19. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Lösungsbeispiele

für die Aufgaben der 2. Runde 2016/2017

Aufgabe 1

Paul soll fünf positive ganze Zahlen nebeneinander schreiben. Dabei muss er Folgendes beachten:
Die erste Zahl ist so groß wie die Quersumme der zweiten Zahl, die fünfte Zahl ist so groß wie die Quersumme der vierten Zahl. Die zweite, die dritte und die vierte Zahl ist jeweils so groß wie die Summe der Quersummen ihrer beiden Nachbarzahlen.
Bestimme den kleinsten Wert, den die Summe dieser fünf Zahlen haben kann.

Lösung:

Der kleinste Wert, den die Summe haben kann, ist 45.

Beweisvorschlag:

Für eine natürliche Zahl n bezeichnen wir mit $Q(n)$ die Quersumme von n. Wir benutzen die folgende bekannte Tatsache:

Vorbemerkung: *Für eine natürliche Zahl n ist $n-Q(n)$ durch 9 teilbar. Dies bedeutet dass n und $Q(n)$ bei der Division durch 9 denselben Rest lassen. Insbesondere ist n genau dann durch 9 teilbar, wenn $Q(n)$ durch 9 teilbar ist.*

Beweis des Vorbemerkung: Sei $n=n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\cdots+n_1\cdot 10+n_0$ die Dezimaldarstellung von n ($0\le n_i\le 9$ für alle $0\le i\le k$).
Dann ist $Q(n)=n_k+n_{k-1}+\cdots+n_1+n_0$ die Quersumme von n. Es ergibt sich

$$n-Q(n)=n_k\cdot(10^k-1)+n_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+\cdots+n_2\cdot(10^2-1)+n_1\cdot(10-1)$$

Da die Zahlen $10^k-1=99...99$ (mit k Ziffern 9), $10^{k-1}-1=99...9$ (mit k-1 Ziffern 9), …., $10^2-1=99$ und $10-1=9$ alle durch 9 teilbar sind, ist auch $n-Q(n)$ durch 9 teilbar. Somit ist die Vorbemerkung bewiesen.

Die fünf Zahlen, die Paul aufschreibt, bezeichnen wir der Reihe nach mit a,b,c,d,e .

Nach Voraussetzung gilt:

(1) $a=Q(b)$

(2) $b=Q(a)+Q(c)$

(3) $c=Q(b)+Q(d)$

(4) $d=Q(c)+Q(e)$

(5) $e=Q(d)$

Addiert man die Gleichungen (1) und (2), so folgt $a+b=Q(b)+Q(a)+Q(c)$ bzw.

$$(a-Q(a))+(b-Q(b))=Q(c) .$$

Nach der Vorbemerkung ist also $Q(c)$ und damit c durch 9 teilbar. Da c positiv ist folgt

(6) $\quad c\geq 9$.

Aus (1), (3) und (5) ergibt sich

(7) $\quad a+e=Q(b)+Q(d)=c$.

Addiert man hier $Q(a)+Q(e)$ auf beiden Seiten und subtrahiert $a+e$, so ergibt sich

$$Q(a)+Q(e)=c-(a-Q(a))-(e-Q(e)) .$$

Da c durch 9 teilbar ist, ist nach Vorbemerkung auch $Q(a)+Q(e)$ durch 9 teilbar.
Nach (2) und (4) gilt

$$b+d=Q(a)+Q(c)+Q(c)+Q(e) .$$

Da $Q(a)+Q(e)$ und $Q(c)$ durch 9 teilbar sind, ist auch $b+d$ durch 9 teilbar.
Die Zahlen b und d sind aber beide mindestens zweistellig. Wäre nämlich z.B. b einstellig, so wäre nach Gleichung (1): $Q(b)=b=a=Q(a)$. Setzt man dies in (2) ein, so ergibt sich $Q(c)=0$, dies widerspricht $c>0$.
Wenn aber b und d zweistellig sind und ihre Summe $b+d$ durch 9 teilbar ist, so muss

(8) $\quad b+d\geq 27$

gelten. Insgesamt kann man also mit (6) und (8) die Summe der fünf Zahlen wie folgt nach unten abschätzen:

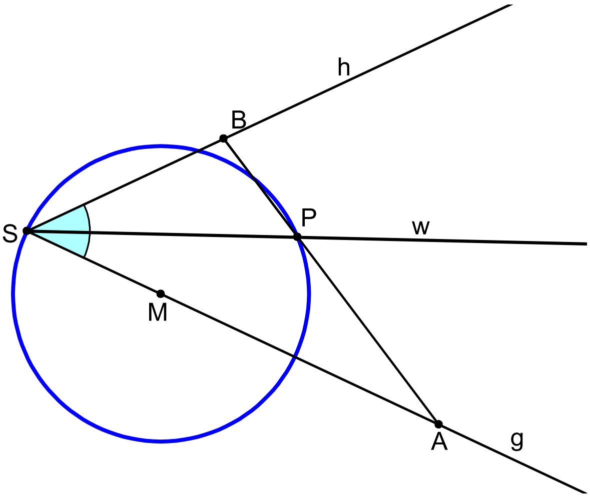
$$a+b+c+d+e=(b+d)+c+(a+e)=(b+d)+2c\geq 27+2\cdot 9=45 .$$

Um zu beweisen, dass 45 der kleinste Wert ist, den die Summe haben kann, muss man fünf Zahlen mit Summe 45 angeben, die Paul nebeneinander schreiben kann. In einer Verteilung mit Summe 45 muss $c=9$ gelten, außerdem ist nach (7) $c=a+e$. Mögliche Zahlenreihen mit Summe 45, die alle Voraussetzungen erfüllen, sind z.B.

2	11	9	16	7	oder
5	14	9	13	4	

Aufgabe 2

Gegeben ist ein Winkel mit Scheitel S und Schenkeln g und h sowie der Winkelhalbierenden w. Nun wählt man einen Punkt M auf g. Der Kreis um M durch S schneidet w außer in S noch im Punkt P. Schließlich legt man durch P eine Gerade, die g in A und h in B schneidet.



Es ist $a=\overline{SA}$, $b=\overline{SB}$ und $r=\overline{SM}$.

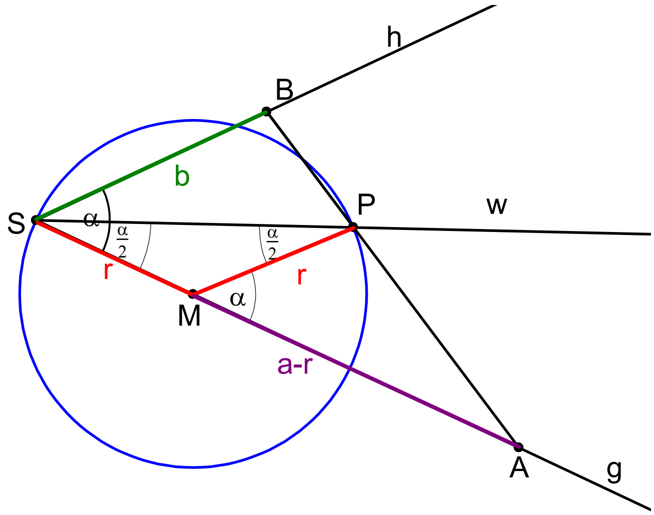
Beweise: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{r}$.

Beweisvorschlag (mit zweitem Strahlensatz):

Wir ergänzen die Strecke $[MP]$. Die Größe des gegebenen Winkels $\sphericalangle ASB$ sei α.

Das Dreieck SMP ist gleichschenklig, denn $[SM]$ und $[MP]$ sind Radien des gegebenen Kreises, also gleich lang.

Die Basiswinkel im Dreieck SMP haben die Größe $\frac{\alpha}{2}$, denn w ist Winkelhalbierende des Winkels α.



Somit hat der Winkel $\sphericalangle PMS$ nach dem Satz über Innenwinkelsumme für Dreiecke die Größe $180°-2\cdot\frac{\alpha}{2}=180°-\alpha$. Der zugehörige Nebenwinkel $\sphericalangle AMP$ hat demnach die Größe α. Somit sind die Gerade h und die Strecke $[MP]$ nach der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes parallel.

Wir können daher den zweiten Strahlensatz anwenden:

Es ergibt sich $\frac{b}{r}=\frac{a}{a-r}$.

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit $r\cdot(a-r)$ so ergibt sich

$b\cdot(a-r)=ar$ bzw. $ba-br=ar$ oder $br+ar=ba$.

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch abr, so ergibt sich

$\frac{br}{abr}+\frac{ar}{abr}=\frac{ba}{abr}$ bzw. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{r}$.

Aufgabe 3

Ein Paar von Rechtecken heißt befreundet, wenn die Maßzahl des Umfangs (in cm) des einen Rechtecks gleich der Maßzahl des Flächeninhalts (in cm²) des anderen Rechtecks ist und umgekehrt.

Gib die Seitenlängen von allen Paaren befreundeter Rechtecke an, bei denen die Maßzahlen der Seitenlängen (in cm) natürliche Zahlen sind.

Lösung:

Wir schreiben $[a;b]$ für ein Rechteck dessen Seitenlängen in cm die Maßzahlen a und b hat, wobei $a \leq b$ gilt.
Dann sind die folgenden sieben Paare von Rechtecken befreundet:
(1) [4;4] und [4;4]
(2) [3;6] und [3;6]
(3) [2;10] und [4;6]
(4) [2;13] und [3;10]
(5) [1;34] und [7;10]
(6) [1;38] und [6;13]
(7) [1;54] und [5;22]
Alle anderen Paare von Rechtecken sind nicht befreundet.

Beweisvorschlag:

Gegeben sind zwei Rechtecke $[a;b]$ und $[c;d]$ mit $a \leq b$ und $c \leq d$.
Hierbei seien a, b, c und d positive natürliche Zahlen.
Die beiden Rechtecke sind genau dann befreundet, wenn gilt:

$$a \cdot b = 2 \cdot (c+d) \quad \text{und} \quad c \cdot d = 2 \cdot (a+b).$$

Daraus folgt $a \cdot b - 2 \cdot (a+b) = a \cdot b - c \cdot d = 2 \cdot (c+d) - c \cdot d$.

Somit gilt (*) $a \cdot b - 2 \cdot (a+b) = 2 \cdot (c+d) - c \cdot d$.

Es ist entweder $a \cdot b - 2 \cdot (a+b) \leq 0$ oder $a \cdot b - 2 \cdot (a+b) > 0$. Im zweiten Fall ist wegen (*) $a \cdot b - 2 \cdot (a+b) = 2 \cdot (c+d) - c \cdot d > 0$, d.h. $c \cdot d - 2 \cdot (c+d) < 0$.
In jedem Fall ist für eines der beiden Rechtecke die Maßzahl des Flächeninhalts höchstens so groß wie die Maßzahl des Umfangs. Wir können annehmen, dass $[a;b]$ dieses Rechteck mit $a \cdot b \leq 2 \cdot (a+b)$ ist, sonst vertauschen wir die Rechtecke $[a;b]$ und $[c;d]$.

Fall 1: $a \cdot b = 2 \cdot (a+b)$ .Wegen (*) gilt dann auch $c \cdot d = 2 \cdot (c+d)$.

$a \cdot b = 2 \cdot (a+b)$ ist äquivalent zu $a(b-2) = 2b$. Da $2b > 0$ muss auch $a(b-2) > 0$ sein.
Somit muss $b > 2$ gelten.
Es folgt $a = \frac{2b}{b-2} = \frac{2b-4+4}{b-2} = \frac{2(b-2)+4}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}$
Da a eine natürliche Zahl ist, muss $b-2$ ein Teiler von 4 sein.
Es ist also $b=3$, $b=4$ oder $b=6$.

Für $b=3$ ergibt sich $a=\frac{2b}{b-2}=6$, dies ist unmöglich, da $a\leq b$ angenommen wurde.

Für $b=4$ ergibt sich $a=\frac{2b}{b-2}=4$, also $[a;b]=[4;4]$.

Für $b=6$ ergibt sich $a=\frac{2b}{b-2}=3$, also $[a;b]=[3;6]$.

Da auch $c\cdot d=2\cdot(c+d)$ gibt es auch für das Rechteck $[c;d]$ nur die Möglichkeiten [4;4] und [3;6]. Tatsächlich ist [4;4] befreundet zu [4;4], denn $4\cdot 4=2\cdot(4+4)$.
Außerdem ist [3;6] befreundet zu [3;6], denn $3\cdot 6=2\cdot(3+6)$.
Dies sind die einzigen beiden Möglichkeiten im Fall $a\cdot b=2\cdot(a+b)$.
Es sind die in den Lösungen angegebenen Fälle (1) und (2).

Fall 2: $a\cdot b<2\cdot(a+b)$, d.h. $a\cdot b\leq 2\cdot(a+b)-1$.

$a\cdot b\leq 2\cdot(a+b)-1$ ist äquivalent zu $a\cdot(b-2)\leq 2b-1$.

Fall 2.1: $b=1$. Dann muss $a=1$ sein, wegen $a\leq b$. Wegen $a\cdot b=2\cdot(c+d)$ muss aber eine der beiden Zahlen a oder b gerade sein, somit ist $[1;1]$ unmöglich.

Fall 2.2: $b=2$. Dann muss $a=1$ oder $a=2$ sein, wegen $a\leq b$.
Wenn $[a;b]=[1;2]$, dann ist $2=a\cdot b=2\cdot(c+d)$, also $c+d=1$.
Dies ist unmöglich, da c und d positive natürliche Zahlen sind.
Wenn $[a;b]=[2;2]$, dann ist $4=a\cdot b=2\cdot(c+d)$, also $c+d=2$. Es muss $c=d=1$ gelten. Aber dann ist $1=c\cdot d\neq 2\cdot(2+2)$, die Paare $[2;2]$ und $[1;1]$ sind also nicht befreundet.

Fall 2.3: $b>2$.

Aus $a\cdot(b-2)\leq 2b-1$ folgt $a\leq\frac{2b-1}{b-2}=\frac{2b-4+3}{b-2}=2+\frac{3}{b-2}$.

Aus $b-2\geq 1$ folgt $a\leq 2+\frac{3}{1}=5$.

Es bleiben also die fünf Möglichkeiten $a=5$, $a=4$, $a=3$, $a=2$, $a=1$.

Fall 2.3.a: $a=5$.
Aus $5=a\leq 2+\frac{3}{b-2}$ folgt $b-2\leq 1$. Das widerspricht $a\leq b$.

Fall 2.3.b: $a=4$.
Für $a=4$ ergibt sich aus $a\cdot(b-2)\leq 2b-1$ die Ungleichung
$4\cdot(b-2)\leq 2b-1$ d.h. $b\leq 3{,}5$. Das widerspricht ebenfalls $a\leq b$.

Fall 2.3.c: $a=3$.
Aus $a\cdot(b-2)\leq 2b-1$ ergibt sich nun $3\cdot(b-2)\leq 2b-1$ oder $b\leq 5$.
Somit $3\leq b\leq 5$. Da $a\cdot b=2\cdot(c+d)$ muss a oder b gerade sein.
Wegen $a=3$ bleibt nur $b=4$. Somit ist $2\cdot(a+b)=14=cd$ und
$a\cdot b=2\cdot(c+d)=12$. Aus $2\cdot(c+d)=12$ folgt $c=6-d$. Setzt man dies in $cd=14$ ein, so ergibt sich die quadratische Gleichung $d\cdot(6-d)=14$. Sie führt auf

$d^2-6d+14=0$. Die Diskriminante dieser Gleichung ist $(-6)^2-4\cdot1\cdot14=-20<0$. Daher ist der Fall $a=3$ unmöglich.

Fall 2.3.d: $a=2$.

In diesem Fall ist $a\leq 2+\frac{3}{b-2}$ für alle natürlichen Zahlen b erfüllt.

Aus $a\cdot b=2\cdot b=2\cdot(c+d)$ folgt $b=c+d$. Aus $cd=2\cdot(a+b)$ folgt $cd=2\cdot(2+b)=4+2b=4+2\cdot(c+d)=4+2c+2d$.

Die Gleichung $cd=4+2c+2d$ ist äquivalent zu $c\cdot(d-2)=4+2d$. Hier ist $d>2$, da sonst die linke Seite der Gleichung nicht positiv wäre.

Somit folgt aus $c\cdot(d-2)=4+2d$ die Gleichung $c=\frac{4+2d}{d-2}=\frac{2(d-2)+8}{d-2}=2+\frac{8}{d-2}$.

Also ist $d-2$ ein Teiler von 8. Nach Voraussetzung ist außerdem $c\leq d$, also $2+\frac{8}{d-2}\leq d$ oder $(d-2)^2\geq 8$ bzw. $d\geq 5$. Da $d-2$ ein Teiler von 8 ist, folgt $d=6$ oder $d=10$.

Für $d=6$ ist $c=2+\frac{8}{d-2}=4$ und $b=c+d=10$. Man erhält die befreundeten Rechtecke [2;10] und [4;6], also Lösung (3).

Für $d=10$ ist $c=2+\frac{8}{d-2}=3$ und $b=c+d=13$. Man erhält die befreundeten Rechtecke [2;13] und [3;10], also Lösung (4).

Fall 2.3.e: $a=1$.

In diesem Fall ist $b=2c+2d$ und $cd=2\cdot(a+b)=2\cdot(1+b)=2b+2=4c+4d+2$.

Daraus folgt $c(d-4)=4d+2$. Hier ist $d>4$, da sonst die linke Seite der Gleichung nicht positiv wäre. Somit kann man durch $d-4$ dividieren und es folgt $c=\frac{4d+2}{d-4}=\frac{4(d-4)+18}{d-4}=4+\frac{18}{d-4}\leq d$. Somit $(d-4)^2\geq 18$, also $d\geq 9$. Außerdem muss $d-4$ ein Teiler von 18 sein. Es bleibt nur $d=10$, $d=13$, $d=22$.

Für $d=10$ ist $c=4+\frac{18}{d-4}=7$ und $b=2c+2d=34$. Man erhält die befreundeten Rechtecke [1;34] und [7;10], also Lösung (5).

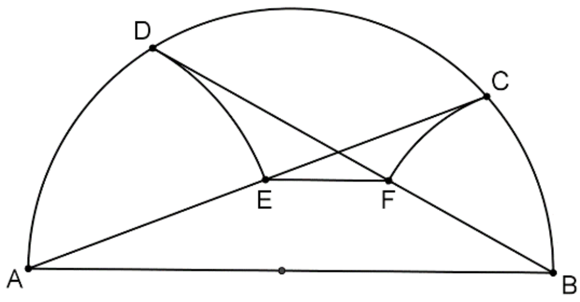
Für $d=13$ ist $c=4+\frac{18}{d-4}=6$ und $b=2c+2d=38$. Man erhält die befreundeten Rechtecke [1;38] und [6;13], also Lösung (6).

Für $d=22$ ist $c=4+\frac{18}{d-4}=5$ und $b=2c+2d=54$. Man erhält die befreundeten Rechtecke [1;54] und [5;22], also Lösung (7).

Da alle Fälle abgedeckt sind, sind alle befreundeten Rechtecke gefunden.

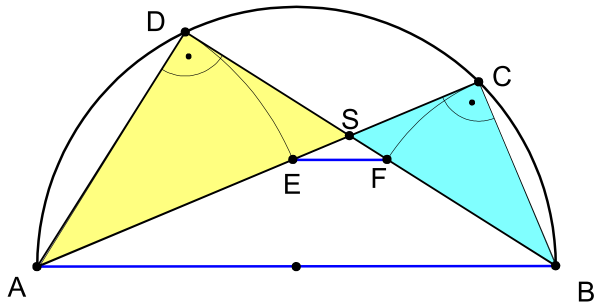
Aufgabe 4

Auf einem Halbkreis über dem Durchmesser [AB] liegen zwei Punkte C und D so, dass sich die Sehnen [AC] und [BD] schneiden.
Der Kreis um A durch D schneidet [AC] in E, der Kreis um B durch C schneidet [BD] in F.
Zeige: Die Strecken [EF] und [AB] sind parallel.



1. Beweisvorschlag (mit Ähnlichkeit und Umkehrung des 1. Strahlensatz):

Der Schnittpunkt von $[AC]$ und $[BD]$ wird mit S bezeichnet.
Die beiden Dreiecke ASD und BCS sind ähnlich, da sie in ihren Innenwinkeln übereinstimmen (Scheitelwinkel bei S, rechter Winkel nach Satz des Thales bei C bzw. D).



Aus der Ähnlichkeit folgt

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AS}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BS}}$$

Nach Konstruktion von E auf dem Kreis um A durch D gilt $\overline{AD}=\overline{AE}$.
Ebenso gilt $\overline{BC}=\overline{BF}$. Daher folgt

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AS}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{BS}}$$

Da im rechtwinkligen Dreieck ASD die Kathete $[AD]$ kürzer ist als die Hypotenuse $[AS]$, liegt E auf der Strecke $[AS]$ und es gilt $\overline{AE}=\overline{AS}-\overline{ES}$ und genauso $\overline{BF}=\overline{BS}-\overline{FS}$.

Damit ergibt sich $\frac{\overline{AS}-\overline{ES}}{\overline{AS}}=\frac{\overline{BS}-\overline{FS}}{\overline{BS}}$ oder $1-\frac{\overline{ES}}{\overline{AS}}=1-\frac{\overline{FS}}{\overline{BS}}$.

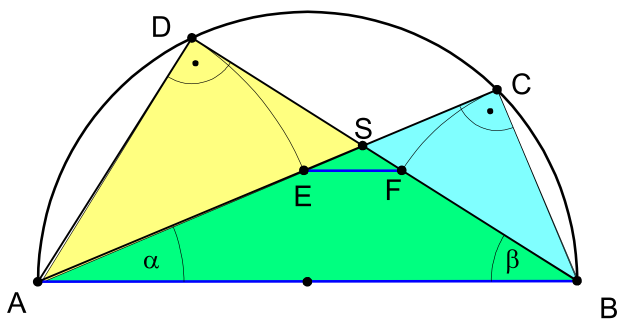
Es folgt somit

$$\frac{\overline{ES}}{\overline{AS}}=\frac{\overline{FS}}{\overline{BS}}$$

Nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes sind damit $[EF]$ und $[AB]$ parallel.

2. Beweisvorschlag (mit Trigonometrie):

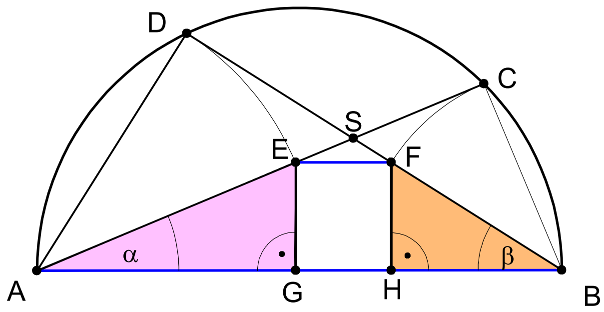
Nach dem Satz des Thales sind die Dreiecke ABC und ABD rechtwinklig. In ihnen gelten die Beziehungen $\sin(\alpha)=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ und $\sin(\beta)=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$.



Daraus und nach Konstruktion von E und F folgt

(1) $\overline{AE}=\overline{AD}=\overline{AB}\cdot\sin(\beta)$ und

(2) $\qquad \overline{BF}=\overline{BC}=\overline{AB}\cdot\sin(\alpha)$.



Das Lot von E auf die Strecke $[AB]$ schneide die Strecke $[AB]$ in G, das Lot von F auf $[AB]$ schneide die Strecke $[AB]$ in H.

In den rechtwinkligen Dreiecken AGE und BFH gilt:

$$\sin(\alpha)=\frac{\overline{EG}}{\overline{AE}} \text{ und } \sin(\beta)=\frac{\overline{FH}}{\overline{BF}} .$$

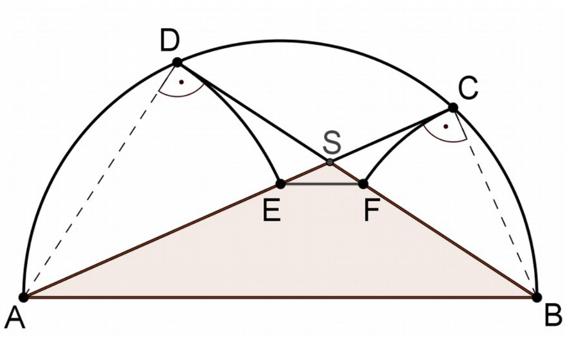
Daraus folgt $\overline{EG}=\overline{AE}\cdot\sin(\alpha)$ und $\overline{FH}=\overline{BF}\cdot\sin(\beta)$.

Setzt man darin die Beziehungen (1) und (2) für $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ ein, so erhält man

$$\overline{EG}=\overline{FH}=\overline{AB}\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) .$$

Da E und F den gleichen Abstand von der Strecke $[AB]$ haben, sind die Strecken $[AB]$ und $[EF]$ parallel.

3. Beweisvorschlag (mit Flächeninhaltsformel für Dreiecke):



Im Dreieck *ABS* ist nach Satz des Thales $[BC]$ die Höhe auf $[AS]$, und $[AD]$ die Höhe auf $[BS]$. Für den Flächeninhalt von Dreieck ABS gilt:

$2\cdot|ABS|=\overline{SA}\cdot\overline{BC}=\overline{SB}\cdot\overline{AD}$, also $\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$.

Demnach gilt für eine geeignete Zahl k: $\overline{AD}=k\cdot\overline{SA}$ und $\overline{AD}=k\cdot\overline{SA}$.

Im rechtwinkligen Dreieck *ADS* ist $[AD]$ Kathete, also kürzer als die Hypotenuse $[AS]$, analog ist $[BC]$ kürzer als $[BS]$. Also liegen die Punkte *E* und *F* auf den Halbgeraden [*SA* bzw. [*SB*. So können wir weiter schließen:

$$\frac{\overline{SE}}{\overline{SF}}=\frac{\overline{SA}-\overline{AD}}{\overline{SB}-\overline{BC}}=\frac{\overline{SA}\cdot(1-k)}{\overline{SB}\cdot(1-k)}=\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$$

Also gilt nach der Umkehrung des 2. Strahlensatzes, das *EF*||*AB*.

Bemerkung:

Der letzte Beweis legt folgende Verallgemeinerung nahe: Die Voraussetzung, dass $[AB]$ Durchmesser des Kreises ist, wird nicht benötigt, es gilt allgemeiner:

Seien $[AC]$ und $[BD]$ zwei Sehnen im Kreis, die sich schneiden und bei denen $[AD]$ kürzer ist als $[AC]$ sowie $[BC]$ kürzer ist als $[BD]$. *E* sei der Punkt auf $[AC]$, für den $\overline{AD}=\overline{AE}$ ist und *F* der Punkt auf $[BD]$, für den $\overline{BF}=\overline{BC}$ ist. Dann ist (falls E und F nicht zusammenfallen) EF||AB.

Der Beweis dieser Verallgemeinerung kann ähnlich wie im 3. Beweisvorschlag geführt werden.