teilbar, also $a=\frac{n-42}{6}$ eine nicht negative ganze Zahl. Dann ist aber auch $n=42+6\cdot a=33+3\cdot(3+2a)$ eine Summenzerlegung von n in zwei ungerade Zahlen, die beide keine Primzahlen sind. Also ist n nicht genial.

Fall 2: $n-2$ ist durch 6 teilbar.
Dann ist $n\geq 44$ und $n-44$ durch 6 teilbar, somit $a=\frac{n-44}{6}$ eine nicht negative ganze Zahl. Dann ist aber auch $n=44+6\cdot a=35+3\cdot(3+2a)$ eine Summenzerlegung von n in zwei ungerade Zahlen, die beide keine Primzahlen sind. Also ist n nicht genial.

Fall 3: $n-4$ ist durch 6 teilbar.
Dann ist $n\geq 40$ und $n-40$ durch 6 teilbar, somit $a=\frac{n-40}{6}$ eine nicht negative ganze Zahl. Dann ist aber auch $n=40+6\cdot a=25+3\cdot(5+2a)$ eine Summenzerlegung von n in zwei ungerade Zahlen, die beide keine Primzahlen sind. Also ist n nicht genial.

In allen drei Fällen ist die gerade Zahl $n>38$ nicht genial, also ist (B) bewiesen.

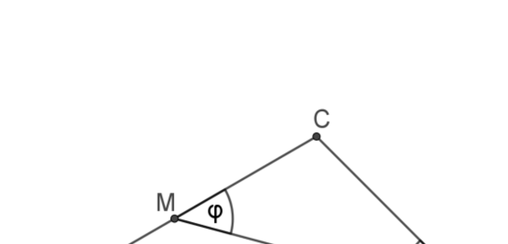
Bemerkung 3:

Einen Teilbeweis zu (B) erhält man auch mit folgender Überlegung: Jede gerade Zahl n kann ohne Beachtung der Reihenfolge auf genau $\lceil\frac{1}{4}n\rceil$ ($\frac{1}{4}n$ „aufgerundet") verschiedene Arten als Summe von zwei ungeraden Zahlen dargestellt werden. Wenn es nun in der Menge $\{1,2,3,\ldots,n\}$ weniger als $\lceil\frac{1}{4}n\rceil$ ungerade Primzahlen gibt, dann gibt es sicher eine

solche Summe, in der beide Summanden keine Primzahlen sind; damit ist n sicher nicht genial.
Man kann also versuchen, die Anzahl der ungeraden Primzahlen in der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ abzuschätzen. Ein tiefliegender mathematischer Satz ist der sogenannte *Primzahlsatz*. Er besagt, dass es in der betrachteten Menge für große Werte von n ungefähr $\frac{1}{\ln(n)} \cdot n$ Primzahlen gibt. Dabei ist $\ln(n)$ der natürliche Logarithmus von n, also der Logarithmus zur Basis $e \approx 2,71828...$, die auch *Eulersche Zahl* genannt wird. Für $n \geq e^4 \approx 55$ ergäbe sich mit dieser Formel ein Anteil von weniger als $\frac{1}{4}$ an Primzahlen in der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, so dass gerade Zahlen $n \geq 56$ nicht genial sein könnten; für größerer n würde sich der mit der Formel berechnete Anteil $\frac{1}{\ln(n)}$ sogar immer weiter verringern. ABER es handelt sich bei dem Primzahlsatz „nur“ um die Angabe der ungefähren Größenordnung des Anteils der Primzzahlen an allen Zahlen bis zu einer Schranke n und diese gilt auch nur für „genügend große“ n. Es ist auch nicht der Fall, dass der Anteil der Primzahlen in der betrachteten Menge bei größeren Werten von n immer kleiner wird. Beispielsweise ist der Anteil der Primzahlen für $n = 100$ genau 25%, für $n = 101$ ist der Anteil aber größer, nämlich ca. 25,7%. Die Aussage, dass gerade Zahlen $n \geq 56$ nicht genial sein können, wurde hiermit also nicht bewiesen sondern bestenfalls plausibel gemacht. Tatsächlich gibt es zwischen 1 und 56 auch 16 Primzahlen, davon 15 ungerade, was einem Anteil von etwas mehr als einem Viertel entspricht.
Eine exakte Abschätzung der Anzahl der ungeraden Primzahlen in der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ gelingt aber folgendermaßen:
Im Intervall $[1, 100]$ gibt es genau 24 ungerade Primzahlen, und in den Intervallen $[10k, 10k + 100]$ mit $k \geq 2$ gibt es nie mehr als 23 ungerade Primzahlen. Die letzte Aussage war Inhalt der 4. Aufgabe der 2. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 2019 und ihr Beweis kann beispielsweise unter `https://www.mathe-wettbewerbe.de/bwm/` nachgelesen werden. Also gibt es im Intervall $[1, (k+1) \cdot 100]$ höchstens $1 \cdot 24 + k \cdot 23 = (k+1) \cdot 23 + 1$ ungerade Primzahlen. Wir betrachten eine Zahl n im Intervall $[k \cdot 100, (k+1) \cdot 100]$. Wir können gröber abschätzen, dass es zu n höchstens $(k+1) \cdot 23 + 1$ ungerade Primzahlen gibt, die kleiner als n sind. Weil für $k \geq 13$ gilt: $(k+1) \cdot 23 + 1 < (k+1) \cdot 23 + 1 + 2(k-12) = 25k \leq \frac{1}{4}n$, sind für $n \geq 13 \cdot 100 = 1300$ in jedem Fall weniger als ein Viertel der Zahlen in der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ungerade Primzahlen, so dass n nicht genial sein kann. Die geraden Zahlen zwischen 38 und 1300 müssten nun aber noch auf andere Art als nicht genial nachgewiesen werden.

Aufgabe 2

In einem Dreieck ABC gilt $\angle BAC = 30°$ und $\angle CBA = 45°$. M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$. Bestimme die Größe φ des Winkels $\angle BMC$.

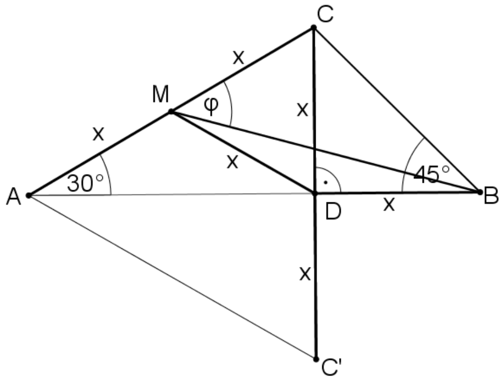


Lösung:

Es gilt: $\varphi = 45°$.

1. Beweis (mit Spiegelung und gleichseitigen Dreiecken):

Zunächst wird der Punkt C an $\overline{AB}$ gespiegelt. Für den Bildpunkt C' ist D der Schnittpunkt von $\overline{CC'}$ mit $\overline{AB}$.
Behauptung: Das Dreieck MDB ist gleichschenklig.
Beweis der Behauptung: Aus den Eigenschaften einer Geradenspiegelung ergeben sich:



1) $\angle ACC' = \angle CC'A$

2) $\angle DAC = \angle C'AD$

3) D ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CC'}$.

4) $\angle CDA = 90°$

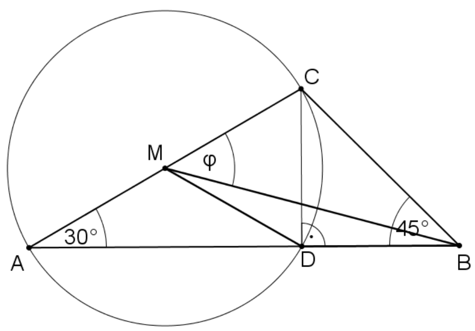
Aus 2) folgt $\angle C'AC = 60°$. Mit dem Winkelsummensatz für Dreiecke ergibt sich aus 1) $\angle ACC' = \angle CC'A = \frac{1}{2}\cdot(180° - \angle C'AC) = 60°$. Das Dreieck $AC'C$ ist also gleichseitig. Nach 3) ist $|\overline{DC}| = \frac{1}{2}\cdot|\overline{C'C}| = \frac{1}{2}\cdot|\overline{AC}| = |\overline{MC}| := x$. Das Dreieck DCM ist also gleichschenklig mit dem Innenwinkel $\angle MCD = 60°$. Somit ist es ebenfalls gleichseitig und $|\overline{MD}| = |\overline{DC}| = x$. Außerdem ist das Dreieck BCD gleichschenklig-rechtwinklig, denn nach 4) ist $\angle BDC = 90°$ und nach Aufgabenstellung ist $\angle CBD = 45°$. Somit $|\overline{DB}| = |\overline{DC}| = x$. Es folgt also $|\overline{MD}| = |\overline{DB}|$. Somit ist das Dreieck MDB gleichschenklig und die Behauptung ist bewiesen.
Nun zurück zum Beweis der Aufgabe. Es ist $\angle BDM = 90° + 60° = 150°$. Nach dem Winkelsummensatz im gleichschenkligen Dreieck MDB ist $\angle DMB = \frac{1}{2}\cdot(180° - 150°) = 15°$. Somit ist $\varphi = \angle DMC - \angle DMB = 60° - 15° = 45°$. Das war zu zeigen.

Bemerkung:

Im 1. Beweisvorschlag ergab sich der Punkt D als Lotfußpunkt von C auf $\overline{AB}$ und es wurde die Behauptung bewiesen, dass das Dreieck MDB gleichschenklig ist. Diese Behauptung war der Kern des Beweises. Es gibt mehrere Varianten diese Behauptung zu beweisen, es werden hierzu drei Varianten dargestellt.

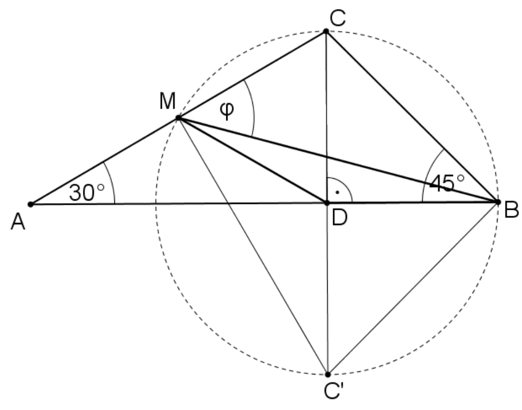
Variante 1:

Da $\angle CDA = 90°$, liegt D nach dem Umkehrung des Satzes des Thales auf dem Kreis über dem Durchmesser $\overline{AC}$. Der Punkt M ist Mittelpunkt dieses Thaleskreises. Somit gilt: $|\overline{MD}| = |\overline{MC}| = |\overline{AM}|$. Das Dreieck MDC ist also ein gleichschenkliges Dreieck mit Basiswinkel $\angle MCD = \angle ACD = 180° - 90° - 30° = 60°$. Somit ist dieses Dreieck MDC gleichseitig und es ist $|\overline{DC}| = |\overline{MD}|$ (*).



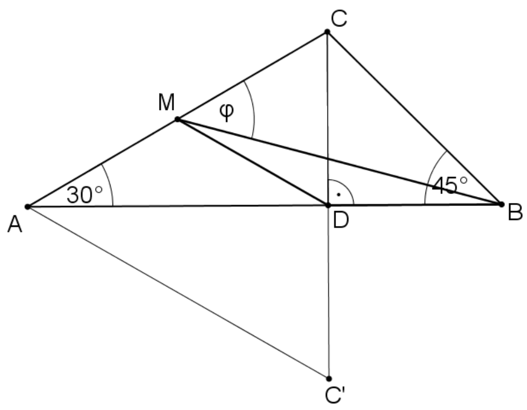
Außerdem ist das Dreieck BCD gleichschenklig-rechtwinklig, denn $\angle BDC = 90°$ und $\angle DCB = 45°$. Somit ist $|\overline{DB}| = |\overline{DC}|$ und wegen (*) daher $|\overline{DB}| = |\overline{MD}|$. Also ist das Dreieck MDB gleichschenklig und die Behauptung ist bewiesen.

Variante 2:



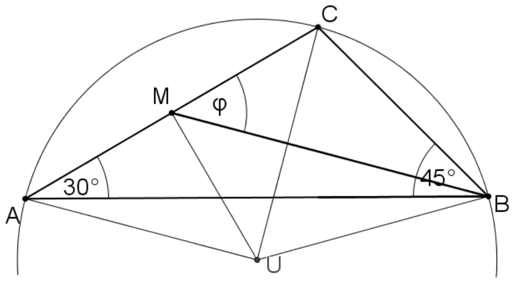
Wie in 1. Beweis wird C an AB gespiegelt und gezeigt, dass das Dreieck $AC'C$ gleichseitig ist.
Im gleichseitigen Dreieck $AC'C$ ist $\overline{MC'}$ eine Seitenhalbierende, also auch Mittelsenkrechte. Deshalb gilt $\angle C'MC = 90°$. Außerdem folgt aus den Eigenschaften der Spiegelung, dass $\angle CBC' = 2 \cdot \angle CBD = 2 \cdot 45° = 90°$ ist. Nach der Umkehrung des Satzes des Thales liegen daher die Punkte M und B auf einem Kreis um den Mittelpunkt D der Strecke $\overline{CC'}$. Daraus folgt $|\overline{DB}| = |\overline{MD}|$. Folglich ist das Dreieck MDB gleichschenklig. Somit ist die Behauptung bewiesen.
Bei dieser Variante kann φ wie im ersten Beweisvorschlag oder alternativ auch mit Hilfe des Umfangswinkelsatzes bestimmt werden:
Das Dreieck BCC' ist gleichschenklig-rechtwinklig, d.h. $\angle BC'C = 45°$. Nach dem Satz vom Umfangswinkel sind die Umfangswinkel $\angle BC'C$ und φ über der Sehne $\overline{BC}$ gleich groß, d.h. $\varphi = \angle BC'C = 45°$.

Variante 3:



Wie in 1. Beweis wird C an AB gespiegelt und gezeigt, dass das Dreieck $AC'C$ gleichseitig ist. Die Strecke $\overline{MD}$ verbindet die Mittelpunkte M und D der Dreiecksseiten $\overline{AC}$ und $\overline{CC'}$ des Dreiecks $AC'C$. Nach dem Satz über die Mittelparallele im Dreieck ist $\overline{MD}$ parallel zur und halb so lang wie die Seite $\overline{AC'}$, also $|\overline{MD}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC'}| = \frac{1}{2}|\overline{C'C}| = |\overline{DC}|$. Wie in Variante 1 sieht man, dass das Dreieck DBC gleichschenklig-rechtwinklig ist, so dass $|\overline{DB}| = |\overline{DC}| = |\overline{DM}|$ folgt. Das Dreieck MDB ist demnach gleichschenklig.

2. Beweis (mit Umfangswinkelsatz):

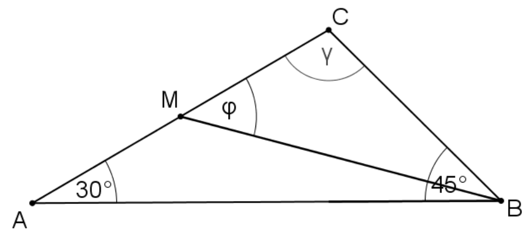


In der Abbildung ist der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ABC eingezeichnet.
Zunächst wird gezeigt, dass die Dreiecke UBM und BCM kongruent sind. Nach dem Satz vom Mittelpunktswinkel gilt über der Sehne $\overline{AC}$: $\angle CUA = 2 \cdot \angle CBA = 2 \cdot 45° = 90°$. Somit ist das Dreieck UCA gleichschenklig-rechtwinklig, insbesondere gilt also $\angle ACU = 45°$.

Die Seitenhalbierende $\overline{MU}$ steht senkrecht auf der Basis $\overline{AC}$ des gleichschenkligen Dreiecks UCA, weswegen $\angle UMC = 90°$ (1) ist. Damit folgt $\angle CUM = 180° - \angle UMC - \angle MCU = 180° - 90° - 45° = 45°$. Das Dreieck UCM ist demnach auch gleichschenklig-rechtwinklig, und es gilt $|\overline{UM}| = |\overline{CM}|$ (2).
Mit dem Satz vom Mittelpunktswinkel, diesmal über der Sehne $\overline{BC}$, folgt $\angle BUC = 2 \cdot \angle BAC = 2 \cdot 30° = 60°$. Also ist das Dreieck UBC gleichseitig, und es gilt $|\overline{BU}| = |\overline{BC}|$ (3).
Wegen (2), (3) und der gemeinsamen Seite $\overline{MB}$ sind die Dreiecke UBM und BCM nun aufgrund des Kongruenzsatzes sss kongruent.
Aus der Kongruenz und wegen (1) folgt: $\varphi = \frac{1}{2} \cdot \angle UMC = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$.

3. Beweis (mit Sinussatz und Ähnlichkeit):

Die beiden Dreiecke ABC und MBC sind ähnlich, denn sie stimmen in dem gemeinsamen Innenwinkel $\angle ACB = \angle MCB = \gamma$ und dem Seitenverhältnis der beiden anliegenden Seiten überein (Ähnlichkeitssatz s:w:s):

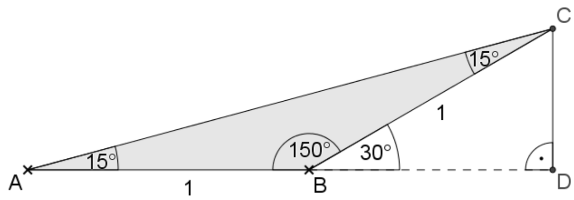


$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} = \frac{\sin(45°)}{\sin(30°)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{MC}|} = \frac{|\overline{BC}|}{\frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}|} = 2 \cdot \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Daher ist $\varphi = \angle CBA = 45°$.

4. Beweis (Rechnen im Koordinatensystem):

Der in der Lösung benötigte exakte Wert von $\tan(15°)$ wird zunächst mit Hilfe nebenstehender Abbildung bestimmt. In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit Schenkellänge 1 und Basiswinkel 15° ist die Höhe $\overline{CD}$ auf die Verlängerung der Seite $\overline{AB}$ gezeichnet.

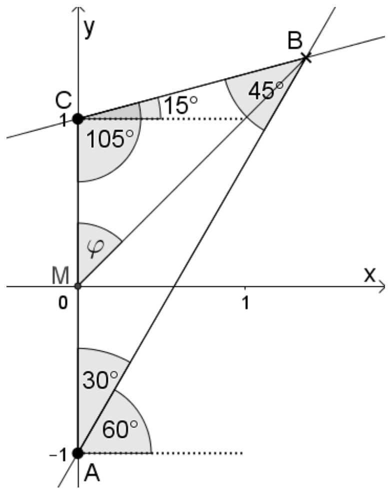


Es ergeben sich die eingezeichneten Winkelgrößen und es ist $|\overline{CD}| = \sin(30°) = \frac{1}{2}$ und $|\overline{BD}| = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Damit ergibt sich

$$\tan(15°) = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AD}|} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - \sqrt{3}^2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Nun zur eigentlichen Aufgabe: Wir legen die Figur so in ein Koordinatensystem, dass M im Urspsrung liegt, $A(0|-1)$ und $C(0|1)$ ist. Dann hat die Gerade AB den Steigungswinkel $90° - 30° = 60°$ und daher die Gleichung $AB : y = \tan(60°) \cdot x - 1 = \sqrt{3} \cdot x - 1$.

Mit dem Satz von der Innenwinkelsumme im Dreieck ABC ist $\angle ACB = 180° - 45° - 30° = 105°$. Daher hat die Gerade CB im Koordinatensystem den Steigungswinkel $105° - 90° = 15°$ und die Gleichung $CB : y = \tan(15°) \cdot x + 1 = (2 - \sqrt{3}) \cdot x + 1$. Der Punkt $B(x_B|y_B)$ ist dabei Schnittpunkt der beiden Geraden AB und CB, also ist



$$\sqrt{3} \cdot x_B - 1 = (2 - \sqrt{3}) \cdot x_B + 1 \iff x_B = \frac{1}{\sqrt{3} - 1}.$$

Setzt man dies in die Gleichung von AB ein, so folgt: $y_B = \sqrt{3} \cdot x_B - 1 = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}-1} - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$. Also ist $x_B = y_B$ weswegen B auf der Winkelhalbierenden des I. Quadranten liegt.

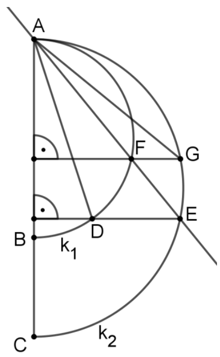
Daher ist $\varphi = 45°$.

Bemerkung:

Im 4. Beweis ist wichtig, dass mit exakten Werten für die Koordinaten von B gerechnet wird. Mit einer Angabe als Dezimalzahl, die in jedem Fall gerundet sein müsste, kann der nötigen Beweis der Gleichheit der beiden Koordinaten von B nicht erbracht werden.

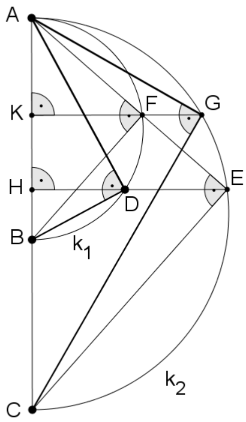
Aufgabe 3

Gegeben sind drei verschiedene Punkte A, B und C, die in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen. Auf derselben Seite bezüglich AC werden die Halbkreise k_1 und k_2 über den Strecken $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AC}$ betrachtet. Für einen beliebigen von A und B verschiedenen Punkt D auf k_1 schneidet die Lotgerade zu AC durch D den Halbkreis k_2 im Punkt E. Die Gerade AE schneidet k_1 im von A verschiedenen Punkt F und die Lotgerade zu AC durch F schneidet k_2 im Punkt G. Zeige, dass dann die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{AG}$ gleich lang sind.



1. Beweis:

Sei H der Schnittpunkt der Lotgeraden zu AC durch D mit AC. Analog sei K der Schnittpunkt der Lotgeraden zu AC durch F mit AC.
Nach dem Satz des Thales sind die Dreiecke ABF und ACE rechtwinklig. Die Stufenwinkel $\angle AFB$ und $\angle AEC$ an der Geraden AE haben die gleiche Größe (nämlich 90°). Somit sind $\overline{BF}$ und $\overline{CE}$ parallel.
Nach dem 1. Strahlensatz mit Zentrum A folgt



$$\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AF}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|}$$

Die Lotgeraden auf AC sind ebenfalls parallel. Nach dem 1. Strahlensatz mit Zentrum A

folgt

$$\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AF}|} = \frac{|\overline{AH}|}{|\overline{AK}|}.$$

Zusammen ergibt sich also

$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{AH}|}{|\overline{AK}|} \quad oder \quad |\overline{AC}| \cdot |\overline{AK}| = |\overline{AH}| \cdot |\overline{AB}|.$$

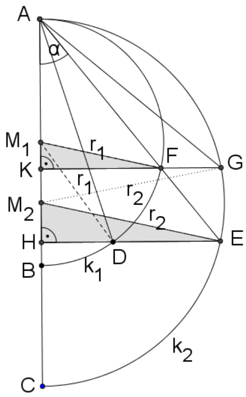
Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck ABD rechtwinklig. Nach dem Kathetensatz gilt $|\overline{AD}|^2 = |\overline{AH}| \cdot |\overline{AB}|$. Analog gilt im rechtwinkligen Dreieck ACG: $|\overline{AG}|^2 = |\overline{AC}| \cdot |\overline{AK}|$. Aus $|\overline{AC}| \cdot |\overline{AK}| = |\overline{AH}| \cdot |\overline{AB}|$ folgt nun $|\overline{AG}|^2 = |\overline{AD}|^2$. Somit gilt $|\overline{AG}| = |\overline{AD}|$. Das war zu beweisen.

Variante:

Auch ohne Kathetensatz folgt in obigem Bild, dass die beiden Dreiecke AHD und ABD in zwei Winkeln übereinstimmen, nämlich dem Innenwinkel bei A und dem rechten Winkel bei D bzw. H. Die beiden Dreiecke sind also ähnlich, weswegen insbesondere $\frac{|\overline{AH}|}{|\overline{AD}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AB}|}$ folgt. Daher ist $|\overline{AD}|^2 = |\overline{AH}| \cdot |\overline{AB}|$. Analog begründet man $|\overline{AG}|^2 = |\overline{AC}| \cdot |\overline{AK}|$. Damit kann der Beweis wie oben zu Ende geführt werden.

2. Beweis (skizziert):

Wie im 1. Beweis werden H und K definiert. Zusätzlich seien M_1 und M_2 bzw. r_1 und r_2 die Mittelpunkte bzw. Radien der Kreise k_1 bzw. k_2.
Wir untersuchen nur den *1. Fall*, dass K auf der Strecke $\overline{M_1M_2}$ liegt, aber von M_1 und M_2 verschieden ist. Die übrigen Lagefälle für K (*Fall 2:* K liegt auf $\overline{AM_1}$ ist aber von M_1 verschieden; *Fall 3:* $K = M_1$, *Fall 4:* $K = M_2$, *Fall 5:* K liegt auf $\overline{M_2B}$, ist aber von M_2 verschieden) können in ähnlicher Weise behandelt werden.



Dann gilt $\angle M_1AF = \angle M_2AE = \alpha$ und weil $|\overline{M_1A}| = |\overline{M_1F}|$ und $|\overline{M_2A}| = |\overline{M_2E}|$ ist, sind die Dreiecke M_1FE und M_2EA gleichschenklig mit $\angle FM_1A = \angle EM_2A = 180° - 2 \cdot \alpha$ (1). Weil außerdem $\angle M_1KF = \angle M_2HE = 90°$ ist, sind die beiden Dreiecke M_1FK und M_2EH ähnlich. Daher ist $\frac{|\overline{M_1K}|}{r_1} = \frac{|\overline{M_2H}|}{r_2} =: k$, bzw. $|\overline{M_1K}| = k \cdot r_1$ und $|\overline{M_2H}| = k \cdot r_2$. Folglich ist auch $|\overline{AH}| = r_2 + |\overline{M_2H}| = r_2 + k \cdot r_2 = r_2 \cdot (1+k)$ und $|\overline{M_1H}| = |\overline{AH}| - r_1 = r_2 \cdot (1+k) - r_1$. Im rechtwinkligen Dreieck HDM_1 ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras:

$$|\overline{HD}|^2 = |\overline{M_1D}|^2 - |\overline{M_1H}|^2 = r_1^2 - (r_2 \cdot (1+k) - r_1)^2.$$

Im rechtwinkligen Dreieck ADH ergibt sich dann wieder mit dem Satz des Pythagoras:

$$|\overline{AD}|^2 = |\overline{AH}|^2 + |\overline{HD}|^2 = r_2^2(1+k)^2 + r_1^2 - (r_2 \cdot (1+k) - r_1)^2 = 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot (1+k). \quad (1)$$

Ähnlich geht man zur Berechnung von $|\overline{AG}|^2$ vor: Es ist $|\overline{AK}| = r_1 \cdot (1+k)$ und damit $|\overline{M_2K}| = r_2 - r_1 \cdot (1+k)$. Dann folgt mit dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen

Dreieck KM_2G:

$$|\overline{KG}|^2 = |\overline{M_2G}|^2 - |\overline{M_2K}|^2 = r_2^2 - (r_2 - r_1 \cdot (1+k))^2.$$

Schließlich ergibt sich wieder mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck AKG:

$$|\overline{AG}|^2 = |\overline{AK}|^2 + |\overline{KG}|^2 = (r_1 \cdot (1+k))^2 + r_2^2 - (r_2 - r_1 \cdot (1+k))^2 = 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot (1+k). \quad (2)$$

Mit (1) und (2) folgt $|\overline{AD}| = |\overline{AG}|$.

Aufgabe 4

Hans wirft fünf Spielwürfel und schreibt den Wert des Produktes der Augenzahlen auf. Bestimme, wie oft Hans mindestens würfeln muss, damit unter den aufgeschriebenen Zahlen ganz sicher zwei Zahlen sind, deren Produkt eine Quadratzahl ist.

Lösung:

Hans muss mindestens neunmal würfeln, damit unter seinen aufgeschrieben Zahlen sicher zwei Zahlen, deren Produkt eine Quadratzahl ist.

Beweis :

Zu beweisen sind die folgenden beiden Aussagen (A) und (B):

(A) Es ist möglich, dass Hans achtmal mit seinen fünf Würfeln würfelt, ohne dass unter den acht aufgeschriebenen Produkten zwei sind, deren Produkt eine Quadratzahl ist.

(B) Wenn Hans neunmal würfelt, so sind unter den neun aufgeschriebenen Zahlen auf jeden Fall zwei, deren Produkt eine Quadratzahl ist.

Beweis von (A):
Es ist möglich, dass Hans bei acht Würfen die folgenden Zahlen wirft:

Wurf	geworfene Zahlen	aufgeschriebene Zahl
1	1, 1, 1, 1, 1	1
2	2, 1, 1, 1, 1	2
3	3, 1, 1, 1, 1	3
4	5, 1, 1, 1, 1	5
5	2, 3, 1, 1, 1	6
6	2, 5, 1, 1, 1	10
7	3, 5, 1, 1, 1	15
8	2, 3, 5, 1, 1	30

Multipliziert man je zwei der acht aufgeschriebenen Zahlen, so ergeben sich die Produkte der folgenden Tabelle:

mal	1	2	3	5	6	10	15	30
1	-	2	3	5	6	10	15	30
2	2	-	6	10	12	20	30	60
3	3	6	-	15	18	30	45	90
5	5	10	15	-	30	50	75	150
6	6	12	18	30	-	60	90	180
10	10	20	30	50	60	-	150	300
15	15	30	45	75	90	150	-	450
30	30	60	90	150	180	300	450	-

In der Tabelle kommen keine Quadratzahlen vor, also ist (A) bewiesen.

Beweis von (B):

Bei den sechs Augenzahlen 1, 2, 3, …, 6 des Würfels treten nur die Primfaktoren 2, 3 und 5 auf. Somit treten auch bei den aufgeschriebenen Produkten von je fünf dieser Augenzahlen nur die Primfaktoren 2, 3 und 5 auf. Alle Zahlen, die Hans aufschreibt haben daher die Form $z = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ (wobei a, b, c positive ganze Zahlen oder auch, wenn der entsprechende Primfaktor nicht vorkommt, 0 sind).

Wenn die Zahlen $z_1 = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot 5^{c_1}$ und $z_2 = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{c_2}$ zwei aufgeschriebene Zahlen sind, so ist ihr Produkt $z_1 \cdot z_2 = 2^{a_1+a_2} \cdot 3^{b_1+b_2} \cdot 5^{c_1+c_2}$. Dieses Produkt ist genau dann eine Quadratzahl, wenn die Exponenten $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$ und $c_1 + c_2$ alle gerade sind, denn:

- Wenn die drei Exponenten gerade sind mit $a_1 + a_2 = 2k$, $b_1 + b_2 = 2m$ und $c_1 + c_2 = 2n$, so ist $z_1 \cdot z_2 = 2^{a_1+a_2} \cdot 3^{b_1+b_2} \cdot 5^{c_1+c_2} = 2^{2k} \cdot 3^{2m} \cdot 5^{2n} = (2^k \cdot 3^m \cdot 5^n)^2$ eine Quadratzahl.
- Wenn $z_1 \cdot z_2 = 2^{a_1+a_2} \cdot 3^{b_1+b_2} \cdot 5^{c_1+c_2} = q^2$ ist, so hat q aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktordarstellung nur die Primfaktoren $2, 3$ und 5, also $q = 2^k \cdot 3^m \cdot 5^n$. Aus $2^{a_1+a_2} \cdot 3^{b_1+b_2} \cdot 5^{c_1+c_2} = q^2 = 2^{2k} \cdot 3^{2m} \cdot 5^{2n}$ folgt wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung $a_1 + a_2 = 2k$, $b_1 + b_2 = 2m$ und $c_1 + c_2 = 2n$. Die Exponenten $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$ und $c_1 + c_2$ sind also alle gerade.

Die Summe $a_1 + a_2$ ist genau dann gerade, wenn entweder a_1 und a_2 beide gerade oder beide ungerade sind. In diesem Fall sagt man: a_1 und a_2 haben die gleiche Parität. Falls a_1 und a_2 nicht die gleiche Parität haben, also eine Zahl gerade und eine Zahl ungerade ist, so ist ihre Summe ungerade. Das Produkt von $z_1 = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot 5^{c_1}$ und $z_2 = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{c_2}$ ist also genau dann eine Quadratzahl, wenn sowohl a_1 und a_2 als auch b_1 und b_2 und auch die beiden Zahlen c_1 und c_2 gleiche Parität haben. Man muss also für den Beweis von (B) zeigen, dass nach spätestens neun Würfen zwei Zahlen vorkommen, bei denen die drei Exponenten paarweise die gleiche Parität haben. Dazu untersucht man, welche Verteilungen von ungeraden bzw. geraden Zahlen bei den drei Exponenten a, b und c in einer Zahl $z = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ möglich sind. Hierbei steht g für gerade, u für ungerade.

Möglichkeit	a	b	c
1	g	g	g
2	g	g	u
3	g	u	g
4	u	g	g
5	g	u	u
6	u	g	u
7	u	u	g
8	u	u	u

Tritt für eine gewürfelte Zahl $z = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ z.B. Möglichkeit 6 ein, so ist a ungerade, b gerade und c ungerade, also z.B. $z = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^3$. Insgesamt gibt es acht Möglichkeiten für die Verteilung von a, b und c auf gerade bzw. ungerade Zahlen. Bei neun Würfen kommt also nach dem Schubfachprinzip mindestens eine der Möglichkeiten doppelt vor. Es gibt also bei neun Zahlen der Form $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ auf jeden Fall zwei Zahlen $z_1 = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot 5^{c_1}$ und $z_2 = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{c_2}$ bei denen sowohl a_1, a_2 als auch b_1, b_2 und c_1, c_2 gleiche Parität haben. Daraus folgt, wie oben bewiesen wurde, dass $z_1 \cdot z_2$ eine Quadratzahl ist. Somit ist (B) bewiesen.