22. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Lösungsbeispiele für die

Aufgaben der 2. Runde 2019/2020

Aufgabe 1

Julia addiert mehrere ungerade Quadratzahlen, die nicht notwendigerweise verschieden sind. Sie erhält als Ergebnis wieder eine Quadratzahl, nämlich 19^2. Bestimme alle Möglichkeiten für die Anzahl der Summanden, die Julias Summe haben kann.

Lösung:

Die Anzahl der Summanden in Julias Summe kann jede Zahl m der Form $m = 8k + 1$ mit $1 \leq k \leq 45$ sein, also jede der Zahlen 9, 17, 25, ..., 353, 361. Andere Anzahlen sind nicht möglich.

1. Beweis:

Es muss gezeigt werden, dass

(A) jede in der Lösung genannte Zahl m eine mögliche Anzahl an Summanden ist und

(B) jede mögliche Anzahl m an Summanden von der genannten Art ist.

Zu (A): Für jedes $m = 8k + 1$ mit $5 \leq k \leq 45$ gilt:

$$\underbrace{1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}_{(9k-44)\text{ Summanden}} + \underbrace{3^2 + 3^2 + \ldots + 3^2}_{(45-k)\text{ Summanden}} = (9k - 44) \cdot 1 + (45 - k) \cdot 9 = 9k - 44 + 405 - 9k = 361.$$

Dabei besteht die linke Summe aus $(9k - 44) + (45 - k) = 8k + 1 = m > 1$ Summanden, die alle ungerade Quadratzahlen sind.
Für die übrigen vier Fälle $m = 8k + 1$ mit $1 \leq k \leq 4$ gilt:

$$\underbrace{1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}_{(9k-9)\text{ Summanden}} + \underbrace{3^2 + 3^2 + \ldots + 3^2}_{(9-k)\text{ Summanden}} + 17^2 = (9k-9)\cdot 1 + (9-k)\cdot 9 + 289 = 9k - 9 + 81 - 9k + 289 = 361,$$

wobei die Summe aus $(9k - 9) + (9 - k) + 1 = 8k + 1 = m > 1$ Summanden besteht, die alle ungerade Quadratzahlen sind.
Zu (B): Angenommen, die Zahl 361 kann für eine natürliche Zahl m der Aufgabenstellung entsprechend als Summe von m Summanden geschrieben werden, die alle ungerade Quadratzahlen sind. Dann ist zunächst $m > 1$, da es „mehrere“ Summanden sein sollen und es gibt nicht negative ganze Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_m$ so, dass

$$(2k_1 + 1)^2 + (2k_2 + 1)^2 + \ldots + (2k_m + 1)^2 = 361.$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man hieraus.

$$4k_1^2 + 4k_1 + 1 + 4k_2^2 + 4k_2 + 1 + \ldots + 4k_m^2 + 4k_m + 1 = 361$$

Subtrahiert man hier die m Summanden 1 und fasst auf der linken Seite zusammen, so ergibt sich:

$$4k_1(k_1+1)+4k_2(k_2+1)+\ldots+4k_m(k_m+1)=361-m.$$

Von den beiden aufeinanderfolgenden Zahlen k_1 und k_1+1 ist genau eine gerade, das Produkt $k_1(k_1+1)$ ist also durch 2 teilbar. Deswegen ist $4k_1(k_1+1)$ durch 8 teilbar. Gleiches gilt für jeden anderen Summanden auf der linken Seite der letzten Gleichung, so dass die gesamte Summe durch 8 teilbar sein muss. Es gibt also eine ganze Zahl $k' \geq 0$ so, dass

$$8k' = 361 - m \text{ bzw. } m = 361 - 8k' = 8\cdot(45-k')+1$$

gilt. Mit $k = 45 - k'$ ist demnach m von der Form $m = 8k+1$, wobei $k \geq 1$ (damit $m > 1$ ist) und $k \leq 45$ ist. Das war zu zeigen.

Bemerkung:

Für (A) gibt es ohne Beachtung der Reihenfolge der Summanden 2689 verschiedene Summendarstellungen, für Teil (B) werden im Folgenden zwei weitere Varianten vorgestellt.

2. Beweis ((B) mit Restebetrachtung):

Wie im 1. Beweis müssen zwei Teilaussagen bewiesen werde, wobei Teil (A) wie dort dargestellt behandelt wird.
Zu (B): Es wird zunächst folgende Hilfsaussage bewiesen:

(HA) Jede ungerade Quadratzahl u^2 lässt beim Teilen durch 8 den Rest 1, das heißt $u^2 \equiv 1 \mod 8$.

Beweis von (HA): Ist $u = 2n+1$ *eine ungerade Zahl, dann ist* $u^2 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 4n(n+1)+1$. *Weil* $n(n+1)$ *als Produkt zweier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen gerade ist, ist* $4n(n+1)$ *durch* 8 *teilbar. Daraus folgt die Behauptung.*

Sei nun 361 als Summe mehrerer ungerader Quadratzahlen u_1^2, u_2^2, $\ldots$, u_m^2 dargestellt. Dann gilt also $m > 1$ und bei Betrachtung der Reste modulo 8

$$361 = u_1^2+u_2^2+\ldots+u_m^2 \equiv 1+1+\ldots+1 = m \mod 8.$$

Somit gilt $m \equiv 361 = 8\cdot 45+1 \equiv 1 \mod 8$. Das bedeutet, $m = 8k+1$ mit einer ganzen Zahl $k \geq 1$. Wegen $361 = u_1^2+u_2^2+\ldots+u_m^2 \geq 1+1+\ldots+1 = m$, muss $8k+1 = m \leq 361$ sein. Daher ist $k \leq 45$ und (B) ist bewiesen.

2. Beweis ((B) mit Invarianzprinzip):

Wie im 1. Beweis müssen zwei Teilaussagen bewiesen werde, wobei Teil (A) wie dort dargestellt behandelt wird.
Zu (B): Angenommen für $m > 1$ ungerade Quadratzahlen u_1^2, u_2^2, $\ldots$, u_m^2 gilt

$$u_1^2+u_2^2+\ldots+u_m^2 = 361.$$

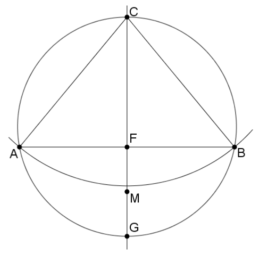
Solange es dabei einen Summanden gibt, der größer als 1 ist - dies sei o.B.d.A. u_m, kann man einer weitere derartige Summendarstellung mit mehr Summanden finden, nämlich mit $u_m \geq 3$

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{m-1}^2 + (u_m - 2)^2 + \underbrace{1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}_{4u_m - 4 \text{ Summanden}} = 361$$

Die Anzahl der Summanden erhöht sich dabei um $4u_m - 4 = 4(u_m - 1)$, also eine durch 8 teilbare Zahl, weil $u_m - 1$ gerade ist. Die neue Summandenanzahl lässt also beim Teilen durch 8 denselben Rest wie die alte Anzahl m. Dieser Ersetzungsprozess, bei dem schrittweise Darstellungen mit immer mehr Summanden entstehen, muss irgendwann enden, da es nicht mehr als 361 Summanden geben kann. Am Ende des Prozesses kann es keine Summanden größer als 1 mehr geben (sonst könnte man den Ersetzungsschritt nochmal ausführen), so dass die Darstellung $361 = 1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2$ mit 361 Summanden entstanden sein muss. Weil sich der Rest der Summandenanzahl beim Teilen durch 8 dabei nicht geändert hat, muss 361 denselben Rest beim Teilen durch 8 lassen, wie m. Wegen $361 = 8 \cdot 45 + 1$ ist also $m = 8k + 1$ mit einer Zahl $k \geq 1$. Dass $k \leq 45$ sein muss, folgt wieder aus $m \leq u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_m^2 = 361$.

Aufgabe 2

Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit Basis $[AB]$. Der Mittelpunkt der Seite $[AB]$ wird mit F bezeichnet. Die Gerade CF schneidet den Umkreis des Dreiecks ABC außer im Punkt C noch im Punkt G. Liegt der Mittelpunkt M der Strecke $[FG]$ stets außerhalb des Kreises um C durch A?



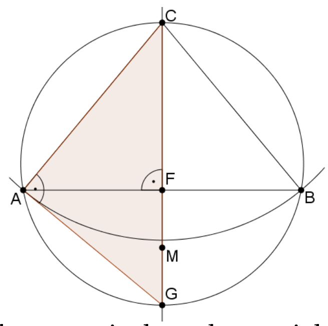
Lösung:

Ja, der Punkt M liegt in jedem Fall außerhalb des Kreises um C durch A.

1. Beweis (mit Kathetensatz und AM-GM-Ungleichung):

Das Dreieck AGC ist nach Satz des Thales rechtwinklig mit rechtem Winkel bei A. Die Seitenhalbierende CF steht im gleichschenkligen Dreieck ABC senkrecht auf der Basis $[AB]$. Daher ist $[AF]$ die Höhe auf der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck AGC. Nach Kathetensatz gilt in diesem Dreieck demnach:

$$\overline{AC}^2 = \overline{CF} \cdot \overline{CG} \qquad (1)$$



Für beliebige nicht negative reelle Zahlen a und b gilt die Ungleichung zwischen dem arithmetischen Mittel $\frac{a+b}{2}$ und dem geometrischen Mittel $\sqrt{ab}$ der beiden Zahlen:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \qquad (2)$$

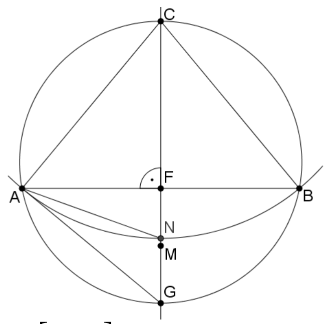
wobei Gleichheit nur für $a = b$ gilt. Zum Nachweis dieser Aussage kann man beispielsweise beide Seiten der Ungleichung mit 2 multiplizieren und anschließend quadrieren, was wegen der Positivität beider Seiten zur äquivalenten Ungleichung $4ab \leq (a+b)^2$ führt. Dies wiederum ist nach Ausmultiplizieren und Umordnen äquivalent zu $0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$,

was offensichtlich immer wahr ist und Gleichheit nur für $a = b$ eintritt.
Nutzt man nun (2) und beachtet, dass $\overline{CF} \neq \overline{CG}$ ist, so ergibt sich mit (1):

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CF} \cdot \overline{CG}} < \frac{\overline{CF} + \overline{CG}}{2} = \frac{\overline{CF} + \overline{CF} + \overline{FG}}{2} = \overline{CF} + \frac{\overline{FG}}{2} = \overline{CM}.$$

Daher ist die Entfernung von M zum Mittelpunkt C des betrachteten Kreises größer als sein Radius $\overline{AC}$ und deswegen liegt M immer außerhalb dieses Kreises.

2. Beweis (mit Satz über die Winkelhalbierende):



Sei N der Schnittpunkt des Kreises um C durch A mit der Strecke $[CG]$; wegen $\overline{AC} < \overline{CG}$ gibt es einen solchen immer. Wir beweisen zunächst, dass AN im Dreieck AGF die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei A ist.
Variante 1: Nach Umfangswinkelsatz gilt über der Sehne $[GB]$ im Umkreis von Dreieck ABC:

$$\angle GAF = \angle GAB = \angle GCB = \angle NCB.$$

Nach Umfangswinkel-Mittelpunktswinkelsatz gilt über der Sehne $[NB]$ im Kreis um C durch A:

$$\angle NCB = 2 \cdot \angle NAB = 2 \cdot \angle NAF.$$

Zusammen ergeben die letzten beiden Gleichungsketten $\angle GAF = 2 \cdot \angle NAF$, also die Behauptung.
Variante 2: Das Dreieck AGC ist nach Satz des Thales rechtwinklig und wird von der Höhe $[AF]$ (siehe 1. Beweis) in zwei zueinander ähnliche Dreiecke GFA und AFC geteilt (die Dreiecke haben je einen rechten Winkel und einen weiteren gemeinsamen Winkel mit Dreieck AGF, sind also beide zu diesem ähnlich). Insbesondere ist deswegen

$$\angle GAF = \angle ACF = 180° - 2 \cdot \angle NAC.$$

Letzteres folgt aus der Gleichschenkligkeit des Dreiecks ANC. Nutzt man nun, dass

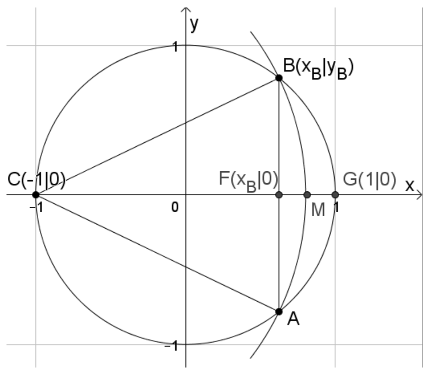
$$\angle NAC = \angle NAF + \angle FAC = \angle NAF + (90° - \angle ACF) = \angle NAF + 90° - \angle GAF$$

ist, dann folgt:

$$\angle GAF = 180° - 2 \cdot \angle NAC = 180° - 2 \cdot (\angle NAF + 90° - \angle GAF) = 2\angle GAF - 2\angle NAF,$$

bzw. $\angle GAF = 2 \cdot \angle NAF$, also die Behauptung.
Nach dem Satz über die Winkelhalbierende teilt jede Winkelhalbierende in einem Dreieck die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten. In unserem Fall ist im rechtwinkligen Dreieck AGF die Hypotenuse $[AG]$ länger als die Kathete $[AF]$, weswegen die Winkelhalbierende $[AN]$ die Gegenseite $[FG]$ so teilt, dass auch die Strecke $[GN]$ länger ist als die Strecke $[NF]$. Der Mittelpunkt M von $[FG]$ liegt also im Innern der Strecke $[GN]$ und damit außerhalb des Kreises um C durch A.

3. Beweis (mit Koordinatenrechnung):



Man führt wie in der Abbildung rechts dargestellt so ein Koordinatensystem ein, dass der Punkt C die Koordinaten $C(-1|0)$ hat, der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC der Koordinatenursprung ist und B in der oberen Halbebene liegt. Dann hat B Koordinaten $B(x_B|y_B)$ mit $-1 < x_B < 1$ und $y_B > 0$. Weil B auf dem Einheitskreis liegt, gilt also $y_B = \sqrt{1 - x_B^2}$. Außerdem hat, weil CF als Seitenhalbierende der Basis im gleichschenkligen Dreieck auch Symmetrieachse ist, F dieselbe x-Koordinate wie B und liegt auf der x-Achse, also $F(x_B|0)$.
Damit folgt für die Länge der Strecke $[CM]$:

$$\overline{CM} = \frac{1}{2}(\overline{CF} + \overline{CG}) = \frac{1}{2}((1 + x_B) + 2) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_B.$$

Für den Radius des Kreises um C durch A bzw. durch B folgt:

$$\overline{CB} = \sqrt{(x_B + 1)^2 + y_B^2} = \sqrt{(x_B + 1)^2 + (1 - x_B^2)} = \sqrt{2x_B + 2}.$$

Der Vergleich dieser beiden Längen gelingt durch äquivalentes Umformen der Ungleichung $\frac{1}{4}(x_B - 1)^2 > 0$, die im für x_B erlaubten Wertebereich stets gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}(x_B - 1)^2 > 0 &\iff \frac{1}{4}x_B^2 - \frac{1}{2}x_B + \frac{1}{4} > 0 \\
&\iff \frac{1}{4}x_B^2 + \frac{3}{2}x_B + \frac{9}{4} > 2x_B + 2 \\
&\iff (\frac{1}{2}x_B + \frac{3}{2})^2 > 2x_B + 2 \\
&\iff \frac{1}{2}x_B + \frac{3}{2} > \sqrt{2x_B + 2} \\
&\iff \overline{CM} > \overline{CA}.
\end{aligned}$$

Daher liegt M immer außerhalb des betrachteten Kreises.

Bemerkung:

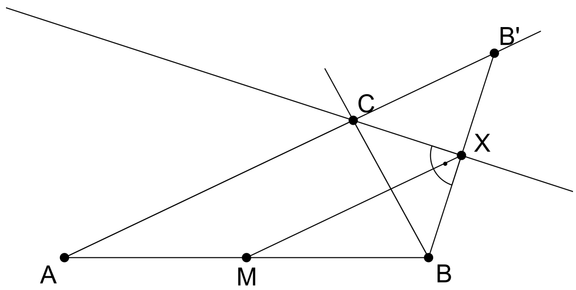
Im dritten Beweis kann die Lage von B auf dem Einheitskreis auch durch das Einführen des zugehörigen Mittelpunktswinkels $\alpha = \angle GOB$ als Variable mit zugehörigen Koordinaten $B(\cos\alpha|\sin\alpha)$ sichergestellt werden. Damit ist dann eine ähnliche Rechnung wie oben möglich.

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Mit X bezeichnen wir den Fußpunkt des Lotes von B auf die Außenwinkelhalbierende bei C. Nun wird der Punkt C so bewegt, dass der Umfang des Dreiecks ABC konstant bleibt. Beweise, dass sich der Punkt X dabei auf einem Kreis bewegt.

1. Beweis :

Sei M der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$ und sei B' der Bildpunkt von B bei Spiegelung an der betrachteten Außenwinkelhalbierenden. Weil die Winkelhalbierende Symmetrieachse der Schenkel des zugehörigen Winkels ist, liegt B' auf der Verlängerung von $[AC]$ über C hinaus und die Strecke $[BB']$ wird von der Außenwinkelhalbierenden senkrecht halbiert. Der zugehörige Mittelpunkt der Strecke $[BB']$ muss also der Lotfußpunkt X von B auf die Außenwinkelhalbierende sein.



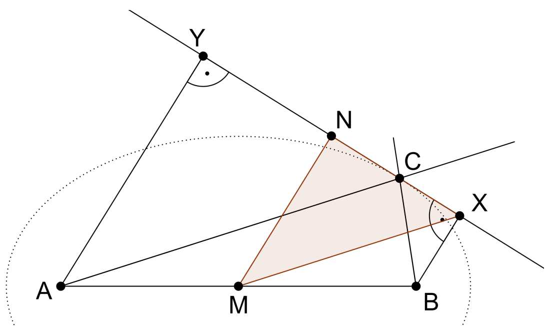
Der Punkt C wird nun so bewegt, dass der Umfang des Dreiecks ABC konstant ist. Weil sich $\overline{AB}$ nicht ändert, hat dabei dann auch $\overline{AC} + \overline{CB}$ einen konstanten Wert s. Aufgrund der Eigenschaften der Achsenspiegelung ist $\overline{CB'} = \overline{CB}$. Damit ist also $\overline{AB'} = \overline{AC} + \overline{CB'} = \overline{AC} + \overline{CB} = s$. Das bedeutet aber für die Länge der Mittelparallelen $[MX]$ im Dreieck ABB':

$$\overline{MX} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB'} = \frac{1}{2} \cdot s.$$

Der Punkt X hat also eine von der konkreten Lage von C unabhängige Entfernung $\frac{1}{2} \cdot s$ vom Punkt M. Der Punkt X bewegt sich also auf dem Kreis um M mit Radius $\frac{1}{2} \cdot s$. Das war zu zeigen.

2. Beweis (mit ähnlichen Dreiecken):

Sei zusätzlich Y der Lotfußpunkt von A auf die Außenwinkelhalbierende bei C und seien M und N die Mittelpunkte der Strecke $[AB]$ bzw. $[XY]$. Der Punkt C wird nun so bewegt, dass der Umfang des Dreiecks ABC konstant ist. Weil sich $\overline{AB}$ nicht ändert, hat dabei dann auch $\overline{AC} + \overline{BC}$ einen konstanten Wert s.
Weil XY die Außenwinkelhalbierende bei C ist, gilt $\angle BCX = \angle YCA$. Wegen der rechten Winkel bei X bzw. Y sind daher die beiden Dreiecke BXC und ACY ähnlich.



Es gibt daher eine positive reelle Zahl k so, dass

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{YC}}{\overline{XC}} = k. \qquad (3)$$

Hieraus folgt insbesondere $s = \overline{AC} + \overline{BC} = k \cdot \overline{BC} + \overline{BC} = (1+k) \cdot \overline{BC}$ und deswegen

$$\overline{BC} = \frac{s}{1+k}. \tag{4}$$

Für die Strecke $[NX]$ gilt nun mit (3):

$$\overline{NX} = \frac{1}{2}\left(\overline{YC} + \overline{XC}\right) = \frac{1}{2}\left(k \cdot \overline{XC} + \overline{XC}\right) = \frac{1+k}{2} \cdot \overline{XC}. \tag{5}$$

Weil $[AY]$ und $[BX]$ senkrecht auf $[YX]$ stehen, sind $[AY]$ und $[BX]$ parallel; das Viereck $ABXY$ ist also ein Trapez, in dem die Mittelparallele $[MN]$ (mit (3)) die Länge

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\left(\overline{AY} + \overline{BX}\right) = \frac{1}{2}\left(k \cdot \overline{BX} + \overline{BX}\right) = \frac{1+k}{2} \cdot \overline{BX} \tag{6}$$

hat und senkrecht auf $[XY]$ steht. Das Dreieck MXN ist demnach auch rechtwinklig bei N und wegen (5) und (6) ähnlich zum rechtwinkligen Dreieck BXC mit Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1+k}{2}$. Deswegen gilt mit (4) für die Strecke $[MX]$ auch:

$$\overline{MX} = \frac{1+k}{2} \cdot \overline{BC} = \frac{1+k}{2} \cdot \frac{s}{1+k} = \frac{s}{2}.$$

Der Punkt X hat also eine von der Lage von C unabhängigen, konstante Entfernung vom Punkt M. Er bewegt sich also auf dem Kreis um M mit Radius $\frac{s}{2}$. Das war zu zeigen.

Bemerkung:

Der Punkt X durchläuft nicht alle Punkte des beschriebenen Kreises um M; die beiden Endpunkte desjenigen Kreisdurchmessers, auf dem A und B liegen, werden nicht erreicht. Die Menge der Punkte C, für die die Summe der Abstände zu den Punkten A und B den konstanten Wert s hat, ist eine Ellipse, bei der A und B die sogenannten Brennpunkte sind. Die Ellipse ist in obiger Abbildung gepunktet eingezeichnet.

Aufgabe 4

Wolfgang übt Korbleger und berechnet nach jedem Versuch seine Gesamttrefferquote. Er beginnt mit einem Fehlversuch. Nach weiteren n Versuchen, die nicht alle Treffer sein müssen, hat er erstmals eine Gesamttrefferquote erreicht, die größer oder gleich 75% ist. Dann folgt ein Fehlversuch. Nach weiteren k Versuchen, die alle Treffer sind, ist die Gesamttrefferquote erstmals größer oder gleich 80%. Bestimme alle Paare $(n;k)$, für die diese Situation eintreten kann.

Lösung:

Die beschriebene Situation kann genau dann eintreten, wenn $k \geq 5$ und $n = 4k - 17$ ist. Die ersten derartigen Paare sind also $(3;5)$, $(7;6)$, $(11,7)$,...

Beweis :

Zum Beweis sind zwei Dinge zu zeigen:

(A) Wenn die Situation wie beschrieben eintritt, dann ist $k \geq 5$ und $n = 4k - 17$.

(B) Wenn $k \geq 5$ und $n = 4k - 17$ ist, dann kann die Situation wie beschrieben eintreten.

Zu (A): Angenommen, die beschriebene Situation tritt ein und nach dem ersten Fehlversuch gibt es genau t Treffer unter den folgenden n Versuchen. Dann gilt für die Trefferquote nach diesen insgesamt $n+1$ Versuchen:

$$\frac{t}{n+1} \geq 75\% = \frac{3}{4} \iff 4t \geq 3n+3. \tag{7}$$

Wäre der insgesamt $(n+1)$-te Versuch kein Treffer gewesen, dann wäre die Trefferquote vor diesem Versuch $\frac{t}{n} > \frac{t}{n+1} \geq 75\%$ gewesen, was der beschriebenen Situation widerspricht. Also ist der $(n+1)$-te Versuch ein Treffer und die Trefferquote vor diesem Versuch ist $\frac{t-1}{n}$. Da diese nach Aufgabenstellung kleiner als 75% sein muss, ist

$$\frac{t-1}{n} < 75\% = \frac{3}{4} \iff 4t-4 < 3n \iff 4t < 3n+4 \iff 4t \leq 3n+3. \tag{8}$$

Im letzten Schritt wurde dabei die Ganzzahligkeit von $4t$ benutzt. Aus (7) und (8) folgt nun

$$4t = 3n+3. \tag{9}$$

Weiter ist der $(n+2)$-te Versuch ein Fehlversuch, worauf dann $k \geq 1$ Treffer folgen. Da dann erstmals eine Trefferquote von mindestens 80% erreicht sein soll, gelten die beiden Ungleichungen

$$\frac{t+k}{n+2+k} \geq 80\% = \frac{4}{5} \iff 5t+5k \geq 4n+8+4k \iff 5t+k \geq 4n+8 \tag{10}$$

und

$$\frac{t+k-1}{n+1+k} < 80\% = \frac{4}{5} \iff 5t+5k-5 < 4n+4+4k \iff 5t+k < 4n+9 \iff 5t+k \leq 4n+8, \tag{11}$$

wobei im letzten Schritt wieder die Ganzzahligkeit von $5t+k$ genutzt wurde. Aus (10) und (11) folgt:

$$5t+k = 4n+8. \tag{12}$$

Subtrahiert man nun das Fünffache von (9) vom Vierfachen von (12), so ergibt sich

$$\begin{aligned} 4\cdot(5t+k) - 5\cdot(4t) &= 4\cdot(4n+8) - 5\cdot(3n+3)\\ 20t+4k-20t &= 16n+32-15n-15\\ 4k &= n+17. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $k \geq \frac{17}{4} > 4$, also $k \geq 5$ sein muss und dass $n = 4k - 17$ ist. Das war zu zeigen.

Zu (B): Sei $k \geq 5$ und $n = 4k - 17$. Dann kann die folgender Abfolge von Treffern (T) und Nichttreffern (N) auftreten:

$$N, \underbrace{N, N, \ldots, N}_{k-5 \text{ Nichttreffer}}, \underbrace{T, T, \ldots, T}_{3k-12 \text{ Treffer}}, N, \underbrace{T, T, \ldots, T}_{k \text{ Treffer}}$$

Bis zum $(k-4)$-ten Versuch ist die Trefferquote gleich 0. Danach sind die Trefferquoten bis zum Versuch mit der Nummer $1+(k-5)+(3k-12)=(4k-17)+1=n+1$ der Reihe nach:

$$\frac{1}{k-3}, \frac{2}{k-2}, \frac{3}{k-1}, \ldots, \frac{3k-12}{4k-16} = \frac{3(k-4)}{4(k-4)} = \frac{3}{4}. \tag{13}$$

Zähler und Nenner der Brüche steigen dabei jeweils schrittweise um 1. Es gilt folgende Hilfsaussage:

(HA) Für einen Bruch $\frac{a}{b}$ mit $0 \le a < b$ ist $\frac{a+1}{b+1} > \frac{a}{b}$.

Der Beweis gelingt leicht durch direktes Umformen:

$$\frac{a+1}{b+1} > \frac{a}{b} \iff (a+1)b > a(b+1) \iff ab+b > ab+a \iff b > a.$$

Damit ist klar, dass die Liste (13) von Trefferquoten streng steigend geordnet ist. Die Trefferquoten sind also tatsächlich bis zum n-ten Versuch kleiner als 75% und nach dem $(n+1)$-ten Versuch gleich 75%.

Nach dem folgenden $(n+2)$-ten Fehlversuch sinkt die Trefferquote dann auf $\frac{3k-12}{4k-15}$, was somit kleiner als 75%, also auch kleiner als 80% ist. Die Quoten nach jedem der folgenden k Versuche, die alle Treffer sein sollen, sind der Reihe nach

$$\frac{3k-11}{4k-14}, \frac{3k-10}{4k-13}, \ldots, \frac{4k-12}{5k-15} = \frac{4(k-3)}{5(k-3)} = \frac{4}{5}. \tag{14}$$

Auch hier steigen in jedem Schritt Zähler und Nenner um 1, so dass mit obiger Hilfsaussage (HA) folgt, dass alle Trefferquoten vor der letzten in obiger Reihe kleiner als 80% sind und erst die letzte nach dem $(n+2+k)$-ten Versuch gleich 80% ist. Damit ist alles gezeigt.