16. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Lösungsbeispiele

für die Aufgaben der 2. Runde 2013/2014

Aufgabe 1

Eine Zahlenfolge beginnt mit den positiven Zahlen a und b. Die weiteren Zahlen werden gebildet, indem man abwechselnd die Summe und den Quotienten der beiden Vorgänger bestimmt. Der Quotient wird dabei berechnet, indem der Vorgänger durch den Vorvorgänger dividiert wird. So erhält man zum Beispiel für a = 8 und b = 2 die Zahlenfolge 8, 2, 10, 5, 15, 3, 18, 6,…
Bestimme alle Startzahlen a und b, bei denen die Zahl 2013 die 2014te Zahl der Folge ist.

Lösung:

Damit die 2014te Zahl der Folge die Zahl 2013 ist, muss $b=1510$ sein, a darf jede beliebige positive Zahl sein.

Beweisvorschlag 1 (Betrachten einer Teilfolge):

Da Summen und Quotienten positiver Zahlen stets selbst wieder positive Zahlen sind, kann es bei der Berechnung der Folgenglieder nie zu einer Division durch 0 kommen, so dass für alle positiven a und b die Folge beliebig weit, also insbesondere auch bis zum 2014ten Folgenglied, fortgesetzt werden kann.
Wir bezeichnen die Folgenglieder der Reihe nach mit $x_1, x_2, x_3, \ldots$ usw. Es gilt also $x_1=a$ und $x_2=b$. Bei ungeradem $n\geq 3$ ist dann $x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$ und bei geradem $n\geq 4$ ist $x_n=\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}}$.
Es gilt nun für jeden geraden Index $n\geq 2$: $x_{n+4}=x_n+1$. Dies beweisen wir durch direktes Nachrechnen, wobei benutzt wird, dass für ein gerades n auch n+4 und n+2 gerade und n+3 ungerade sind:

$$x_{n+4}=\frac{x_{n+3}}{x_{n+2}}=\frac{x_{n+2}+x_{n+1}}{x_{n+2}}=1+\frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}=1+\frac{x_{n+1}}{\frac{x_{n+1}}{x_n}}=1+x_n \;.$$

Hieraus folgt nun direkt

$$x_{2014}=x_{2010}+1=x_{2006}+2=\ldots=x_{2014-4k}+k$$

für alle positiven ganzen k, für die $2014-4k\geq 1$ ist. Weil $2014=4\cdot 503+2$ ist, gilt also auch

$$x_{2014}=x_2+503=b+503 \;.$$

Damit gilt $x_{2014}=2013$ genau dann, wenn $b=2013-503=1510$ ist; a kann unabhängig davon jede beliebige positive Zahl sein.

Beweisvorschlag 2 (Angabe von expliziten Formeln für die Folgenglieder):

Wie im ersten Beweis bezeichnen wir die Folgenglieder der Reihe nach mit $x_{1,}\, x_{2,}\, x_{3,} \ldots$ usw. Mit vollständiger Induktion nach $k \geq 0$ beweisen wir nun folgende allgemeine Formeln für alle Folgenglieder:

$$\begin{aligned} x_{4k+1} &= \left(\frac{a}{b}+k\right)\cdot(b+k) \\ x_{4k+2} &= b+k \\ x_{4k+3} &= \left(\frac{a}{b}+k+1\right)\cdot(b+k) \\ x_{4k+4} &= \frac{a}{b}+k+1. \end{aligned}$$

Durch direktes Nachrechnen gelingt der **Induktionsanfang für k=0:**

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{b}\cdot b=a \\ x_2 &= b \\ x_3 &= \left(\frac{a}{b}+1\right)\cdot b=a+b \\ x_4 &= \frac{a}{b}+1=\frac{a+b}{b} \end{aligned}$$

was tatsächlich den ersten vier Folgengliedern gemäß der Bildungsvorschrift entspricht.

Als **Induktionsannahme** gehen wir nun davon aus, die genannten Formeln gelten für ein $k \geq 0$.
Im **Induktionsschritt** zeigen wir dann schließlich, dass die Formeln dann auch für k+1 gelten. Dies geschieht wieder durch direktes Anwenden der Bildungsvorschrift der Folge:

$$x_{4(k+1)+1}=x_{4(k+1)}+x_{4(k+1)-1}=x_{4k+4}+x_{4k+3}=\frac{a}{b}+k+1+\left(\frac{a}{b}+k+1\right)\cdot(b+k)=\left(\frac{a}{b}+k+1\right)\cdot(b+k+1)$$

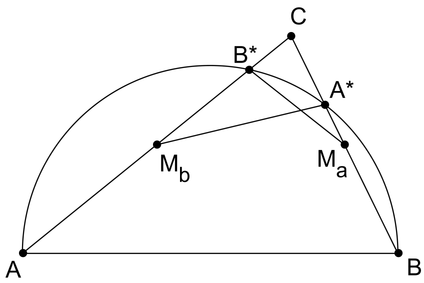
$$x_{4(k+1)+2}=\frac{x_{4(k+1)+1}}{x_{4(k+1)}}=\frac{\left(\frac{a}{b}+k+1\right)\cdot(b+k+1)}{\frac{a}{b}+k+1}=b+k+1$$

$$x_{4(k+1)+3}=x_{4(k+1)+2}+x_{4(k+1)+1}=b+k+1+\left(\frac{a}{b}+k+1\right)\cdot(b+k+1)=\left(\frac{a}{b}+k+2\right)\cdot(b+k+1) \text{ und}$$

$$x_{4(k+1)+4}=\frac{x_{4(k+1)+3}}{x_{4(k+1)+2}}=\frac{\left(\frac{a}{b}+k+2\right)\cdot(b+k+1)}{b+k+1}=\frac{a}{b}+k+2$$. Genau das war zu zeigen.

Wegen $2014=4\cdot 503+2$ gilt entsprechend der bewiesenen Formeln nun $x_{2014}=x_{4\cdot 503+2}=b+503$. Die Bedingung $x_{2014}=2013$ ist demnach genau dann erfüllt, wenn $b=2013-503=1510$ ist. Der Wert von a kann jede beliebige positive Zahl sein.

Aufgabe 2

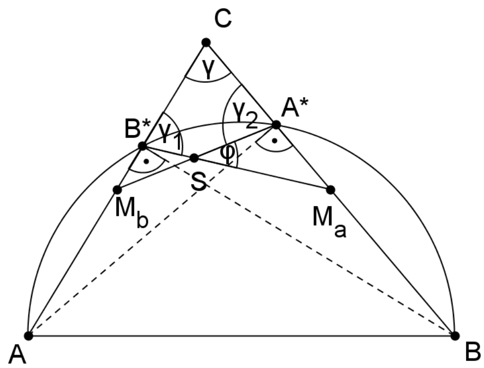


Im abgebildeten Dreieck ABC sind M_a und M_b Seitenmittelpunkte.
Das Dreieck wurde dabei so gewählt, dass der Halbkreis über [AB] die anderen Seiten zwischen M_a und C sowie zwischen M_b und C in den Punkten A bzw. B* schneidet.*
Bestimme in diesem Dreieck den Schnittwinkel der Geraden M_bA^* und M_aB^* in Abhängigkeit von den Innenwinkeln des Dreiecks ABC.

Lösung:

Bezeichnet man die Innenwinkel des Dreiecks ABC wie üblich mit α, β und γ, dann gilt für den gesuchten Schnittwinkel ϕ : $\phi=2\gamma-\alpha-\beta=3\gamma-180°$.

1. Beweisvorschlag (Mit Satz des Thales):

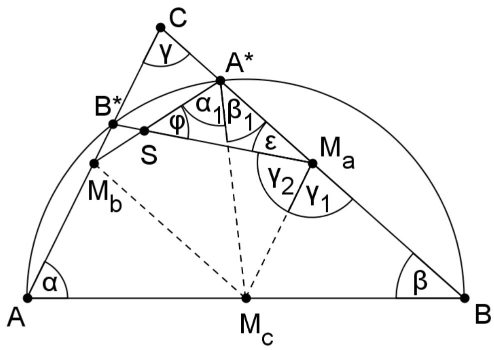


Nach Satz des Thales ist das Dreieck ABA* rechtwinklig mit rechtem Winkel bei A*. Deswegen ist auch das Dreieck CAA* rechtwinklig mit rechtem Winkel bei A*. Da der Punkt M_b Mittelpunkt der Hypotenuse [AC] dieses Dreiecks ist, ist er gleichzeitig nach der Umkehrung des Satzes des Thales auch Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks CAA*. Also sind die Strecken [M_bC] und [M_bA*] als Radien dieses Umkreises gleich lang, das Dreieck A*CM_b ist somit gleichschenklig mit Basis [A*C]. Daraus folgt mit den Winkelbezeichnungen der Skizze: $\gamma_2=\gamma$.

In völlig analoger Weise folgt die Gleichschenkligkeit des Dreiecks CB*M_a und damit $\gamma_1=\gamma$

Mit der Innenwinkelsumme im Viereck SA*CB* erhält man hieraus $\sphericalangle A^*SB^*=360°-3\gamma$ als einen der beiden Winkel, den die beiden Geraden M_bA^* und M_aB^* miteinander einschließen. Weil C außerhalb des Thaleskreises über [AB] liegt, ist $\gamma<90°$ und deswegen $\sphericalangle A^*SB^*=360°-3\gamma>360°-3\cdot 90°=90°$. Das bedeutet, dass tatsächlich der eingezeichnete Winkel ϕ als Nebenwinkel von $\sphericalangle A^*SB^*$ der Schnittwinkel der beiden Geraden ist, und es gilt $\phi=180°-\sphericalangle A^*SB^*=180°-(360°-3\gamma)=3\gamma-180°$.

2. Beweisvorschlag (Mit einer Spiegelung und gleichschenkligen Dreiecken):



Wir führen den Beweis in sechs Schritten:

1. M_c sei der Mittelpunkt der Seite [AB], ist also der Mittelpunkt des Halbkreises. Sowohl B als auch A* liegen auf dem Halbkreis. Daher ist das Dreieck M_cBA* gleichschenklig und hat gleich große Basiswinkel, d.h. $\beta_1=\beta$.

2. Man erhält den Punkt A*, wenn man den Punkt A an der Geraden M_cM_b spiegelt, denn:
   Der Bildpunkt A´ von A bei dieser Spiegelung liegt erstens auf dem Kreis um M_c, denn M_c liegt auf der Spiegelachse und so muss A´ gleich weit von M_c entfernt sein wie A. Zweitens liegt dieser Bildpunkt A´ auch auf der Geraden BC, denn diese Gerade hat von der Spiegelachse M_cM_b den gleichen Abstand wie der Punkt A (die Spiegelachse M_cM_b ist Mittelparallele im Dreieck). Also ist A´ einer der Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden BC. Offenbar kann es sich nicht um den Punkt B handeln, also muss es A* sein.

3. Da A* der Bildpunkt von A bei der Spiegelung an M_cM_b ist, folgt $\alpha_1=\alpha$.

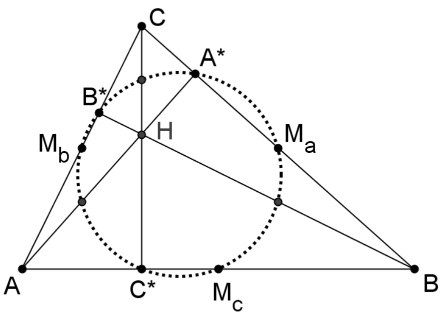
4. Weil M_c und M_a Seitenmittelpunkte sind, ist M_cM_a parallel zu AC. Daher ist $\gamma_1=\gamma$ (Stufenwinkel).

5. Analog zu 2) lässt sich zeigen, dass B* der Bildpunkt von B bei der Spiegelung an M_cM_a ist. Also ist $\gamma_2=\gamma_1$, und somit $\varepsilon=180°-\gamma_1-\gamma_2=180°-2\gamma$.

6. Nun betrachten wir die Winkel im Dreieck SM_aA^*: In die Gleichung $\phi+\varepsilon+\beta_1+\alpha_1=180°$ (Winkelsumme) setzen wir die bisherigen Ergebnisse $\varepsilon=180°-2\gamma$, $\beta_1=\beta$ und $\alpha_1=\alpha$ ein und erhalten $\phi=2\gamma-\alpha-\beta$. Wegen $\alpha+\beta+\gamma=180°$ folgt daraus auch $\phi=3\gamma-180°$. Weil C außerhalb des Thaleskreises über [AB] liegt, ist $\gamma<90°$ und damit $\phi=3\gamma-180°<3\cdot 90°-180°=90°$ also wirklich der Schnittwinkel der beiden Geraden.

Bemerkung:

Die vier für die Aufgabe wesentlichen Punkte A*, B*, M_a und M_b liegen zusammen mit dem dem dritten Seitenmittelpunkt M_c, dem dritten Höhenfußpunkt C* und den drei Mittelpunkten der Verbindungsstrecken der Ecken zum Höhenschnittpunkt H auf dem sogenannten *Neunpunktkreis* bzw. *Feuerbachkreis* des Dreiecks ABC.



Aufgabe 3

Sechs Kinder sitzen um einen Tisch. Jedes Kind hat eine gerade Anzahl an Bonbons. Auf Kommando gibt jedes Kind die Hälfte seiner Bonbons an seinen rechten Nachbarn ab; besitzt ein Kind danach eine ungerade Anzahl an Bonbons, nimmt es sich ein Bonbon aus dem unbegrenzten Vorrat.
Die Kinder wollen diesen Vorgang solange wiederholen, bis alle gleich viele Bonbons besitzen.
Ist dies immer möglich?

Lösung:

Es ist immer möglich, diesen Vorgang solange zu wiederholen, bis alle gleich viele Bonbons besitzen.

Beweisvorschlag:

Nach jedem beschriebenen Vorgang gibt es – sofern nicht schon alle Kinder gleich viele Bonbons haben – mindestens ein Kind mit größter Bonbonzahl g und mindestens ein Kind mit kleinster Bonbonanzahl $k<g$.

Die jeweils größte Bonbonanzahl g kann sich durch keinen Vorgang vergrößern:
Haben ein Kind und sein linker Nachbar vor dem Vorgang jeweils g Bonbons, dann geben beide jeweils $\frac{g}{2}$ Bonbons ab und das betrachtete Kind hat danach wieder die gerade Bonbonzahl g und muss keinen Bonbon vom Vorrat nachziehen. Hat das Kind oder sein linker Nachbar weniger als g , also höchstens $g-2$ Bonbons, dann hat es nach dem Vorgang durch eventuelles Nachziehen vom Vorrat insgesamt höchstens $\frac{g}{2}+\frac{g-2}{2}+1=g$ Bonbons. In keinem Fall hat das Kind nach dem Vorgang mehr als g Bonbons.

Die jeweils kleinste Bonbonanzahl k kann sich durch keinen Vorgang verringern, da ein Kind, das k Bonbons besitzt, $\frac{k}{2}$ Bonbons abgibt und von seinem linken Nachbarn mindestens $\frac{k}{2}$ Bonbons erhält. Hat ein Kind vor dem Vorgang mehr als k Bonbons, also mindestens $k+2$ Bonbons, dann hat es danach auch mindestens $\frac{k+2}{2}+\frac{k}{2}=k+1$ Bonbons, weil es von seinem linken Nachbarn mindestens $\frac{k}{2}$ Bonbons erhält.
Wenn nicht schon alle Kinder gleich viele Bonbons haben, gibt es unter allen Kindern mit der kleinsten Bonbonanzahl k eines, dessen linker Nachbar mehr, also mindestens $k+2$ Bonbons hat. Nach dem Vorgang hat dieses Kind dann mindestens $\frac{k}{2}+\frac{k+2}{2}=k+1$ Bonbons.

Nach jedem Vorgang, vor dem nicht alle Kinder gleich viele Bonbons haben, verringert sich also die Anzahl der Kinder mit kleinster Bonbonanzahl um mindestens eins, oder die kleinste Bonbonzahl steigt. Da ersteres bei fester kleinster Bonbonzahl höchstens viermal geschehen kann, erhöht sich also die kleinste Bonbonzahl jeweils spätestens nach fünf Vorgängen, vor denen nicht alle Kinder gleich viele Bonbons haben .
Da sich die anfangs größte Bonbonanzahl nicht vergrößern kann und die jeweils kleinste Bonbonanzahl diese größte Bonbonanzahl nie übersteigen kann, darf eine solche Erhöhung der kleinsten Bonbonzahl auch nur endlich oft geschehen. Das bedeutet, dass nach endlich vielen Vorgängen alle Bonbonanzahlen gleich sein müssen.

Bemerkung:

Aus dem Beweisvorschlag folgt auch, dass bei anfänglich größter Bonbonanzahl g und kleinster Bonbonanzahl k höchstens $5\cdot\frac{g-k}{2}$ Vorgänge nötig sind, um alle Bonbonanzahlen auszugleichen.

Aufgabe 4

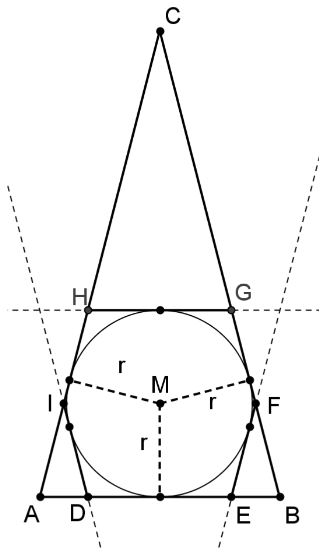
Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck, in dem jeder Schenkel doppelt so lang wie die Basis ist.
Spiegelt man das Dreieck an seinem Inkreismittelpunkt, so überlappt sich das Spiegelbild mit dem ursprünglichen Dreieck in einem Sechseck.
In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte dieses Sechsecks und des ursprünglichen Dreiecks?

Lösung:

Das gesuchte Flächenverhältnis ist 14 : 25.

Vorbemerkung:

Die Eckpunkte des Dreiecks werden mit A, B und C, wobei [AB] die Basis ist, der Mittelpunkt des Inkreises mit M, sein Radius mit r bezeichnet.
Bei einer Punktspiegelung werden Geraden auf parallele Geraden abgebildet. Gerade und Bildgerade haben vom Spiegelpunkt den gleichen Abstand.
Da AB, BC und CA Tangenten an den Inkreis sind, sind demnach auch ihre Bildgeraden Tangenten an den Inkreis, die jeweils den Abstand 2r von der entsprechenden Dreiecksseite haben. Diese Tangenten schneiden von Dreieck ABC drei Dreiecke ab, so dass das genannte Sechseck übrig bleibt. Seine Eckpunkte werden mit D, E, F, G, H und I bezeichnet.

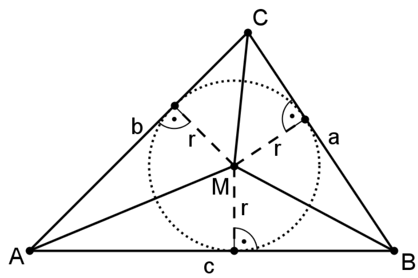


Beweisvorschlag 1 (Berechnung der Flächen der abgeschnittenen Dreiecke):

Vor dem eigentlichen Beweis zeigen wir folgende **Hilfsaussage**:

Für jedes Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c, den entsprechenden Höhen h_a, h_b und h_c und dem Inkreisradius r gilt:

$$r=\frac{a\cdot h_a}{a+b+c}=\frac{b\cdot h_b}{a+b+c}=\frac{c\cdot h_c}{a+b+c}\ .$$



Zum **Beweis der Hilfsaussage** verbinden wir den Inkreismittelpunkt M des Dreiecks mit den drei Ecken, wodurch das gesamte Dreieck in drei kleinere Dreiecke zerlegt wird. Dabei gilt dann für die Flächeninhalte dieser Dreiecke

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c=A_{\Delta ABC}=A_{\Delta BCM}+A_{\Delta CAM}+A_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}a\cdot r+\frac{1}{2}\cdot b\cdot r+\frac{1}{2}\cdot c\cdot r=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(a+b+c)$$
.

Multipliziert man diese Gleichungskette mit 2 und dividiert jeweils durch (a+b+c) so erhält man die Hilfsaussage.

Um das gesuchte Verhältnis nun zu berechnen, bezeichnen wir zunächst die Längen der Höhen auf den Seiten [DI], [EF] bzw. [HG] in den abgeschnittenen Dreiecken mit h_a', h_b' und h_c'. Sind h_a, h_b und h_c die Längen der Höhen im Dreieck ABC so gilt

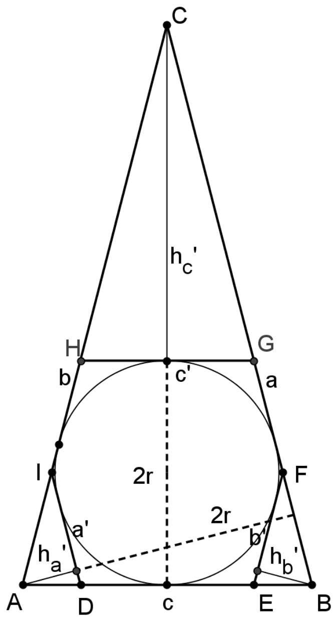
$$h_a' = h_a - 2\cdot r = h_a - \frac{2\cdot a\cdot h_a}{a+b+c} = h_a\cdot\left(1 - \frac{2\cdot a}{a+b+c}\right) \text{ und ganz analog}$$

$$h_b' = h_b\cdot\left(1 - \frac{2\cdot b}{a+b+c}\right) \text{ bzw. } h_c' = h_c\cdot\left(1 - \frac{2\cdot c}{a+b+c}\right).$$

Da im Dreieck ABC nach Voraussetzung $a = b = 2\cdot c$ gilt, folgen weiter die Gleichungen

$$h_a' = h_a\cdot\left(1 - \frac{2\cdot 2\cdot c}{2\cdot c+2\cdot c+c}\right) = \frac{1}{5}\cdot h_a \text{ und analog } h_b' = \frac{1}{5}\cdot h_b \text{, sowie}$$

$$h_c' = h_c\cdot\left(1 - \frac{2\cdot c}{2\cdot c+2\cdot c+c}\right) = \frac{3}{5}\cdot h_c.$$



Mit den Strahlensätzen folgt hieraus auch für die entsprechenden Grundseitenlängen $a' = \overline{DI}$, $b' = \overline{EF}$ und $c' = \overline{HG}$ in den abgeschnittenen Dreiecken: $a' = \frac{1}{5}\cdot a$, $b' = \frac{1}{5}\cdot b$ und $c' = \frac{3}{5}\cdot c$. Damit lässt sich nun der Flächeninhalt des Sechsecks direkt berechnen:

$$\begin{aligned}
A_{Sechseck} &= A_{\Delta ABC} - A_{\Delta ADI} - A_{\Delta EBF} - A_{\Delta HGC}\\
&= A_{\Delta ABC} - \frac{1}{2}\cdot a'\cdot h_a' - \frac{1}{2}\cdot b'\cdot h_b' - \frac{1}{2}\cdot c'\cdot h_c'\\
&= A_{\Delta ABC} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot a\cdot\frac{1}{5}\cdot h_a - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot b\cdot\frac{1}{5}\cdot h_b - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot c\cdot\frac{3}{5}\cdot h_c\\
&= A_{\Delta ABC} - \frac{1}{25}\cdot A_{\Delta ABC} - \frac{1}{25}\cdot A_{\Delta ABC} - \frac{9}{25}\cdot A_{\Delta ABC} = \frac{14}{25}\cdot A_{\Delta ABC}.
\end{aligned}$$

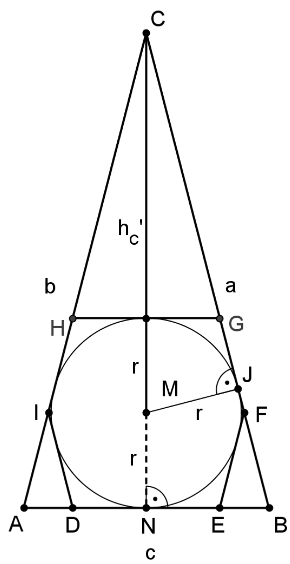
Also gilt: $A_{Sechseck} : A_{\Delta ABC} = 14 : 25$.

Beweisvorschlag 2 (Direkte Berechnung der Sechsecksfläche):

Wir bezeichnen mit J bzw. N die Lotfußpunkte von M auf BC bzw. AB. Dann sind die Dreiecke CMJ und CNB ähnlich, denn sie stimmen sowohl im Winkel $\sphericalangle MCJ = \sphericalangle NCB$ als auch im rechten Winkel bei N bzw. J überein.
Bezeichnen also h_c bzw. h_c' die Höhen auf den Basen in den (wegen der Parallelität von HG und AB) ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken ABC und HGC so folgt:

$$(h_c - r) : r = a : \frac{c}{2} = 2c : \frac{c}{2} = 4 \text{ und damit } h_c - r = 4\cdot r \text{ bzw. } r = \frac{1}{5}\cdot h_c.$$

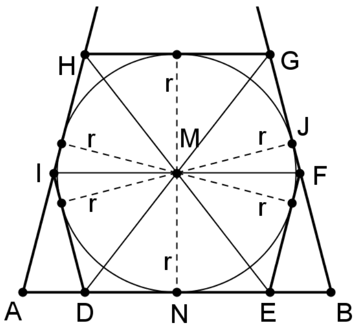
Das bedeutet auch $h_c' = h_c - 2\cdot r = h_c - \frac{2}{5}\cdot h_c = \frac{3}{5}\cdot h_c$. Aufgrund der Strahlensätze folgt daraus $\overline{HG} = \frac{3}{5}\cdot c$ und $\overline{HC} = \frac{3}{5}\cdot b$ also $\overline{AH} = \frac{2}{5}\cdot b$.



Da das Sechseck DEFGHI nach Konstruktion punktsymmetrisch ist, gilt $\overline{HG}=\overline{DE}$, $\overline{HI}=\overline{EF}$ und $\overline{GF}=\overline{ID}$. Das bedeutet, dass auch $\overline{DE}=\frac{3}{5}\cdot c$ ist.
Aufgrund der Parallelität von ID und BC ist das Dreiecke ADI ähnlich zum Dreieck ABC, also insbesondere gleichschenklig. Deswegen ergibt sich für die anderen Sechseckseiten $\overline{HI}+\overline{ID}=\overline{HI}+\overline{IA}=\overline{AH}=\frac{2}{5}\cdot b=\frac{2}{5}\cdot 2\cdot c=\frac{4}{5}\cdot c$ und aufgrund der Achsensymmetrie der Figur auch $\overline{EF}+\overline{FG}=\frac{4}{5}\cdot c$.

Zerlegt man das Sechseck DEFGHI nun in die sechs Dreiecke MDE, MEF, MFG, MGH, MHI und MID, in denen jeweils eine Sechseckseite als Grundseite eine zugehörige Höhe der Länge r hat, so erhält man den Flächeninhalt:

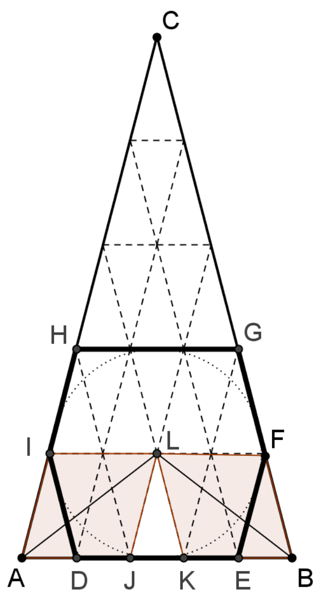
$$\begin{aligned} A_{\text{Sechseck}} &= A_{\Delta MDE}+A_{\Delta MEF}+A_{\Delta MFG}+A_{\Delta MGH}+A_{\Delta MHI}+A_{\Delta MID} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\overline{DE}\cdot r+\frac{1}{2}\cdot\overline{EF}\cdot r+\frac{1}{2}\cdot\overline{FG}\cdot r+\frac{1}{2}\cdot\overline{GH}\cdot r+\frac{1}{2}\cdot\overline{HI}\cdot r+\frac{1}{2}\cdot\overline{ID}\cdot r \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HI}+\overline{ID}\right)\cdot r \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot c+\frac{4}{5}\cdot c+\frac{3}{5}\cdot c+\frac{4}{5}\cdot c\right)\cdot\frac{1}{5}\cdot h_c \\ &= \frac{14}{25}\cdot\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c=\frac{14}{25}\cdot A_{\Delta ABC} \end{aligned}$$



Also gilt: $A_{\text{Sechseck}}:A_{\Delta ABC}=14:25$.

Beweisvorschlag 3 (Mit einer Parkettierung des Dreiecks):

Teilt man jede Dreiecksseite des Dreiecks ABC in fünf gleiche Teile und zeichnet Parallelen zu den Dreiecksseiten, so zerlegen diese Parallelen das Dreieck ABC in 25 kleine kongruente, zum Ausgangsdreieck ähnliche gleichschenklige Dreiecke.
In diesen ist also ebenfalls die Basis jeweils halb so lang wie ein Schenkel.
Im Bild rechts sind zusätzlich zu A, B und C weitere Eckpunkte D bis L der kleinen Dreiecke markiert.
Wegen $\overline{AJ}=\overline{AD}+\overline{DJ}=2\cdot\overline{AD}=\overline{AI}$ ist das Parallelogramm AJLI sogar eine Raute, in der dann AL als Diagonale und Symmetrieachse gleichzeitig Innenwinkelhalbierende des Winkels bei A ist.
Genauso ist BL Innenwinkelhalbierende des Winkels bei B.
Somit ist L als Schnittpunkt dieser beiden Winkelhalbierenden der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.
Da weiter aufgrund der Konstruktion der Parkettierung (bzw. aufgrund der Strahlensätze) benachbarte Parallelen zu einer Dreiecksseite jeweils gleichen Abstand untereinander haben, hat L denselben Abstand von BC wie von ID, die Strecke [ID] liegt also auf dem Bild der Gerade BC bei Punktspiegelung an L.



Genauso sieht man, dass die Strecken [HG] und [EF] auf den Bildern der Geraden AB bzw. AC bei Punktspiegelung an L liegen.
Das Sechseck DEFGHI ist also das gesuchte Sechseck, in dem sich das Dreieck ABC und das an L punktgespiegelte Dreieck überschneiden. Da es aus genau 14 der 25 kleinen Dreiecke besteht, ist das gesuchte Flächenverhältnis 14:25.