18. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Lösungsbeispiele

für die Aufgaben der 2. Runde 2015/2016

Aufgabe 1

An der Tafel steht eine positive ganze Zahl. Abwechselnd ersetzen Nora und Marius die Zahl an der Tafel durch eine neue nach folgender Regel: Wer am Zug ist,

- *wählt einen positiven Teiler der Zahl an der Tafel aus,*
- *subtrahiert ihn von der Zahl an der Tafel und*
- *ersetzt die Zahl an der Tafel durch das Ergebnis dieser Rechnung.*

Wer die Zahl 0 hinschreiben muss, hat verloren. Nora beginnt. Bestimme alle Anfangszahlen, bei denen sie den Gewinn erzwingen kann.

Lösung:

Nora kann genau dann den Gewinn erzwingen, wenn am Anfang eine gerade Zahl an der Tafel steht.

Beweisvorschlag:

Wir überlegen zunächst, welche Züge möglich sind: Jede positive ganze Zahl hat mindestens einen Teiler (nämlich die Zahl 1); jeder Teiler ist positiv und höchstens so groß wie die Zahl selbst. Damit ist bei jeder positiven Zahl an der Tafel ein Zug möglich, nach jedem Zug ist die neue Zahl an der Tafel nicht negativ und um mindestens 1 kleiner als die bisherige Zahl. Also steht nach endlich vielen Zügen die Zahl 0 an der Tafel und das Spiel ist zu Ende.

Weiter hat eine ungerade Zahl nur ungerade Teiler. Da die Differenz zweier ungerader Zahlen gerade ist, muss jeder, der bei seinem Zug eine ungerade Zahl vorfindet, als neue Zahl eine gerade Zahl hinschreiben.

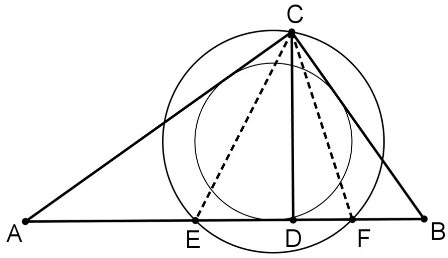
Jede gerade Zahl hat mindestens einen ungeraden Teiler, nämlich die Zahl 1. Die Differenz aus einer geraden und einer ungeraden Zahl ist ungerade. Wer bei seinem Zug also eine gerade Zahl vorfindet, kann einen ungeraden Teiler auswählen und so erreichen, dass die neue Zahl an der Tafel ungerade ist, insbesondere, dass sie nicht 0 ist.

Falls also Nora am Anfang eine gerade Zahl an der Tafel vorfindet, kann sie mit folgender Strategie gewinnen: Sie erreicht, dass nach ihrem Zug die Zahl an der Tafel ungerade und kleiner als die ursprüngliche Zahl ist. Nun muss Marius als nächstes eine gerade und wiederum kleinere Zahl an die Tafel schreiben. Falls diese Zahl die 0 ist, hat Nora gewonnen; falls nicht, kann Nora die gleiche Strategie mit einer kleineren geraden Zahl erneut anwenden. Nach endlich vielen solchen Zügen muss die Zahl von Marius die 0 sein, d.h. Nora hat den Gewinn erzwungen.

In allen anderen Fällen, d.h. wenn Nora am Anfang eine ungerade Zahl an der Tafel vorfindet, kann Nora den Gewinn nicht erzwingen: Sie muss nämlich als nächstes eine gerade Zahl an die Tafel schreiben. Entweder ist diese die 0, dann hat Nora verloren, oder sie ist größer als 0, dann kann Marius die obige Strategie zum Gewinn anwenden, auch dann hat Nora verloren.

Aufgabe 2

Das Dreieck ABC ist rechtwinklig bei C, der Fußpunkt der Höhe durch C ist D. Die Winkelhalbierenden der Winkel $\sphericalangle ACD$ *und* $\sphericalangle DCB$ *schneiden die Seite [AB] in den Punkten E bzw. F.*
Beweise: Der Umkreis des Dreiecks EFC und der Inkreis des Dreiecks ABC haben den gleichen Mittelpunkt.



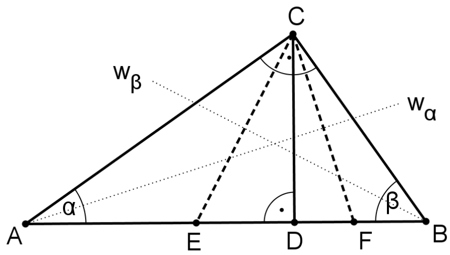
1. Beweisvorschlag:

Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_α und w_β. Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks EFD ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecken [EC] und [FC]. Es genügt also zu zeigen, dass w_α die Mittelsenkrechte der Strecke [FC] ist und w_β die Mittelsenkrechte der Strecke [EC].

Das Dreieck ADC ist rechtwinklig bei D, also gilt:

$$\sphericalangle ACD = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha.$$

Da CE Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ACD$ ist, ist also $\sphericalangle ACE = \frac{1}{2}(90° - \alpha) = 45° - \frac{1}{2}\alpha.$



Weil das Dreieck ABC rechtwinklig bei C ist, folgt

$$\sphericalangle ECB = 90° - \sphericalangle ACE = 90° - (45° - \frac{1}{2}\alpha) = 45° + \frac{1}{2}\alpha.$$

Schließlich ergibt sich aus dem Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck AEC:

$$\sphericalangle BEC = 180° - \sphericalangle CEA = 180° - (180° - \alpha - \sphericalangle ACE) = \alpha + \sphericalangle ACE = \alpha + (45° - \frac{1}{2}\alpha) = 45° + \frac{1}{2}\alpha.$$

Also gilt $\sphericalangle ECB = \sphericalangle BEC$; das Dreieck EBC ist also gleichschenklig mit Basis [EC].

Genauso zeigt man, dass das Dreieck AFC gleichschenklig mit Basis [FC] ist.

Weil in gleichschenkligen Dreiecken die Winkelhalbierende des Spitzenwinkels die Symmetrieachse des Dreiecks und damit auch die Mittelsenkrechte der Basis ist, folgt hieraus, dass w_α die Mittelsenkrechte der Strecke [FC] und w_β die Mittelsenkrechte der Strecke [EC] ist und damit die Behauptung.

Bemerkung: Die Bedingung, dass die genannten Mittelsenkrechten und die Winkelhalbierenden zusammenfallen, ist zunächst eine nur hinreichende Bedingung dafür, dass die beiden Mittelpunkte identisch sind. Wenn sie also nicht zusammenfallen, kann man nicht ohne weitere Überlegungen schließen, dass die Aussage des Satzes falsch ist.

2. Beweisvorschlag:

Wir betrachten zunächst ein beliebiges, nicht unbedingt rechtwinkliges Dreieck ABC, bei dem die Höhe [CD] im Inneren des Dreiecks verläuft. Auch hier kann man E und F wie in der Aufgabenstellung definieren. Mit M wird der Umkreismittelpunkt des Dreiecks EFC bezeichnet. Nach Konstruktion sind alle Innenwinkel des Dreiecks EFC spitz, der Punkt M liegt also innerhalb des Dreiecks EFC.

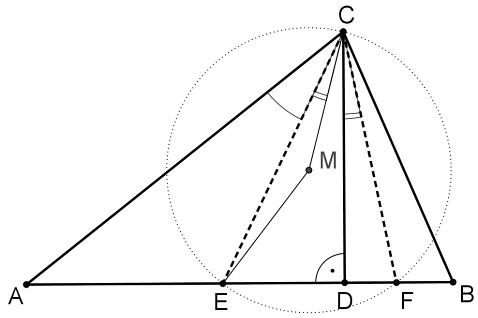
Hilfssatz 1: Die Gerade CM halbiert im Dreieck ABC den Innenwinkel bei C, es gilt also

$\sphericalangle ACM = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$.

Beweis: Nach dem Satz vom Mittelpunktswinkel ist $\sphericalangle CME = 2\cdot\sphericalangle CFE$.

Weil das Dreieck CME gleichschenklig ist (denn [CM] und [EM] sind Radien des Umkreises des Dreiecks EFC), ergibt sich für die Größe des Basiswinkels in diesem Dreieck:

$$\sphericalangle ECM = \frac{1}{2}\cdot(180° - \sphericalangle CME) = \frac{1}{2}\cdot(180° - 2\cdot\sphericalangle CFE) = 90° - \sphericalangle CFE.$$



Da CF Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle DCB$ ist, folgt weiter im Dreieck DFC: $\frac{1}{2}\cdot\sphericalangle DCB = \sphericalangle DCF = 90° - \sphericalangle CFE$.

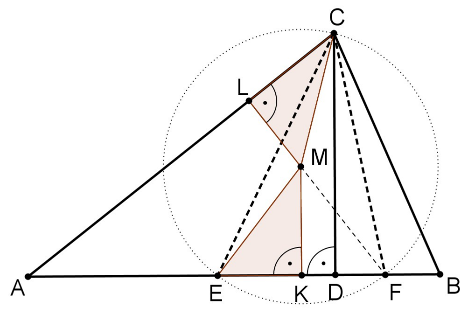
Zusammen erhält man daher $\sphericalangle ECM = \frac{1}{2}\sphericalangle DCB$.

Das bedeutet aber, dass

$$\sphericalangle ACM = \sphericalangle ACE + \sphericalangle ECM = \frac{1}{2}\cdot\sphericalangle ACD + \frac{1}{2}\cdot\sphericalangle DCB = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB.$$

Daraus folgt die Behauptung des Hilfssatz 1.

Hilfssatz 2: Sind L und K die Fußpunkte der Lote von M auf AC bzw. AB, dann sind die beiden Dreiecke MCL und EMK kongruent.



Beweis: Beide Dreiecke sind rechtwinklig und haben $\overline{CM} = \overline{EM}$ als Hypotenusenlänge.

Zusätzlich gilt nach dem Satz vom Mittelpunktswinkel, dass

$$\sphericalangle EMF = 2\cdot\sphericalangle ECF = 2\cdot(\sphericalangle ECD + \sphericalangle DCF) = 2\cdot\sphericalangle ECD + 2\cdot\sphericalangle DCF = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB = \sphericalangle ACB.$$

Daher ist mit Hilfssatz 1: $\sphericalangle EMK = \frac{1}{2}\cdot\sphericalangle EMF = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACM = \sphericalangle LCM$. Nach Kongruenzsatz SWW folgt damit die Behauptung.

Nun kann man, über die eigentliche Aufgabenstellung hinausgehend, sogar folgenden Satz beweisen, womit die Aufgabe gelöst ist:

Satz: Der Umkreis des Dreiecks EFC und der Inkreis des Dreiecks ABC haben genau dann den gleichen Mittelpunkt, wenn das Dreieck ABC rechtwinklig bei C ist.

Beweis: Wenn der Umkreismittelpunkt M von EFC gleichzeitig Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist, dann hat M insbesondere den gleichen Abstand von AB wie von AC. Daher gilt $\overline{LM} = \overline{KM}$. Nach Hilfssatz 2 bedeutet das aber, dass auch $\overline{LM} = \overline{KM} = \overline{LC}$ gilt. Daher ist das Dreieck LMC gleichschenklig rechtwinklig, weswegen $\sphericalangle LCM = 45°$ ist. Daraus folgt aber mit Hilfssatz 1, dass $\sphericalangle ACB = 90°$ ist.

Ist umgekehrt das Dreieck ABC rechtwinklig bei C, dann ist nach Hilfssatz 1 $\sphericalangle LCM = 45°$ und damit das Dreieck LCM gleichschenklig rechtwinklig. Deswegen und wegen Hilfssatz 2 ist dann $\overline{LM} = \overline{LC} = \overline{KM}$. Daher liegt M auf der Winkelhalbierenden des Innenwinkels bei A im Dreieck ABC und zusammen mit Hilfssatz 1 ist M demnach der Inkreismittelpunkt von Dreieck ABC.

Aufgabe 3

Das nebenstehende Zahlenfeld wird nach rechts und nach unten so fortgesetzt, dass in jeder der unendlich vielen Zeilen und Spalten eine arithmetische Folge steht.
Zeige: Eine positive ganze Zahl n kommt in diesem Zahlenfeld genau dann nicht vor, wenn 2n+1 eine Primzahl ist.

Bemerkung: Eine Zahlenfolge heißt arithmetische Folge, wenn die Differenz zweier aufeinander folgender Folgenglieder immer gleich ist.

4	7	10	13	...
7	12	17	22	...
10	17	24	31	...
13	22	31	40	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Beweisvorschlag:

Die Zahl in der p-ten Zeile und q-ten Spalte des Zahlenfeldes wird mit A(p,q) bezeichnet (p und q sind positive ganze Zahlen).

Hilfssatz: Es ist A(p,q) = 2pq+p+q für alle positiven ganzen Zahlen p und q.

Beweis: Jede Zahl einer arithmetischen Zahlenfolge $z_1, z_2, z_3, \ldots$ kann aus den ersten beiden Zahlen der Folge berechnet werden, denn die konstante Differenz aufeinander folgender Zahlen ist $d = z_2 - z_1$ und die k-te Zahl der Folge berechnet sich aus der ersten, indem man zu dieser (k-1)-mal den Wert d addiert, also
$z_k = z_1 + (k-1) \cdot d = z_1 + (k-1) \cdot (z_2 - z_1)$ für alle positiven ganzen Zahlen k.
Demnach kann aus den ersten beiden Zahlen 4 und 7 der ersten Zeile berechnet werden, dass $A(1,q) = 4 + (q-1) \cdot (7-4) = 1 + 3q$ gilt und aus den ersten beiden Zahlen 7 und 12 der zweiten Zeile berechnet werden, dass $A(2,q) = 7 + (q-1) \cdot (12-7) = 2 + 5q$ ist.

Somit kann man mit den ersten beiden Zahlen 1+3q und 2+5q der q-ten Spalte berechnen, dass

$$\begin{aligned} A(p,q) &= 1+3q+(p-1)\cdot((2+5q)-(1+3q)) = 1+3q+(p-1)\cdot(1+2q) \\ &= 1+3q+p-1+2pq-2q = 2pq+p+q \end{aligned}$$

für alle positiven ganzen Zahlen p und q gilt, wie behauptet.

Zum Beweis der Behauptung der Aufgabe sind zwei Aussagen zu zeigen:

(A) Ist für eine positive ganze Zahl n die Zahl 2n+1 eine Primzahl, dann kommt n im Zahlenfeld nicht vor.

(B) Kommt eine positive ganze Zahl n im Zahlenfeld nicht vor, dann ist 2n+1 eine Primzahl.

Um (A) nachzuweisen genügt es zu zeigen, dass für alle im Zahlenfeld vorkommenden Zahlen n = A(p,q) die Zahl 2n+1 keine Primzahl ist. Dies ist aber der Fall, denn für beliebige positive ganze Zahlen p und q gilt:

$$2n+1 = 2\cdot A(p,q)+1 = 2\cdot(2pq+p+q)+1 = 4pq+2p+2q+1 = (2p+1)(2q+1),$$

und dies ist als Produkt zweier Zahlen, die beide größer oder gleich $2\cdot 1+1=3$ sind, keine Primzahl.

Um (B) nachzuweisen genügt es zu zeigen, dass alle positiven ganzen Zahlen n, für die 2n+1 keine Primzahl ist, im Zahlenfeld vorkommen.
Sei hierzu n eine solche Zahl, für die 2n+1 keine Primzahl ist. Dann hat 2n+1 einen Teiler u mit 1 < u < 2n+1 der, weil 2n+1 ungerade ist, ungerade sein muss.
Die Zahl v = (2n+1):u ist dann ebenfalls ungerade und größer als 1. Somit gibt es positive ganze Zahlen p und q, für die u = 2p+1 und v = 2q+1 ist, für die also
$2n+1 = u\cdot v = (2p+1)\cdot(2q+1)$ gilt. Dann ist aber die sich in der p-ten Zeile und q-ten Spalte befindende Zahl des Zahlenfeldes gleich

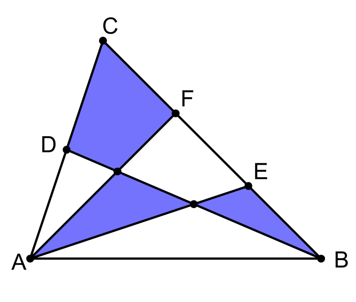
$$\begin{aligned} A(p,q) &= 2pq+p+q = \frac{1}{2}\cdot(4pq+2p+2q+1-1) \\ &= \frac{1}{2}\cdot((2p+1)(2q+1)-1) = \frac{1}{2}\cdot(2n+1-1) = n. \end{aligned}$$

Die Zahl n kommt also im Zahlenfeld vor.

Damit ist die Behauptung der Aufgabe bewiesen.

Aufgabe 4

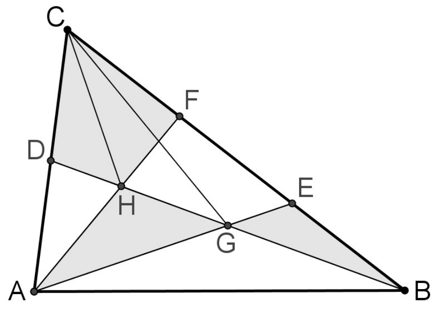
In einem Dreieck ABC ist D der Mittelpunkt der Seite [AC]. Die Punkte E und F teilen die Seite [BC] in drei gleich lange Teile.
In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte des schattierten und des nicht-schattierten Anteils des Dreiecks?



Lösung:

Das gesuchte Verhältnis ist 7:8.

1. Beweisvorschlag (mit Flächeninhalten):



G und H sind die Schnittpunkte von BD mit AE bzw. AF. Im Folgenden wird mit F(XYZ) bzw. F(WXYZ) der Flächeninhalt des Dreiecks XYZ bzw. des Vierecks WXYZ bezeichnet.
Da $\overline{AD}=\overline{CD}$ ist, gilt:
(1) F(ABD) = F(DBC)
(2) F(AGD) = F(DGC)
(3) F(AHD) = F(DHC)

(1) – (2) ergibt: F(ABG) = F(BCG) (4).
Da $\overline{BE} = \frac{1}{3}\cdot\overline{BC}$ ist, gilt zusammen mit (4): $F(BEG) = \frac{1}{3}\cdot F(BCG) = \frac{1}{3}\cdot F(ABG)$ bzw. $F(ABG) = 3\cdot F(BEG)$.
Deswegen gilt, wieder unter Benutzung von $\overline{BE} = \frac{1}{3}\cdot\overline{BC}$:

$$\frac{1}{3}\cdot F(ABC) = F(ABE) = F(ABG)+F(BEG) = 3\cdot F(BEG)+F(BEG) = 4\cdot F(BEG)$$

Folglich: $F(BEG) = \frac{1}{12}\cdot F(ABC)$ (5) und $F(ABG) = \frac{1}{4}\cdot F(ABC)$ (6).
(1) – (3) ergibt: F(ABH) = F(HBC) (7).
Da $\overline{BF} = \frac{2}{3}\cdot\overline{BC}$ ist, gilt zusammen mit (7): $F(HBF) = \frac{2}{3}\cdot F(HBC) = \frac{2}{3}\cdot F(ABH)$.
Deswegen gilt, wieder unter Benutzung von $\overline{BF} = \frac{2}{3}\cdot\overline{BC}$:

$$\frac{2}{3}\cdot F(ABC)=F(ABF)=F(ABH)+F(HBF)=F(ABH)+\frac{2}{3}\cdot F(ABH)=\frac{5}{3}\cdot F(ABH).$$

Folglich: $F(ABH) = \frac{2}{5}\cdot F(ABC)$ (8).
Mit (6) und (8) erhält man:

$$F(AGH) = F(ABH)-F(ABG) = \frac{2}{5}\cdot F(ABC)-\frac{1}{4}\cdot F(ABC) = \frac{3}{20}\cdot F(ABC) \quad (9).$$

Ferner gilt mit (8):

$$F(AHD) = F(ABD)-F(ABH) = \frac{1}{2}\cdot F(ABC)-\frac{2}{5}\cdot F(ABC) = \frac{1}{10}\cdot F(ABC).$$

Also folgt:

$$F(DHFC) = F(AFC)-F(AHD) = \frac{1}{3}\cdot F(ABC)-\frac{1}{10}\cdot F(ABC) = \frac{7}{30}\cdot F(ABC) \quad (10).$$

Mit (5), (9) und (10) erhält man:

$$F(\text{schattiert}) = F(BEG)+F(AGH)+F(DHFG) = \left(\frac{1}{12}+\frac{3}{20}+\frac{7}{30}\right)\cdot F(ABC) = \frac{7}{15}\cdot F(ABC)\ .$$

Daraus folgt weiter $F(\text{nicht schattiert}) = \frac{8}{15}\cdot F(ABC)$, was

F(schattiert) : F(nicht schattiert) = 7:8   bedeutet.

2. Beweisvorschlag (mit Koordinatenrechnung):

Das gegebene Dreieck ABC liege so in einem kartesischen Koordinatensystem, dass die Eckpunkte die Koordinaten A(0|0), B(b|0) und C(c|h) haben. Damit erhält man: $D\left(\frac{c}{2}|\frac{h}{2}\right)$,

$E\left(b+\frac{1}{3}\cdot(c-b)|\frac{h}{3}\right)=E\left(\frac{2}{3}\cdot b+\frac{c}{3}|\frac{h}{3}\right)$ und $F\left(b+\frac{2}{3}\cdot(c-b)|\frac{2}{3}\cdot h\right)=E\left(\frac{b}{3}+\frac{2}{3}\cdot c|\frac{2}{3}\cdot h\right)$.

Nun kann man folgende Geradengleichungen aufstellen:

$$BD:\vec{X}=\vec{B}+\lambda\cdot\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}\frac{c}{2}-b\\\frac{h}{2}\end{pmatrix},\quad AE:\vec{X}=\vec{A}+\mu\cdot\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\cdot b+\frac{c}{3}\\\frac{h}{3}\end{pmatrix}\text{ und}$$

$$AF:\vec{X}=\vec{A}+\nu\cdot\overrightarrow{AF}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}\frac{b}{3}+\frac{2}{3}\cdot c\\\frac{2}{3}\cdot h\end{pmatrix}.$$

Für den Schnittpunkt G der Geraden BD und AE gilt:

$$\text{(I)}\quad b+\lambda\cdot\frac{c}{2}-\lambda\cdot b=\mu\cdot\frac{2}{3}\cdot b+\mu\cdot\frac{c}{3}\qquad\text{(II)}\quad \lambda\cdot\frac{h}{2}=\mu\cdot\frac{h}{3}\ \text{ bzw. }\lambda=\frac{2}{3}\cdot\mu.$$

(II) in (I) eingesetzt liefert: $b+\mu\cdot\frac{c}{3}-\mu\cdot\frac{2}{3}\cdot b=\mu\cdot\frac{2}{3}\cdot b+\mu\cdot\frac{c}{3}$ bzw. $\mu=\frac{3}{4}$.

Dies wiederum ergibt in die Gleichung für AE eingesetzt:

$$G\left(\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\cdot b+\frac{c}{3}\right)|\frac{3}{4}\cdot\frac{h}{3}\right)=G\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{4}|\frac{h}{4}\right).$$

Für den Schnittpunkt H der Geraden BD und AF gilt:

$$\text{(I)}\ b+\lambda\cdot\frac{c}{2}-\lambda\cdot b=\nu\cdot\frac{b}{3}+\nu\cdot\frac{2}{3}\cdot c\qquad\text{(II)}\ \lambda\cdot\frac{h}{2}=\nu\cdot\frac{2}{3}\cdot h\ \text{ bzw. }\lambda=\frac{4}{3}\cdot\nu.$$

(II) in (I) eingesetzt: $b+\nu\cdot\frac{2}{3}\cdot c-\nu\cdot\frac{4}{3}\cdot b=\nu\cdot\frac{b}{3}+\nu\cdot\frac{2}{3}\cdot c$ bzw. $\nu=\frac{3}{5}$.

Dies ergibt in die Gleichung für AF eingesetzt:

$$H\left(\frac{3}{5}\left(\frac{b}{3}+\frac{2}{3}\cdot c\right)|\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot h\right)=H\left(\frac{b}{5}+\frac{2}{5}\cdot c|\frac{2}{5}\cdot h\right).$$

Damit gelten:

$$F(BEG)=F(ABE)-F(ABG)=\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{1}{3}\cdot h-\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{h}{4}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\cdot b\cdot h=\frac{1}{12}\cdot F(ABC)$$

$$F(AGH)=F(ABH)-F(ABG)=\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{2}{5}\cdot h-\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{h}{4}=\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot b\cdot h=\frac{3}{20}\cdot F(ABC)$$

$$F(AHD)=F(ABD)-F(ABH)=\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{1}{2}\cdot h-\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{2}{5}\cdot h=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot b\cdot h=\frac{1}{10}\cdot F(ABC)$$

und

$$F(DHFC)=F(AFC)-F(AHD)=\frac{1}{3}\cdot F(ABC)-\frac{1}{10}\cdot F(ABC)=\frac{7}{30}\cdot F(ABC).$$

Dies ergibt schließlich

$$F(\text{schattiert})=F(BEG)+F(AGH)+F(DHFG)=\left(\frac{1}{12}+\frac{3}{20}+\frac{7}{30}\right)\cdot F(ABC)=\frac{7}{15}\cdot F(ABC)$$

und damit $F(\text{nicht schattiert})=\frac{8}{15}\cdot F(ABC)$, was F(schattiert) : F(nicht schattiert) = 7:8 bedeutet.