15. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Beispiellösungen 2. Runde 2012/2013

Aufgabe 1

Die Schülerzahlen der Klassen 9a mit 20 Schülern und 9b mit 25 Schülern sollen aneinander angeglichen werden. „Prima“, sagt der Mathelehrer, „das machen wir doch so, dass sich in beiden Klassen der Durchschnitt der Mathenoten verbessert.“ In der 9a ist der Durchschnitt der Mathematiknoten 3,3. In der 9b haben je sechs Schüler die Noten 1, 2, 3 bzw. 4 und ein Schüler die Note 5.

Wie viele Möglichkeiten gibt es dann, aus den 25 Schülern der 9b zwei oder drei für den Wechsel in die 9a auszuwählen?

Lösung:

Es gibt **866** Möglichkeiten.

Beweisvorschlag:

Behauptung 1:
Der Durchschnitt der Mathenoten in der 9b vor dem Wechsel beträgt 2,6. Er verbessert sich genau dann, wenn der Notendurchschnitt D der wechselnden Schüler schlechter als 2,6 ist.
Gleichzeitig muss er besser als 3,3 sein, damit sich auch der Durchschnitt in der 9a verbessert.
Insgesamt muss also $2{,}6 < D < 3{,}3$ *gelten.*

Beweis der Behauptung 1:
Der Notendurchschnitt in der 9b vor dem Wechsel ist

$$D_{alt,9b} = \frac{6 \times 1 + 6 \times 2 + 6 \times 3 + 6 \times 4 + 5}{25} = \frac{65}{25} = 2{,}6 .$$

Nun wechseln m Schüler die Klasse. Wenn S die Summe der Noten der wechselnden Schüler ist, so ist der neue Notendurchschnitt der 9b

$$D_{neu,9b} = \frac{65 - S}{25 - m} .$$

Dieser ist genau dann besser als der alte, wenn $\frac{65 - S}{25 - m} < \frac{65}{25}$ gilt.

Durch Äquivalenzumformungen ergibt sich:

$$\frac{65-S}{25-m} < \frac{65}{25}$$
$$\Leftrightarrow (65-S)\cdot 25 < 65\cdot(25-m)$$
$$\Leftrightarrow 65\cdot 25 - S\cdot 25 < 65\cdot 25 - 65\cdot m$$
$$\Leftrightarrow -S\cdot 25 < -65\cdot m$$
$$\Leftrightarrow S\cdot 25 > 65\cdot m$$
$$\Leftrightarrow \frac{65}{25} < \frac{S}{m}$$

Dies bedeutet aber gerade, dass der Durchschnitt $D=\frac{S}{m}$ der wechselnden Schüler schlechter als der alte Durchschnitt $\frac{65}{25} = 2{,}6$ ist.

In der 9a ist der Durchschnitt vor dem Wechsel 3,3. Wenn $S_{alt,9a}$ die Summe der Noten in dieser Klasse bezeichnet, so gilt also $D_{alt,9a}=\frac{S_{alt,9a}}{20}=3{,}3$ bzw. $S_{alt,9a} = 3{,}3\cdot 20 = 66$.

Nach dem Wechsel der m Schüler mit Notensumme S ist der neue Durchschnitt hier $D_{neu,9a} = \frac{66+S}{20+m}$. Dieser ist genau dann besser als der alte, wenn $\frac{66+S}{20+m} < \frac{66}{20}$.

Analog zu obigen Umformungen ist diese Ungleichung äquivalent zu $D = \frac{S}{m} < \frac{66}{20} = 3{,}3$. Somit ist Behauptung 1 bewiesen.

Behauptung 2:
a) Es gibt 15 Möglichkeiten, um 2 Schüler aus 6 Schülern auszuwählen.
b) Es gibt 20 Möglichkeiten, um 3 Schüler aus 6 Schülern auszuwählen.

Beweis der Behauptung 2:
a) Man kann die 15 Möglichkeiten direkt angeben:
Sind A, B, C, D, E und F die 6 Schüler, so sind AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF und EF alle Möglichkeiten, ein Paar von zwei Schülern auszuwählen. Man beachte, dass es hierbei nicht auf die Reihenfolge ankommt: AD und DA entspricht dem gleichen Paar, das aus den Schülern A und D besteht.

Die Anzahl der Möglichkeiten kann man auch rechnerisch bestimmen:
Für den ersten Schüler hat man 6 Möglichkeiten zur Wahl, für den zweiten bleiben noch 5 Möglichkeiten. Unter *Berücksichtigung der Reihenfolge* gibt es also $6\cdot 5 = 30$ Möglichkeiten. Es gibt aber jeweils zwei Möglichkeiten, die beiden Schüler anzuordnen, z.B. AD und DA. Je zwei der 30 Möglichkeiten gehören also zum gleichen Schülerpaar. Also gibt es $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ Möglichkeiten.

b) Auch hier kann man alle 20 Möglichkeiten direkt angeben: Diese sind ABC, ABD, ABE, ABF, ACD, ACE, ACF, ADE, ADF, AEF, BCD, BCE, BCF, BDE, BDF, BEF, CDE, CDF, CEF, DEF.

Rechnerisch erhält man das selbe Ergebnis wie folgt: Unter *Berücksichtigung der Reihenfolge* gibt es hier $6 \times 5 \times 4 = 120$ Möglichkeiten.
Nun muss man überlegen, wie viele dieser 120 Möglichkeiten jeweils zum gleichen Trio von Schülern gehören. Zum Beispiel für das Trio A, C und F gibt es sechs mögliche Umordnungen: ACF, AFC, CAF, CFA, FAC und FCA. Analog ist dies für jedes andere Trio, denn für Platz eins hat man 3 Möglichkeiten, für Platz zwei noch 2 Möglichkeiten, der dritte und letzte Platz ist eindeutig. Für jedes Trio gibt es also $3 \times 2 \times 1 = 6$ Umordnungen. Je 6 der 120 Möglichkeiten gehören also zum gleichen Schülertrio.
Somit gibt es $\frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$ Möglichkeiten, um 3 Schüler aus 6 Schülern auszuwählen und Behauptung 2 ist bewiesen.

Für den weiteren Beweis betrachten wir nun die beiden möglichen Fälle:

1. Fall: *Es wechseln drei Schüler.*

Nach Behauptung 1 gilt für den Durchschnitt $D = \frac{S}{3}$ der drei wechselnden Schüler $2{,}6 < D < 3{,}3$. Somit ist $3 \times 2{,}6 = 7{,}8 < S < 3 \times 3{,}3 = 9{,}9$. Da die Notensumme ganzzahlig ist, folgt also $8 \leq S \leq 9$.

Die Notensumme S = 8 ergibt sich z.B., wenn zwei der wechselnden Schüler die Note 2 haben, und einer die Note 4. Da es 15 Möglichkeiten gibt, um aus den 6 Schülern mit der Note 2 zwei Schüler auszuwählen (Behauptung 2a), und 6 Möglichkeiten, einen Schüler mit der Note 4 auszuwählen, hat man für diese Notenkombination insgesamt $15 \times 6 = 90$ Möglichkeiten.

Die folgende Übersicht zeigt alle möglichen Notenkombinationen mit den Notensummen 8 und 9. An der systematischen Auflistung erkennt man, dass keine Notenkombination fehlt. Zu jeder Möglichkeit wird die zugehörige Anzahl der Möglichkeiten bestimmt. Die fett geschriebene Zahl **15** ergibt sich dabei aus Behauptung 2a. Die kursiv geschriebene Zahl *20* für die Auswahl von drei Schülern mit Note 3 ergibt sich aus Behauptung 2b.

Notensumme S = 8		**Notensumme S = 9**	
Noten	*Zahl der Möglichkeiten*	*Noten*	*Zahl der Möglichkeiten*
1, 2, 5	6 · 6 · 1 = 36	1, 3, 5	6 · 6 · 1 = 36
1, 3, 4	6 · 6 · 6 = 216	1, 4, 4	6 · **15** = 90
2, 2, 4	**15** · 6 = 90	2, 2, 5	**15** · 1 = 15
2, 3, 3	6 · **15** = 90	2, 3, 4	6 · 6 · 6 = 216
		3, 3, 3	*20*

2. Fall: *Es wechseln zwei Schüler.*

Nach Behauptung 1 gilt für den Durchschnitt $D = \frac{S}{2}$ der zwei wechselnden Schüler $2{,}6 < D < 3{,}3$. Somit ist $2 \times 2{,}6 = 5{,}2 < S < 2 \times 3{,}3 = 6{,}6$. Da die Notensumme ganzzahlig ist, folgt S = 6.

Notensumme S = 6	
Noten	*Zahl der Möglichkeiten*
1, 5	6 · 1 = 6
2, 4	6 · 6 = 36
3, 3	**15**

Addiert man alle Anzahlen, so ergibt sich 866.

Variante zu Behauptung 2:

Der Beweis wird kürzer, wenn man Binomialkoeffizienten kennt. Die folgende allgemeinere Version von Behauptung 2 darf ohne Beweis verwendet werden:

Die Anzahl der Möglichkeiten, k Schüler aus n Schülern auszuwählen, ist gleich dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Hierbei ist $k! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (k-1) \times k$.

Somit gibt es $\binom{6}{2} = \frac{6\,!}{4\,!\;2\,!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\;\cdot\;2\cdot1} = 15$ *Möglichkeiten, zwei Schüler aus sechs Schülern auszuwählen. Und es gibt* $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 20$ *Möglichkeiten, um drei Schüler aus sechs Schülern auszuwählen.*

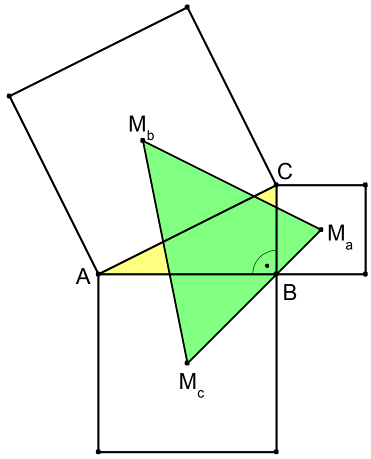
Diese Formel findet sich in vielen Büchern oder Formelsammlungen, der Vollständigkeit halber hier eine Beweisskizze:
Um aus n Schülern k Schüler *unter Berücksichtigung der Reihenfolge* auszuwählen, gibt es $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten, denn für die Auswahl des ersten Schülers hat man n Möglichkeiten, für die Auswahl des zweiten Schülers nur noch $n-1$ Möglichkeiten, …, und für die Auswahl des k-ten Schülers $n-(k-1) = n-k+1$ Möglichkeiten.
Da es aber nicht auf die Reihenfolge ankommt, sondern nur darauf, welche k Schüler ausgewählt wurden, hat man auf diese Weise zu viele Möglichkeiten gezählt.
Man kann k ausgewählte Schüler auf $k! = k \times (k-1) \times \ldots \times 1$ verschiedene Arten umordnen. Also gehören jeweils k! Möglichkeiten zur gleichen Auswahl von k Schülern.

Somit gibt es $\frac{n!}{(n-k)!} : k! = \frac{n!}{(n-k)! \times k!} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten für die Auswahl von k Schülern aus n Schülern.

Aufgabe 2

Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist die Kathete [BC] halb so lang wie die Kathete [AB]. Über den Seiten des Dreiecks ABC werden nach außen Quadrate errichtet. Deren Diagonalenschnittpunkte sind mit M_c, M_a und M_b bezeichnet.

Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke ABC und $M_aM_bM_c$.

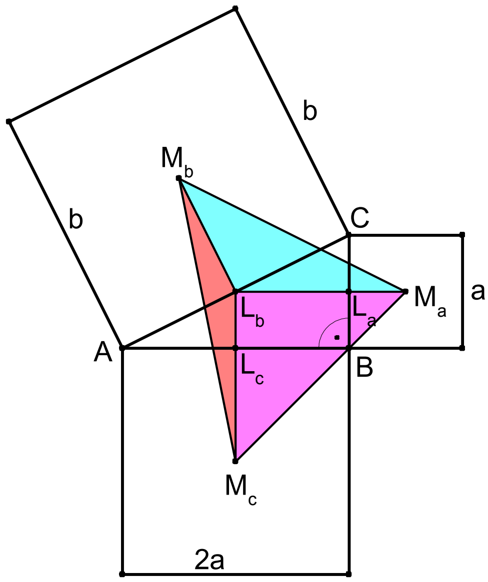


Lösung:

$A(ABC) : A(M_aM_bM_c) = 4 : 9$

1. Beweisvorschlag (Zerlegung des Dreiecks $M_aM_bM_c$):

Die Lote von den Diagonalenschnittpunkten M_a und M_c auf die Katheten [BC] bzw. [BA] halbieren diese Seiten in den Punkten L_a bzw. L_c. Da das Dreieck ABC nach Voraussetzung bei B einen rechten Winkel besitzt, sind diese Lote zu den Katheten [BA] bzw. [BC] parallel, also Mittelparallelen des Dreiecks ABC und halbieren folglich auch die Hypotenuse [AC] im Punkt L_b.



Da das Lot vom Diagonalenschnittpunkt M_b auf die Hypotenuse [AC] diese Seite [AC] ebenfalls halbiert, zerlegen diese drei Lote das Dreieck $M_aM_bM_c$ in die drei Teildreiecke $L_bM_cM_a$, $L_bM_aM_b$ und $L_bM_bM_c$.

Sei a die Länge der Seite [BC] und b die Länge der Seite [AC]. Dann gilt nach Aufgabenstellung $\overline{AB} = 2a$.

Da M_a und M_b die Mittelpunkte der Kathetenquadrate sind, gilt außerdem

$$\overline{L_aM_a} = \overline{L_aB} = \overline{L_bL_c} = \frac{a}{2} \text{ und } \overline{L_cM_c} = \overline{L_cB} = \overline{L_aL_b} = a. \qquad (*)$$

Schritt 1: Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Es ist $A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = a^2$.

Schritt 2: Flächeninhalt des Dreiecks $L_bM_cM_a$.

Nach (*) ist $A(L_bM_cM_a) = \frac{1}{2} \cdot \overline{L_bM_a} \cdot \overline{L_bM_c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} a \cdot \frac{3}{2} a = \frac{9}{8} a^2$.

Schritt 3: **Flächeninhalt des Dreiecks $L_bM_aM_b$.**

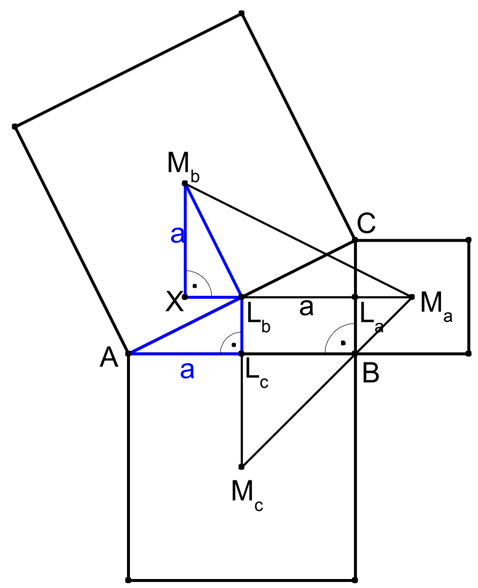
Durch eine Drehung um 90° im Uhrzeigersinn um L_b geht das Dreieck AL_cL_b in das Dreieck M_bXL_b über, denn $\overline{L_bM_b} = \overline{L_bA} = \frac{b}{2}$ (vgl. (*)).

Hierbei liegt X auf der Geraden durch L_b und M_a. Die Strecke $[XM_b]$ ist senkrecht zu dieser Geraden. Nimmt man also $[L_bM_a]$ als Grundseite des Dreiecks $L_bM_aM_b$, so ist $[XM_b]$ die zugehörige Höhe mit

$\overline{XM_b} = \overline{AL_c} = a$.

Somit ergibt sich

$$A(L_bM_aM_b) = \frac{1}{2} \times \overline{L_bM_a} \times \overline{XM_b} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} a \times a = \frac{3}{4} a^2$$



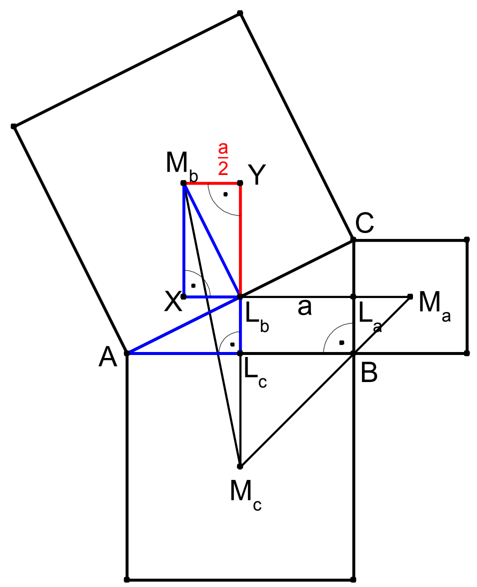
Schritt 4: **Flächeninhalt des Dreiecks $L_bM_bM_c$.**

Spiegelt man das Dreieck M_bXL_b am Mittelpunkt der Strecke $[M_bL_b]$, so erhält man das Dreieck M_bL_bY.

Hierbei liegt Y auf der Geraden durch L_b und M_c. Die Strecke $[YM_b]$ steht senkrecht zu dieser Geraden. Nimmt man also $[L_bM_c]$ als Grundseite des Dreiecks $L_bM_bM_c$, so ist $[YM_b]$ die zugehörige Höhe mit $\overline{YM_b} = \overline{XL_b} = \overline{L_bL_c} = \frac{a}{2}$ (vgl. (*)).

Somit ergibt sich

$$A(L_bM_bM_c) = \frac{1}{2} \times \overline{L_bM_c} \times \overline{YM_b} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} a \times \frac{1}{2} a = \frac{3}{8} a^2 .$$



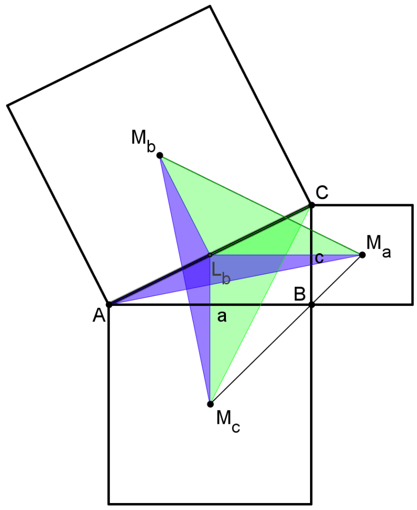
Schritt 5: **Flächeninhalt des Dreiecks $M_aM_bM_c$.**

Es ist $A(M_aM_bM_c) = A(L_bM_cM_a) + A(L_bM_aM_b) + A(L_bM_bM_c) = \frac{9}{8}a^2 + \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{8}a^2 = \frac{9}{4}a^2$.

Somit ergibt sich für das gesuchte Flächenverhältnis:

$$A(ABC) : A(M_aM_bM_c) = a^2 : \frac{9}{4}a^2 = 1 : \frac{9}{4} = 4 : 9 .$$

2. Beweisvorschlag (mit Verallgemeinerung):



Die Längen der Seiten AB und BC seien zunächst beliebig gewählt und mit *c* bzw. *a* bezeichnet. L_b sei der Mittelpunkt der Seite [AC]. Es ist dann $A(ABC) = \frac{1}{2}ac$.

Aus einfachen Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks und des Quadrates folgt

$\overline{L_bM_a} = \overline{L_bM_c} = \frac{1}{2}(a+c)$; ferner $\overline{M_bL_b} = \overline{AL_b} = \overline{CL_b}$ und $\angle M_bL_bM_c = 90°$.

Wir zerlegen das Dreieck $M_aM_bM_c$ in die Teildreiecke $M_aL_bM_b$, $M_bL_bM_c$, $M_cL_bM_a$.

Die Drehung um L_b um 90° im Uhrzeigersinn überführt das Dreieck $M_aL_bM_b$ in das Dreieck M_cL_bC; es ist also

$$A(M_aL_bM_b) = A(M_cL_bC) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(a+c)\cdot\frac{1}{2}c = \frac{1}{8}c(a+c).$$

Die Drehung um L_b um 90° gegen den Uhrzeigersinn überführt das Dreieck $M_bL_bM_c$ in das Dreieck AL_bM_a; es ist also

$$A(M_bL_bM_c) = A(AL_bM_a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(a+c)\cdot\frac{1}{2}a = \frac{1}{8}a(a+c).$$

Schließlich ist $A(M_cL_bM_a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(a+c)\cdot\frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{8}(a+c)^2$.

Damit ist $A(M_aM_bM_c) = \frac{1}{8}c(a+c) + \frac{1}{8}a(a+c) + \frac{1}{8}(a+c)^2 = \frac{1}{4}(a+c)^2$; das gesuchte Verhältnis ist demnach

$\dfrac{\frac{1}{4}(a+c)^2}{\frac{1}{2}ac} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + 2 + \frac{c}{a}\right)$. Für $c = 2a$ ergibt sich sofort $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 2 + \frac{2}{1}\right) = \frac{9}{4}$.

Bemerkung: Da Summe aus Zahl und Kehrwert dieser Zahl stets größer als 2 ist, ist das Verhältnis der beiden Flächen stets größer als 2.

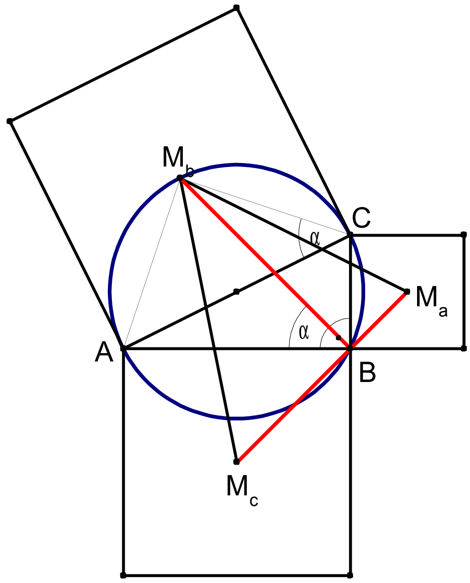
3. Beweisvorschlag (Umfangswinkelsatz):

Wie in Beweisvorschlag 1 sei $a = \overline{BC}$, somit $2a = \overline{AB}$.

Schritt 1: Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Es ist $A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = a^2$.

Schritt 2: M_bB steht senkrecht auf M_aM_c.



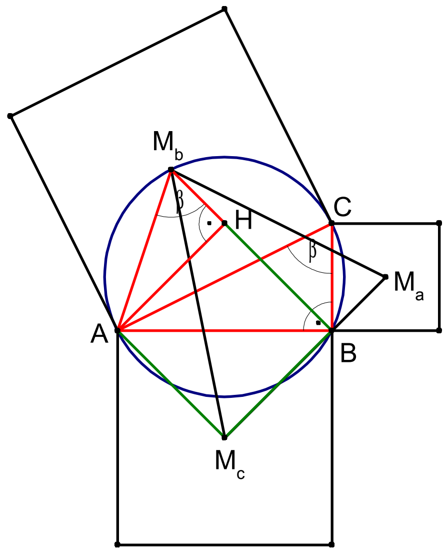
Da das Dreieck ABC rechtwinklig mit rechtem Winkel bei B ist, liegt B auf dem Thaleskreis über [AC]. Zugleich ist aber auch ACM_b rechtwinklig, denn die Diagonalen im Quadrat stehen senkrecht aufeinander.
Daher liegt M_b ebenfalls auf dem Thaleskreis über [AC], die Punkte $ABCM_b$ liegen also auf einem gemeinsamen Kreis.
Nach dem Umfangswinkelsatz gilt
$\alpha = \sphericalangle M_b B A = \sphericalangle M_b C A = 45°$, denn die Diagonalen im Quadrat halbieren aber die Winkel an den Ecken. Somit gilt:
$\sphericalangle M_b B M_c = \sphericalangle M_b B A + \sphericalangle ABM_c = 45° + 45° = 90°$.

Nach Schritt 2 ist $[M_bB]$ die zur Grundseite $[M_cM_a]$ gehörige Höhe im Dreieck $M_aM_bM_c$.

Schritt 3: Berechnung der Länge der Grundseite $[M_aM_c]$.
Die Strecken $[BM_c]$ und $[BM_a]$ sind beide halbe Diagonalen von Quadraten. Eine Diagonale im Quadrat der Seitenlänge a hat die Länge $\sqrt{2}a$. Somit ist

$$\overline{M_aM_c} = \overline{M_cB} + \overline{BM_a} = \frac{\sqrt{2}(2a)}{2} + \frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}a .$$

Schritt 4: Berechnung der Länge der Höhe $[M_bB]$.



Man fällt das Lot von A auf die Strecke $[M_bB]$.
Der Punkt H sei der zugehörige Lotfußpunkt.
Die beiden Winkel $\sphericalangle AM_bB$ und $\sphericalangle ACB$ sind Umfangswinkel zur Sehne [AB], daher gilt
$\beta = \sphericalangle AM_bB = \sphericalangle ACB$.
Die beiden rechtwinkligen Dreiecke AHM_b und ABC stimmen also außer im rechten Winkel noch im Winkel β überein, sie sind also ähnlich.
Insbesondere gilt wegen $\overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$ auch

$$\overline{M_bH} = \frac{1}{2} \times \overline{AH}. \qquad (1)$$

Das Viereck AM_cBH hat bei M_c, B und H einen rechten Winkel, es ist also ein Rechteck. Da $[AM_c]$ und $[BM_c]$ halbe Diagonalen im Quadrat sind, sind diese Seiten gleich lang und AM_cBH ist folglich sogar ein Quadrat. Es gilt also

$$\overline{AH} = \overline{HB} = \overline{BM_c} = \frac{1}{2} \times 2a \times \sqrt{2} = a\sqrt{2} . \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt für die Höhe $[M_bB]$:

$$\overline{M_bB} = \overline{M_bH} + \overline{HB} = \frac{1}{2}\sqrt{2}a + \sqrt{2}a = \frac{3}{2}\sqrt{2}a .$$

Schritt 5: **Berechnung des Flächeninhalts von Dreieck $M_aM_bM_c$.**
Aus Schritt 3 und Schritt 4 folgt

$$A(M_aM_bM_c) = \frac{1}{2} \times \overline{M_aM_c} \times \overline{M_bB} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\sqrt{2}a \times \frac{3}{2}\sqrt{2}a = \frac{9}{4}a^2 .$$

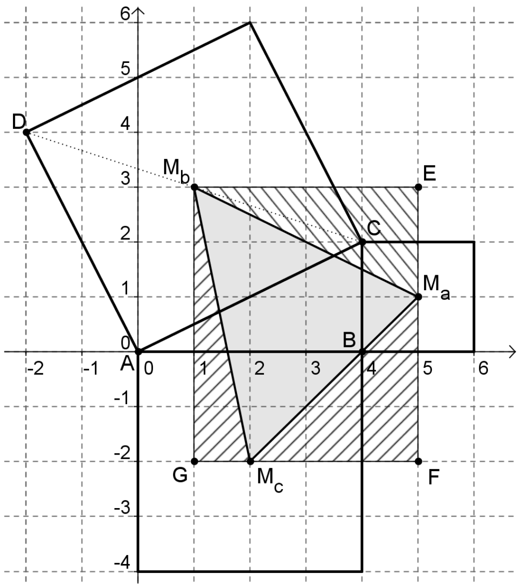
Somit ergibt sich für das gesuchte Flächenverhältnis nach Schritt 1 und Schritt 5:

$$A(ABC) : A(M_aM_bM_c) = a^2 : \frac{9}{4}a^2 = 1 : \frac{9}{4} = 4 : 9 .$$

4. Beweisvorschlag (im Koordinatensystem):

Die Länge des Seite [AB] des Dreiecks sei ohne Beschränkung des Allgemeinheit 4 Längeneinheiten. Dann kann man das rechtwinklige Dreieck ABC wegen der Bedingung $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$ so in ein rechtwinkliges Koordinatensystem legen, dass seine Eckpunkte die Koordinaten A(0|0), B(4|0) und C(4|2) haben. Offenbar haben die Diagonalenschnittpunkte M_a und M_c dann die Koordinaten $M_a(5|1)$ bzw. $M_c(2|-2)$.
Im Quadrat über der Hypothenuse [AC] sei D der C gegenüberliegende Eckpunkt. Weil D aus C durch eine 90°-Drehung um den Ursprung entsteht, hat D die Koordinaten D(-2|4). Der Diagonalenscnittpunkt M_b ist der Mittelpunkt der Strecke [CD] und hat deswegen die Koordinaten

$M_b\left(\frac{4+(-2)}{2} \mid \frac{2+4}{2}\right)$; also $M_b(1|3)$.



Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC hat die Größe $A(ABC) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$ [Flächeneinheiten]. Führt man noch die Punkte E(5|3), F(5|-2) und G(1|-2) ein, so kann man das Dreieck $M_aM_bM_c$ mit den drei rechtwinkligen Dreiecken GM_cM_b, FM_aM_c und EM_bM_a zum Rechteck $GFEM_b$ ergänzen. Deswegen ergibt sich für den Flächeninhalt des Dreiecks $M_aM_bM_c$:

$$\begin{aligned} A(M_aM_bM_c) &= A(GFEM_b) - A(GM_cM_b) - A(FM_aM_c) - A(EM_bM_a) \\ &= 4 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \\ &= 9[\text{Flächeneinheiten}]. \end{aligned}$$

Das gesuchte Flächenverhältnis ist also $A(ABC) : A(M_aM_bM_c) = 4 : 9$.

Aufgabe 3

Die Zahl n ist das Produkt zweier verschiedener Primzahlen.
Wie viele verschiedene Lösungspaare (x,y) positiver ganzer Zahlen x und y hat die Gleichung $n^3 + x^2 = y^2$ *?*

Lösung:

1. Fall: n gerade. Dann gibt es genau **vier** Lösungspaare.
2. Fall: n ungerade. Dann gibt es genau **acht** Lösungspaare.

1. Beweisvorschlag:

Die vorgegebene Gleichung ist äquivalent zu $n^3 = y^2 - x^2$, also zu

$$n^3 = (y - x) \times (y + x). \qquad (*)$$

Nach (*) ergibt sich also aus einem Lösungspaar (x,y) der vorgegebenen Gleichung eine Zerlegung von n^3 in ein Produkt von zwei Teilern $y - x$ und $y + x$, wobei $y - x < y + x$ ist. Die Summe der beiden Teiler $(y - x) + (y + x) = 2y$ ist gerade, die beiden Faktoren $y - x$ und $y + x$ haben also die gleiche Parität, d.h. sie sind beide gerade oder beide ungerade.

Zu jedem Lösungspaar (x,y) der vorgegebenen Gleichung gehört also eindeutig eine Zerlegung von n^3 der Form $n^3 = s \times t$, wobei s < t und s und t gleiche Parität haben. Umgekehrt ergibt sich aus jeder Zerlegung $n^3 = s \times t$ mit gleicher Parität von s und t und s < t genau ein Lösungspaar(x,y) der vorgegebenen Gleichung:

$$s = y - x \text{ und } t = y + x \Rightarrow t - s = 2x \text{ und } t + s = 2y \Rightarrow x = \frac{t - s}{2} \text{ und } y = \frac{t + s}{2}.$$

Die Anzahl der Lösungspaare (x,y) ist also genauso groß wie die Anzahl der Zerlegungen der Form $n^3 = s \times t$, wobei s und t gleiche Parität haben und s < t gilt. (**)

Man muss die Anzahl der Zerlegungen von n^3 mit der Eigenschaft (**) bestimmen. Es sei n = p·q mit voneinander verschiedenen Primzahlen p und q und mit p < q. Alle Teiler von $n^3 = p^3q^3$ haben die Form p^aq^b $(0 \le a,b \le 3)$. Dies sind also insgesamt 16 verschiedene Teiler. Da n^3 keine Quadratzahl ist und somit nicht als Produkt von gleichen Faktoren geschrieben werden kann, gibt es 8 Möglichkeiten $n^3 = p^3q^3$ als Produkt von zwei Teilern zu schreiben, bei denen der erste Faktor der kleinere ist:

$p^3q^3 = (1) \times (p^3q^3)$ (I)
$p^3q^3 = (p) \times (p^2q^3)$ (II)
$p^3q^3 = (p^2) \times (pq^3)$ (III)
$p^3q^3 = (p^3) \times (q^3)$ (IV)
$p^3q^3 = (q) \times (p^3q^2)$ (V)
$p^3q^3 = (pq) \times (p^2q^2)$ (VI)
$p^3q^3 = (p^2q) \times (pq^2)$ (VII)
$p^3q^3 = (p^3q) \times (q^2)$ (wenn $p^2 < q$) oder $p^3q^3 = (q^2) \times (p^3q)$ (wenn $q < p^2$) (VIII)

Somit sind alle Zerlegungen von $n^3 = s \times t$ mit s < t gefunden. Wegen (**) muss für die Anzahl der Lösungspaare noch untersucht werden, in welchen dieser 8 Zerlegungen die Parität von s und t gleich ist.

1. Fall: n ist gerade, d.h. p = 2.
In diesem Fall müssen bei gleicher Parität von s und t auch s und t beide gerade sein. Dies ist nur bei den Zerlegungen (II), (III), (VI) und (VII) der Fall, nur in ihnen kommt in beiden Faktoren p = 2 vor. Es gibt also nach (**) **vier** Lösungspaare (x,y).

2. Fall: n ist ungerade, d.h. q > p > 2 und p und q ungerade.
In diesem Fall sind in allen acht Zerlegungen (I)-(VIII) beide Faktoren ungerade, haben also gleiche Parität. Nach (**) gibt es also **acht** Lösungspaare.

2. Beweisvorschlag:

Die vorgegebene Gleichung ist äquivalent zu $n^3 = y^2 - x^2$, also zu

$$n^3 = (y - x) \times (y + x).$$

Es sei n = p·q mit voneinander verschiedenen Primzahlen p < q. An der Primfaktordarstellung $n^3 = p^3 q^3$ erkennt man, dass n^3 genau 16 verschiedene Teiler besitzt, denn man kann jede der vier Potenzen 1, p, p^2 und p^3 mit jeder der vier Potenzen 1, q, q^2 und q^3 multiplizieren, um einen Teiler von n^3 zu bekommen. Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktordarstellung sind alle diese 16 Teiler voneinander verschieden. Sie haben alle die Form $p^a q^b$ $(0 \le a,b \le 3)$.

Die Gleichung $n^3 = (y - x) \times (y + x)$ gilt genau dann, wenn die Faktoren $(y - x)$ und $(y + x)$ zwei dieser Teiler sind, deren Produkt gerade n^3 ergibt. Und natürlich muss $y+x > y-x$ sein, da x positiv sein soll.

Nun ordnet man die Teiler von n^3 der Größe nach. Die Teiler seien also mit t_1 bis t_{16} bezeichnet und es gelte

$$1 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{16} = n^3.$$

Dann gibt es genau acht Paare von Teilern, deren Produkt jeweils n^3 ergibt, wenn der erste dieser Teiler kleiner als der zweite sein soll:

$$t_1 \cdot t_{16} = t_2 \cdot t_{15} = \ldots = t_8 \cdot t_9 = n^3.$$

Begründung: Wenn t ein Teiler von n^3 ist, dann gibt es eine natürliche Zahl k mit $n^3 = t \cdot k$. Das heißt aber, dass k = $\frac{n^3}{t}$ selbst ein Teiler von n^3 ist. k wird offenbar kleiner, wenn t größer wird. Daher durchläuft k die Teiler in umgekehrter Reihenfolge, wenn t die Teiler der Reihe nach von t_1 bis t_{16} durchläuft.

Die acht Paare von Teilern mit Produkt n^3 sind also $(t_1, t_{16}) = (1, p^3 q^3)$, (t_2, t_{15}) , (t_3, t_{14}) , (t_4, t_{13}) , …. (t_8, t_9) . Sie haben also alle die Form (t_i, t_{17-i}) $(1 \le i \le 8)$.

Ein Paar (x,y) ist somit genau dann ein Lösungspaar der vorgegebenen Gleichung, wenn für eine natürliche Zahl i (i = 1,…,8) gilt:

$$y-x=t_i \quad \text{und} \quad y+x=t_{17-i}.$$

Addiert man die beiden Gleichungen so ergibt sich $2y=t_{17-i}+t_i$. Subtrahiert man die erste von der zweiten Gleichung, so ergibt sich $2x=t_{17-i}-t_i$.
Somit erhält man

$$x=\frac{t_{17-i}-t_i}{2} \quad \text{und} \quad y=\frac{t_{17-i}+t_i}{2}.$$

Die acht Differenzen $t_{17-i}-t_i$ sind alle voneinander verschieden, denn offenbar ist $t_{16}-t_1>t_{15}-t_2>\ldots>t_9-t_8$. Also erhält man acht verschiedene Werte für x, d.h. auch acht verschiedene Paare (x,y).

Allerdings ist noch zu untersuchen, ob diese Lösungen alle ganzzahlig sind.

1. Fall: n sei gerade.
In diesem Fall $n=2q$. Es gibt acht Möglichkeiten, die Zahl $n^3 = 8q^3$ als Produkt aus zwei Faktoren darzustellen:

$$n^3 = 1 \cdot 8q^3 = 2 \cdot 4q^3 = 4 \cdot 2q^3 = 8 \cdot q^3 = q \cdot 8q^2 = 2q \cdot 4q^2 = 4q \cdot 2q^2 = 8q \cdot q^2.$$

(Man beachte, dass im letzten Produkt der zweite Faktor q^2 nicht unbedingt größer als der erste Faktor 8q ist. Dies ist erst ab $q \geq 11$ der Fall. In allen anderen Produkten ist der zweite Faktor allerdings der größere, und zwar wegen q > 2.)
In dieser Darstellung ist leicht zu erkennen, dass vier der acht Differenzen $t_{17-i}-t_i$ jeweils aus einer geraden und einer ungeraden Zahl bestehen, nämlich $8q^3-1$, q^3-8, $8q^2-q$ und q^2-8q (bzw. $8q-q^2$, falls 8q der größere Faktor ist). Also sind diese Differenzen ungerade, so dass die zugehörigen Lösungspaare nicht ganzzahlig sind. Die anderen vier Differenzen ($4q^3-2$, $2q^3-4$, $4q^2-2q$ und $2q^2-4q$) und die entsprechenden Summen sind gerade. Man erhält also genau **vier** Lösungspaare.

2. Fall: n sei ungerade.
In diesem Fall sind auch alle Teiler von n^3 ungerade, also sind alle Differenzen $t_{17-i}-t_i$ und alle Summen $t_{17-i}+t_i$ gerade, und alle Lösungen sind ganzzahlig. Es ergeben sich **acht** Lösungspaare.

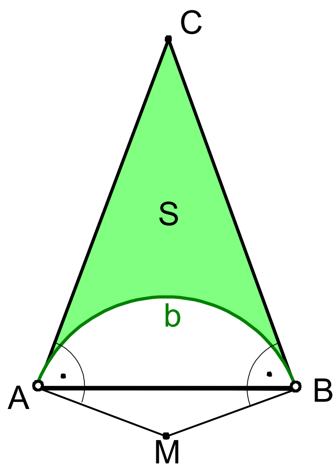
Aufgabe 4

Im gleichschenkligen Dreieck ABC *mit Basis* [AB] *wird auf den Seiten* [AC] *und* [BC] *je ein Punkt* E *bzw.* F *so gewählt, dass der Umfang des Dreiecks* EFC *die Länge* $\overline{AC}+\overline{CB}$ *hat.*

Welche Punkte P *im Innern des Dreiecks* ABC *können auf einer solchen Strecke* [EF] *liegen?*

Lösung:

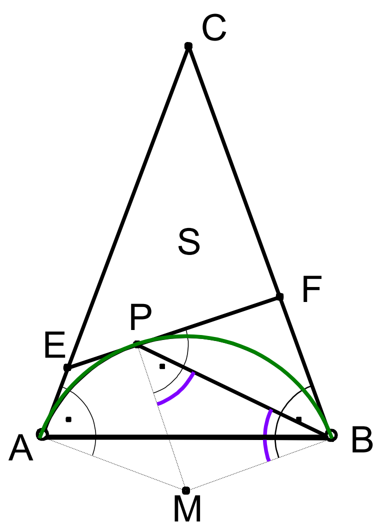
Sei M der Schnittpunkt der Senkrechten zu [AC] und [BC] durch A bzw. B und sei b der Kreisbogen des Kreises um M durch A und B, der innerhalb des Dreiecks ABC liegt.



Dann liegen alle gesuchten Punkte P im Inneren der Fläche S, die von [AC], [BC] und b begrenzt wird, oder auf b selbst (mit Ausnahme von A und B).
Durch alle Punkte P in S oder auf b geht also mindestens eine Strecke [EF], so dass der Umfang von EFC die Länge $\overline{AC}+\overline{CB}$ hat. Für alle anderen Punkte innerhalb des Dreiecks, das sind also die Punkte, die innerhalb des Kreisabschnitts liegen, der durch b und die Sehne [AB] begrenzt wird, gibt es keine solche Strecke [EF].

1. Beweisvorschlag:

Fall 1: P liegt auf b (ohne A und B).
Seien in diesem Fall E und F die Schnittpunkte der Tangente durch P an den Kreisbogen mit den Seiten [AC] bzw. [BC].
Der Punkt F liegt somit auf einer Tangente an den Kreisbogen b mit Berührpunkt P. Man nennt [FP] daher einen *Tangentenabschnitt von F an b*. Die Strecke [FB] ist wegen $\sphericalangle FBM = 90°$ ebenfalls ein Tangentenabschnitt vom gleichen Punkt F an denselben Kreis.



Behauptung:
Zwei Tangentenabschnitte vom gleichen Punkt an den gleichen Kreis sind gleich lang.

Beweis der Behauptung:
Wir beweisen die Behauptung für die Tangentenabschnitte [FP] und [FB], es ist aber offensichtlich, dass der Beweis allgemein gilt.
Da P und B auf dem Kreis b um M liegen, ist das Dreieck BPM gleichschenklig. somit sind die Basiswinkel $\sphericalangle PBM$ und $\sphericalangle MPB$ gleich groß. Da [MB] ein Radius des Kreises ist und [FB] ein Tangentenabschnitt, stehen [FB] und [MB] senkrecht aufeinander. Folglich $\sphericalangle FBP = 90° - \sphericalangle PBM$. Analog ist $\sphericalangle BPF = 90° - \sphericalangle MPB$.

Somit gilt $\sphericalangle FBP = \sphericalangle FPB$ und das Dreieck PBF ist gleichschenklig. Es folgt $\overline{FP} = \overline{FB}$, damit ist Behauptung 1 gezeigt.

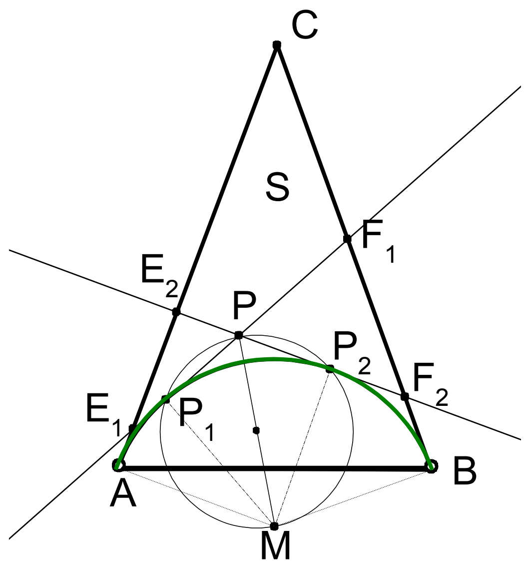
Aus der Behauptung folgt $\overline{EA} = \overline{EP}$ und $\overline{FB} = \overline{FP}$.
Somit ist der Umfang des Dreiecks EFC gleich:

$$U_{\Delta EFC} = \overline{EF} + \overline{FC} + \overline{CE} = \overline{EP} + \overline{PF} + \overline{FC} + \overline{CE} = \overline{AE} + \overline{BF} + \overline{FC} + \overline{CE}$$

$$= \left(\overline{AE} + \overline{EC}\right) + \left(\overline{CF} + \overline{FB}\right) = \overline{AC} + \overline{CB}.$$

Damit erfüllt das Dreieck EFC die geforderte Eigenschaft.

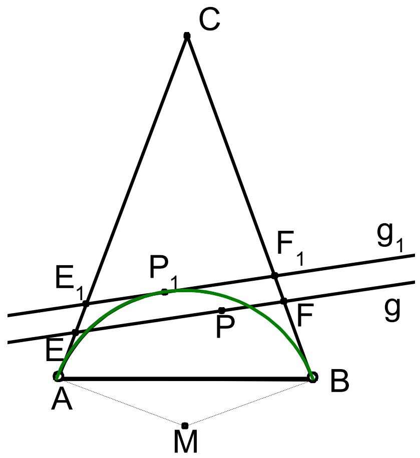
Fall 2: P liegt im Inneren von S.
Da P außerhalb des Kreises k liegt, auf dem sich der Kreisbogen b befindet, gibt es von P zwei Tangenten an diesen Kreis k: Der Thaleskreis über der Strecke [MP] schneidet den Kreis k in genau zwei Berührpunkten P_1 und P_2.



Diese Berührpunkte liegen aber sogar auf dem Kreisbogen b: die Tangente AC wird durch eine Drehung um M in die Tangente P_1P überführt. Somit liegen P_1 und P auf derselben Seite bezüglich AC und analog bezüglich BC. Falls also P im Dreieck ABC liegt, so liegen auch P_1 und P_2 im Dreieck ABC.

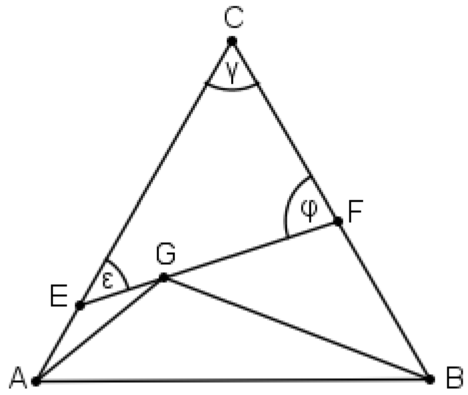
Die Punkte P_1 und P_2 erfüllen also die Voraussetzungen von Fall 1. Für die Schnittpunkte E_1 und F_1 der Tangente an b in P_1 gilt nach Fall 1 $U_{\Delta E_1F_1C} = \overline{AC} + \overline{CB}$.
Der Punkt P liegt also auf einer Strecke E_1F_1, die die in der Aufgabe geforderte Bedingung erfüllt (eine zweite solche Strecke wäre E_2F_2).

Fall 3: P liegt innerhalb des Kreisabschnitts, der durch den Kreisbogen b und die Seite [AB] begrenzt wird.
Zu jeder Geraden g durch P, die [AC] in E und [BC] in F schneidet, gibt es genau eine Parallele g_1, die eine Tangente an b ist. Diese schneide [AC] in E_1 und BC in F_1.
Die Dreiecke EFC und E_1F_1C sind ähnlich mit $\overline{EC} > \overline{E_1C}$, $\overline{FC} > \overline{F_1C}$ und $\overline{EF} > \overline{E_1F_1}$.
Damit gilt $U_{\Delta EFC} > U_{\Delta E_1F_1C} = \overline{AC} + \overline{CB}$ (nach Fall 1).
Also kann P nicht auf einer Strecke [EF] mit der geforderten Eigenschaft liegen.



2. Beweisvorschlag:

Sind $E \in]AC[$ und $F \in]BC[$ zwei Punkte, die die geforderte Eigenschaft $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{EC} + \overline{FC} + \overline{EF}$ erfüllen, so gilt, da $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC}$ und $\overline{BC} = \overline{BF} + \overline{FC}$ ist, $\overline{EF} = \overline{AE} + \overline{BF}$.
Daraus folgt, dass es auf]EF[genau einen Punkt G mit $\overline{AE} = \overline{EG}$ und $\overline{BF} = \overline{GF}$ gibt.
Die Dreiecke AGE und BFG sind demnach gleichschenklig. (*)



Mit $\varepsilon = \angle FEC$ und $\varphi = \sphericalangle CFE$ erhält man: $\angle AEG = 180^0 - \varepsilon$ und $\sphericalangle GFB = 180° - \varphi$ (Nebenwinkel).

Wegen (*) erhält man: $\sphericalangle EGA = \frac{1}{2}(180° - (180° - \varepsilon)) = \frac{\varepsilon}{2}$

und $\sphericalangle BGF = \frac{1}{2}(180° - (180° - \varphi)) = \frac{\varphi}{2}$.

Daraus folgt: $\sphericalangle AGB = 180° - \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) = 180° - \frac{1}{2}(\varepsilon + \varphi)$.

Die Winkelsumme im Dreieck EFC ergibt: $\varepsilon + \varphi = 180° - \gamma$.

Demnach gilt: $\angle AGB = 180^0 - \frac{1}{2} \cdot (180^0 - \gamma) = 90^0 + \frac{\gamma}{2}$.

Dieser Winkel ist unabhängig von ε und φ, ist also für alle möglichen Strecken [EF] und die zugehörigen Punkte gleich groß.

Demnach liegt G auf dem Fasskreisbogen b über [AB] zu dem Winkel $90^0 + \frac{\gamma}{2}$.

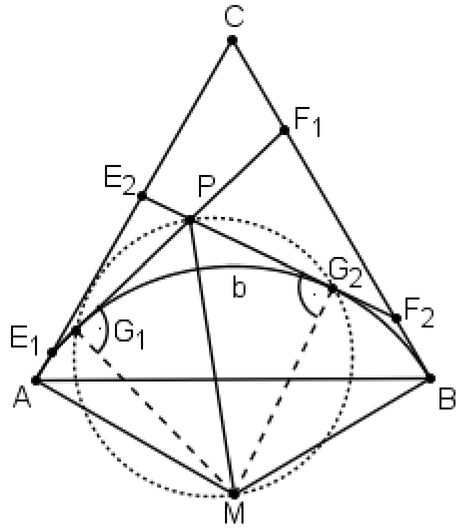
Der zugehörige Mittelpunktswinkel ist

$\angle BMA = 2 \cdot \left(180^0 - \left(90^0 + \frac{\gamma}{2}\right)\right) = 180^0 - \gamma$.

Demnach ist:
$\angle MAC = \angle CBM = (360^0 - (\gamma + 180^0 - \gamma)) : 2 = 90^0$.

Der Mittelpunkt M von b ist der Schnittpunkt der Senkrechten von AC durch A und BC durch B.

Damit ist gezeigt:
Die Punkte E und F erfüllen die geforderte Bedingung genau dann, wenn EF Tangente an b ist.



Da es von jedem Punkt P des Dreiecksinneren entweder
- genau eine Tangente an b gibt, wenn P auf b liegt,
- genau zwei Tangenten an b gibt, wenn P nicht im Kreissegment, das von [AB] und b begrenzt wird, liegt (Die Berührpunkte G_1 und G_2 an b sind die Schnittpunkte des Thaleskreises über [PM] mit b.) oder
- keine Tangente an b gibt, wenn P innerhalb des obigen Kreissegments liegt,

ist die Behauptung gezeigt.