11. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Aufgaben und Lösungsbeispiele 2. Runde 2008 / 2009

Aufgabe 1

Eine Menge A enthält m aufeinander folgende ganze Zahlen; die Summe dieser Zahlen ist 2m. Eine Menge B enthält 2m aufeinander folgende ganze Zahlen; die Summe dieser Zahlen ist m. Die größte Zahl aus A unterscheidet sich von der größten Zahl aus B dem Betrag nach um 1003.

Für welche m ist das möglich?

Lösung:

Die einzige Lösung der Aufgabe ist m = 2009.

1. Beweismöglichkeit:

Die kleinste Zahl der Menge A wird mit n+1, die kleinste Zahl der Menge B mit k+1 bezeichnet. Die Menge A enthält also die m Zahlen $n+1, n+2, \ldots, n+m$, die Menge B enthält die $2m$ Zahlen $k+1, k+2, \ldots, k+2m$.
Die Summe der m Zahlen von A ist nach Voraussetzung 2m.
Aus dieser Bedingung der Aufgabe ergibt sich mit der Gaußschen Summenformel:

$$(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+m) = n\cdot m + (1+2+\ldots+m) = n\cdot m + \frac{1}{2}m\cdot(m+1) = 2m$$

Da aber m größer als 0 sein muss (m ist die Anzahl der Elemente von A), ist die letzte Gleichung äquivalent zu

$$n + \frac{1}{2}\cdot(m+1) = 2 \qquad (1)$$

Die Summe der 2m Zahlen von B ist nach Voraussetzung m.
Dies ergibt entsprechend:

$$(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+2m) = 2\cdot m\cdot k + \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot(2m+1) = 2\cdot m\cdot k + 2\cdot m^2 + m = m \qquad (2)$$

Die Gleichung (2) ist äquivalent zu $2m\cdot(k+m)=0$.
Wegen $m \neq 0$ folgt hieraus: $k+m=0$.

Die größte Zahl von A unterscheidet sich von der größten Zahl von B um 1003.
Dies bedeutet also: $\left|(k+2m)-(m+n)\right| = 1003$.

Aus $k+m=0$ folgt hieraus: $\left|(k+2m)-(m+n)\right| = \left|k+m-n\right| = \left|n\right| = 1003$.
Somit ist $n=+1003$ oder $n=-1003$.

Mit $n=\pm 1003$ ergibt sich daraus $1003 + \frac{m+1}{2} = 2$ oder $-1003 + \frac{m+1}{2} = 2$.

Aus der ersten Gleichung ergibt sich $m=-2003$, aus der zweiten Gleichung ergibt sich $m=+2009$.

Wegen $m>0$ kommt nur m = +2009 als Lösung in Frage.

Wir überprüfen, dass sich für $m = 2009$ tatsächlich eine Lösung ergibt.

Zu $m = 2009$ gehört $n = -1003$ und $k = -m = -2009$.
Somit enthält A die 2009 aufeinanderfolgenden Zahlen $-1002, -1001, \ldots, 1005, 1006$.
und B die 4018 aufeinanderfolgenden Zahlen $-2008, -2007, \ldots, 2008, 2009$.

Die Summe der Zahlen aus A lässt sich sofort berechnen, wenn man bedenkt, dass sich die negativen Summanden mit ihren Gegenzahlen zu 0 ergänzen.
Es bleibt: $-1002 + (-1001) + \ldots + 1001 + 1002 + 1003 + 1004 + 1005 + 1006 =$
$4018 = 2 \cdot 2009 = 2 \cdot m$

Die Summe der Zahlen aus B ist entsprechend:
$-2008 + (-2007) + \ldots + 2007 + 2008 + 2009 = 2009 = m$

Der Betrag der größten Zahlen ist 2009 – 1006 = 1003.

Somit ist $m = 2009$ einzige Lösung des Problems.

2. Beweismöglichkeit:

Die kleinste Zahl aus A wird mit x, die kleinste Zahl aus B mit y bezeichnet.
Somit enthält A die m Zahlen x, $x + 1$, …, $x + m - 1$.
B enthält entsprechend die $2 \cdot m$ Zahlen y, $y + 1$, …, $y + 2 \cdot m - 1$.
Wir schreiben s(A) für die Summe aller Zahlen von A und s(B) für die Summe aller Zahlen von B.

Dann gilt nach Aufgabenstellung unter Anwendung der Summenformel:

$$s(A) = x + (x+1) + \ldots (x + m - 1) = m \cdot x + 1 + 2 + 3 + \ldots + m - 1 = m \cdot x + \frac{m \cdot (m-1)}{2} = 2 \cdot m \quad (1)$$

$$s(B) = y + (y+1) + \ldots (y + 2 \cdot m - 1) = m \cdot y + 1 + 2 + \ldots 2 \cdot m - 1 = m \cdot y + \frac{2 \cdot m \cdot (2 \cdot m - 1)}{2} = m \quad (2)$$

Weiter soll gelten:

$$\left|(y + 2 \cdot m - 1) - (x + m - 1)\right| = \left|y - x + m\right| = 1003 \quad (3)$$

Nach Multiplikation mit 2 und Division durch m ($m \neq 0$) folgt aus (1):
$2 \cdot x + m - 1 = 4 \iff 2 \cdot x + m = 5$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht eine ungerade Zahl. Da $2 \cdot x$ gerade ist, muss m ungerade sein. Somit gibt es eine natürliche Zahl k mit $m = 2 \cdot k + 1$.
Es ergibt sich: $2 \cdot x + (2 \cdot k + 1) = 5 \iff x = 2 - k$.

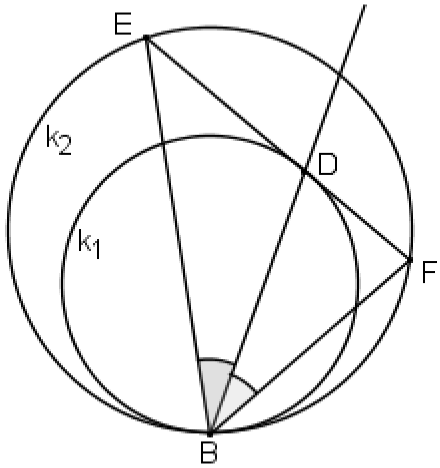
Aus (2) folgt analog: $2 \cdot y + 2 \cdot m - 1 = 1 \iff y + m = 1$.
Aus $m = 2 \cdot k + 1$ folgt hieraus: $y = -2 \cdot k$.
Eingesetzt in (3) ergibt sich: $\left|y - x + m\right| = \left|-2 \cdot k - (2 - k) + (2 \cdot k + 1)\right| = \left|k - 1\right| = 1003$.
Da k positiv ist, folgt somit: $k = 1004$.
Also ist: $x = 2 - k = -1002$, $y = -2 \cdot k = -2008$ und $m = 2 \cdot k + 1 = 2009$.

Wie in der ersten Beweismöglichkeit rechnet man nach, dass sich für $m = 2009$ tatsächlich eine Lösung der Aufgabe ergibt.

Aufgabe 2

Der Kreis k_1 berührt den Kreis k_2 von innen im Punkt B.
Eine Sehne [EF] des Kreises k_2 berührt k_1 im Punkt D.

Zeige: BD halbiert den Winkel FBE.



Vorbemerkung:

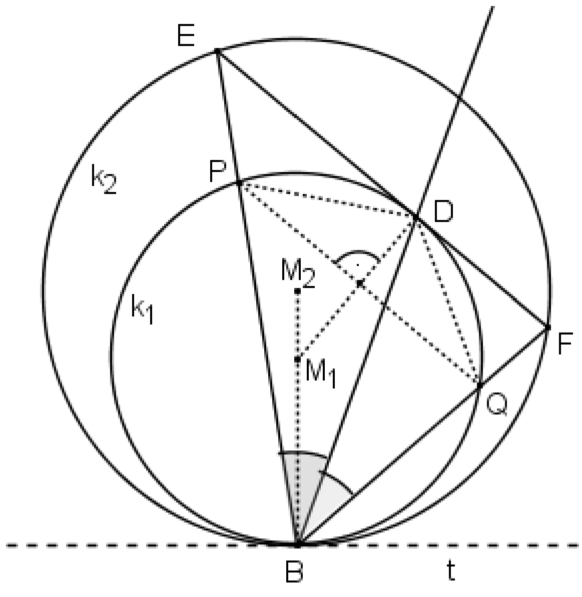
Die Mittelpunkte von k_1 bzw. k_2 werden mit M_1 bzw. M_2, die von B verschiedenen Schnittpunkte der Geraden BE bzw. BF mit k_1 werden mit P bzw. Q bezeichnet.

Nach Aufgabenstellung berühren sich die Kreise k_1 und k_2 im Punkt B, es gibt also in B eine gemeinsame Tangente t an beide Kreise.

Die Radien $[M_1B]$ von k_1 und $[M_2B]$ von k_2 sind beide senkrecht zur Tangente t, also liegen die Punkte B, M_1 und M_2 auf einer Geraden.

1. Beweismöglichkeit (mit zentrischer Streckung und Umfangswinkelsatz):

Nach der Vorbemerkung gibt es eine zentrische Streckung S_B mit Streckungszentrum B, die M_1 auf M_2 abbildet. Die Abbildung S_B bildet k_1, den Kreis mit Mittelpunkt M_1 durch B, auf den Kreis mit Mittelpunkt M_2 durch B, also auf k_2 ab.



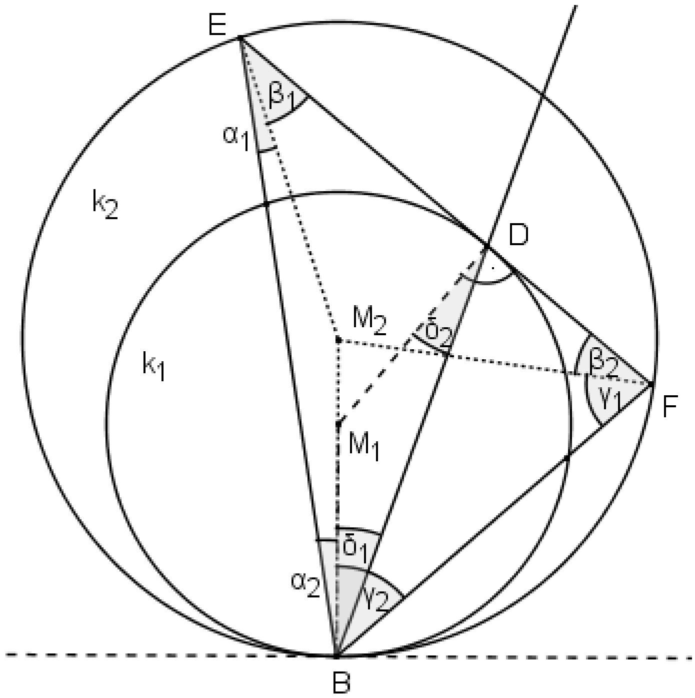
Durch S_B wird P auf E und Q auf F abgebildet, denn die Geraden PE und QF verlaufen beide durch das Streckungszentrum B und P, Q liegen auf k_1, E, F sind die entsprechenden Punkte auf $S_B(k_1) = k_2$. Also wird die Gerade PQ auf die Gerade EF abgebildet. Bei einer zentrischen Streckung ist eine Gerade zu ihrer Bildgerade parallel, deshalb ist PQ zu EF parallel.

Der Radius $[M_1D]$ von k_1 ist senkrecht zur Tangente an k_1 in D, also senkrecht zur Geraden EF. Da PQ und EF parallel sind, ist $[M_1D]$ auch senkrecht zu PQ.
Wegen $\overline{M_1P} = \overline{M_1Q}$ ist M_1D sogar die Mittelsenkrechte zu [PQ]. Folglich ist $\overline{PD} = \overline{QD}$.
Somit sind die Sehnen [PD] und [QD] gleich lange Sehnen im Kreis k_1.

Nach dem Umfangswinkelsatz sind die entsprechenden Umfangswinkel zu gleich langen Sehnen in einem Kreis gleich groß. Es folgt also $\angle QBD = \angle DBP$.
Somit ist BD Winkelhalbierende von $\angle FBE$. Dies war zu zeigen.

2. Beweismöglichkeit (mit gleichschenkligen Dreiecken):

In den folgenden Zeichnungen sind die Winkel α_1 und α_2, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2 und δ_1 und δ_2 als Basiswinkel in den von jeweils zwei gleichen Radien und einer Sehne gebildeten gleichschenkligen Dreiecken gleich groß. Deshalb werden sie im Folgenden kurz α, β, γ und δ genannt: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ usw.



Da nach der Vorbemerkung die Punkte B, M_1 und M_2 auf einer Geraden liegen, sind die Winkel FBM_2 und FBM_1 gleich groß.

Daher gilt, wenn wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass D und F auf derselben Seite von M_1M_2 liegen, $\angle FBD = \gamma - \delta$.

Es sind nun mehrere Fälle bezüglich der möglichen Lagen der Punkte D, E, F, M_1 und M_2 zu unterscheiden:

Fall1: M_1 und M_2 liegen im Inneren oder auf dem Rand des Dreiecks BFE.

In diesem Fall gilt, evt. mit $\alpha = 0$ (falls $M_1, M_2 \in BE$) oder $\beta = 0$ (falls $M_2 \in EF$) oder $\gamma = 0$ (falls $M_1, M_2 \in BF$) oder $\delta = 0$ (falls $D \in M_1M_2$),

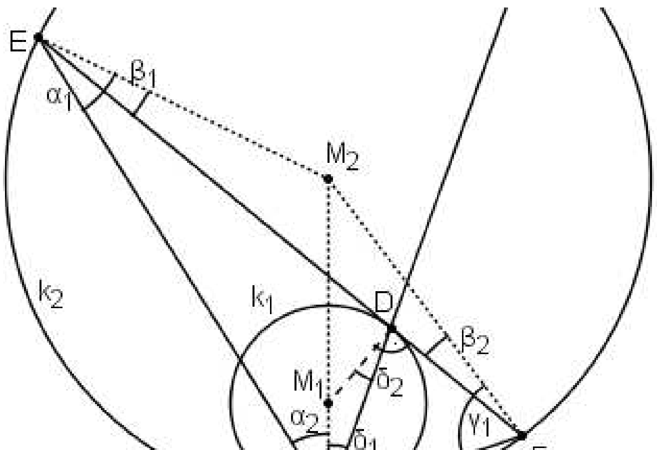
- im Dreieck BFE: $2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) = 180°$, also $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, (1)
- im Dreieck BFD: $(\gamma - \delta) + (\gamma + \beta) + (90° - \delta) = 180°$, also $\beta + 2\gamma - 2\delta = 90°$. (2)

Aus (1) und (2) folgt: $\alpha + \beta + \gamma = \beta + 2 \cdot \gamma - 2 \cdot \delta$; dies ist äquivalent zu: $\alpha + \delta = \gamma - \delta$.

Fall 2: M_1 liegt innerhalb oder auf dem Rand, M_2 liegt außerhalb des Dreiecks BFE.

Dann gilt, evt. mit $\alpha = 0$ (falls $M_1 \in BE$) oder $\gamma = 0$ (falls $M_1, \in BF$) oder $\delta = 0$ (falls $D \in M_1M_2$),

- im Dreieck BFE:
  $2 \cdot (\alpha - \beta + \gamma) = 180°$,
  also $\alpha - \beta + \gamma = 90°$, (1)
- im Dreieck BFD:
  $(\gamma - \delta) + (\gamma - \beta) + (90° - \delta) = 180°$,
  also $2 \cdot \gamma - 2 \cdot \delta - \beta = 90°$. (2)

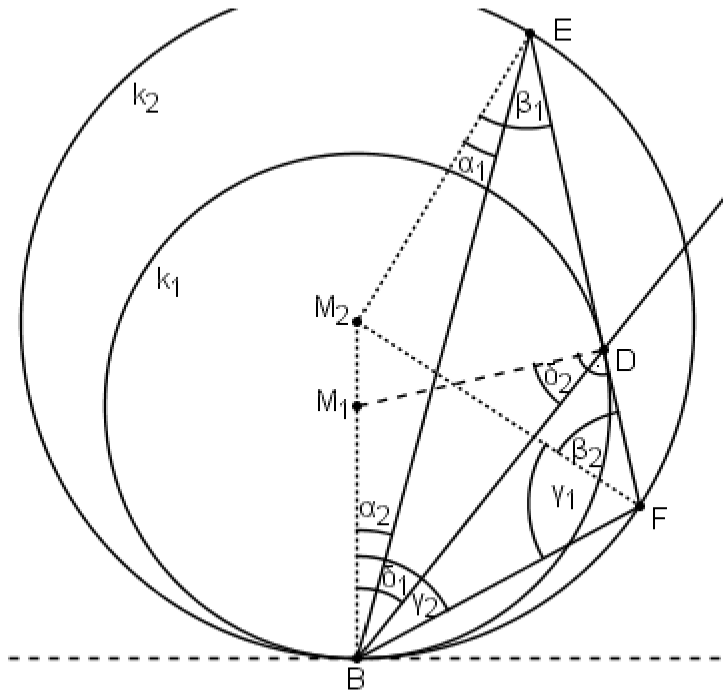


Aus (1) und (2) folgt:
$\alpha - \beta + \gamma = 2 \cdot \gamma - 2 \cdot \delta - \beta$,
also: $\alpha + \delta = \gamma - \delta$

Fall 3: M_1 und M_2 liegen außerhalb des Dreiecks BFE.

Dann gilt:
- im Dreieck BFE:
  $2 \cdot (-\alpha + \beta + \gamma) = 180^o$,
  also: $-\alpha + \beta + \gamma = 90^0$,   (1)
- im Dreieck BFD:
  $(\gamma - \delta) + (\gamma + \beta) + (90^o - \delta) = 180^o$,
  also: $2 \cdot \gamma - 2 \cdot \delta + \beta = 90^o$. (2)

Aus (1) und (2) folgt:
$-\alpha + \beta + \gamma = 2 \cdot \gamma - 2 \cdot \delta + \beta$,
also: $\delta - \alpha = \gamma - \delta$

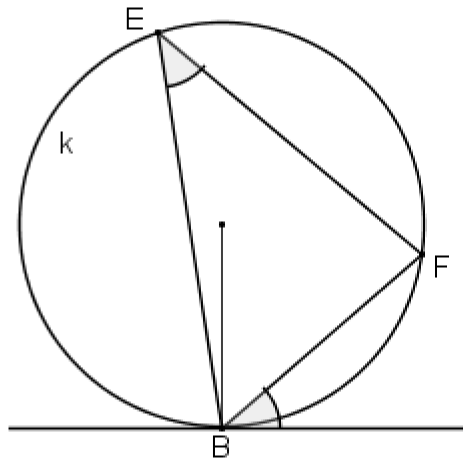


Damit gilt in allen drei Fällen: $\angle FBD = \angle DBE$, d.h. BD halbiert den Winkel FBE.

3. Beweismöglichkeit (mit Tangentenabschnitten und Sehnen-Tangenten-Winkel-Satz):

Sehnen-Tangenten-Winkel-Satz:

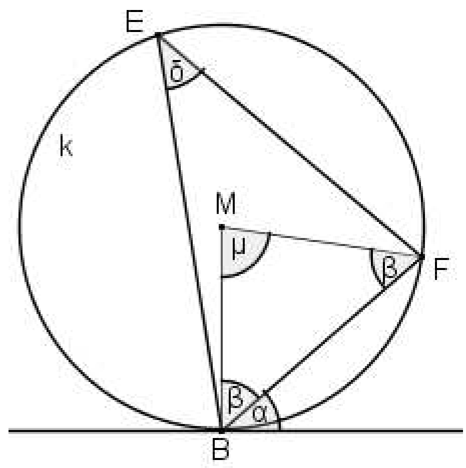
In einem Kreis k ist der Winkel zwischen der Sehne [BF] und der Tangenten an k im Punkt B stets so groß wie der Umfangswinkel BEF auf dem gegenüberliegenden Bogen.



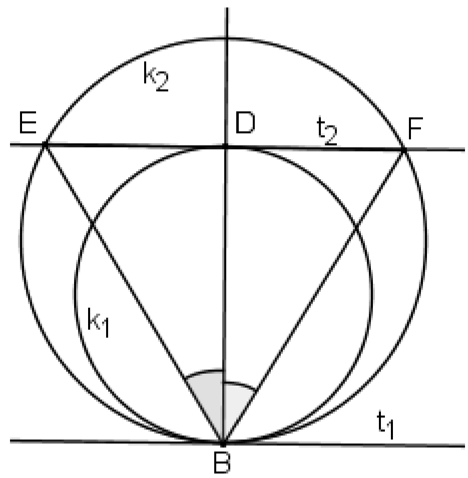
Dieser Satz darf als bekannt vorausgesetzt werden, trotzdem soll hier ein Beweis aufgeführt werden:

Beweis des Sehnen-Tangenten-Winkel-Satzes:

Der Umfangswinkel BEF ist bekanntlich halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel BMF; es gilt also: $\mu = 2\cdot\delta$
Im gleichschenkligen Dreieck BFM gilt:
$\mu = 180^o - 2\cdot\beta$
Da der Radius [BM] senkrecht auf der Tangente an k in B steht, gilt: $\beta = 90^o - \alpha$
Eingesetzt in $\mu = 180^o - 2\cdot\beta$ folgt daraus:
$\mu = 180^o - 2\cdot(90^o - \alpha) = 2\cdot\alpha$
Aus $\mu = 2\cdot\delta$ folgt nun: $\alpha = \delta$



Nun zum eigentlichen Beweis der Aufgabe:



Fall a:

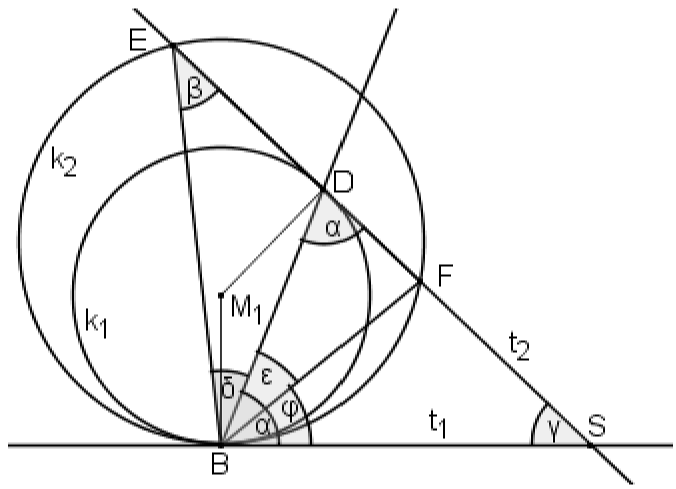
Die Tangente t_1 an k_1 in B ist parallel zur Tangente t_2 an k_1 in D.

Dann ist [BD] offensichtlich Durchmesser von k_1. Da nach der Vorbemerkung M_2 auf BD liegt, ist BD Spiegelachse der Figur und halbiert deshalb den Winkel FBE.

Fall b:

Die Tangenten t_1 und t_2 schneiden sich ein einem Punkt S.

Da diese Tangenten senkrecht auf den Radien $[M_1D]$ und $[M_1B]$ stehen und da das Dreieck BDM_1 gleichschenklig ist, sind auch die Winkel BDS und SBD gleich groß. In der Zeichnung sind sie durch α bezeichnet.



Der Winkel φ ist Sehnen-Tangenten-Winkel (vgl. Abbildung):
Aus DEM Sehnen-Tangenten-Winkel-Satz folgt deshalb: $\varphi = \beta$.

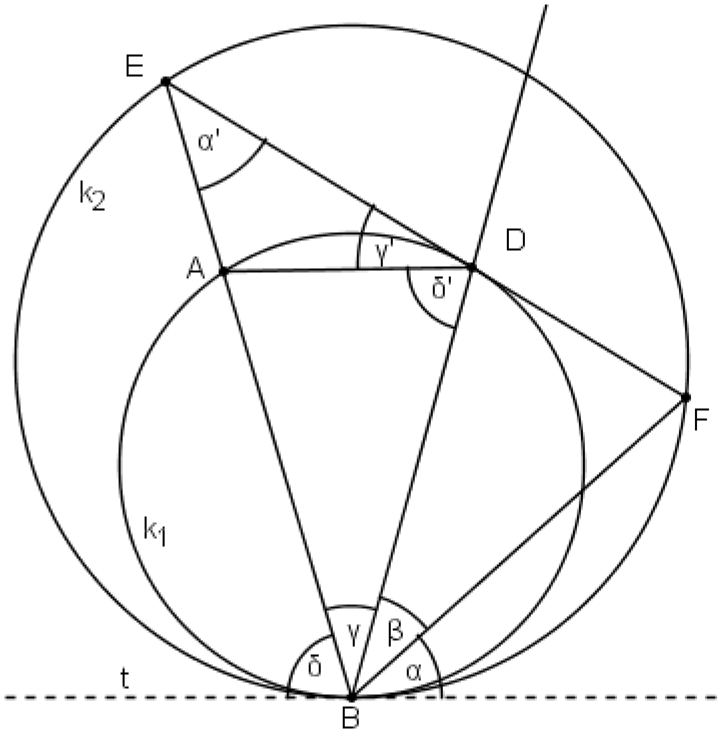
Aus dem Winkelsummensatz für das Dreieck BDE folgt: $\delta + (180^\circ - \alpha) + \beta = 180^\circ$,

d.h. $\alpha = \beta + \delta$.

Aus $\varphi = \beta$ und $\alpha = \varphi + \varepsilon$ ergibt sich nun: $\alpha = \varphi + \delta = \varphi + \varepsilon$.

Somit folgt: $\varepsilon = \delta$.
Dies bedeutet genau, dass BD den Winkel FBE halbiert.

4. Beweismöglichkeit (mit Sehnen-Tangenten-Winkel-Satz)



Ergänzend bezeichnen wir den Schnittpunkt von BE und k_1 mit A.

Nach der Vorbemerkung ist t eine gemeinsame Tangente an die Kreise k_1 und k_2.

Aus dem Sehnen-Tangenten-Winkel-Satz folgt deshalb:

1. Die Winkel α und α' sind als Sehnen-Tangenten-Winkel bzw. als Umfangswinkel zur Sehne [BF] des Kreises k_2 gleich groß.
2. Die Winkel δ und δ' sind als Sehnen-Tangenten-Winkel bzw. als Umfangswinkel zur Sehne [BA] des Kreises k_1 gleich groß.

Da EF Tangente an den Kreis k_1 im Punkt D ist, folgt aus dem Sehnen-Tangenten-Winkel-Satz:

3. Die Winkel γ und γ' sind als Umfangswinkel bzw. Sehnen-Tangenten-Winkel zur Sehne [DA] des Kreises k_1 gleich groß.

Für die Winkelsumme im Dreieck BDE gilt: $\gamma + \delta' + \gamma' + \alpha' = 180^o$.
Berücksichtigt man, dass nach 1. – 3. $\alpha = \alpha'$, $\delta = \delta'$ und $\gamma = \gamma'$ gilt, so folgt daraus:

$$\gamma = 180^o - \alpha - \gamma - \delta$$

Andererseits ergänzen sich α, β, γ und δ zu einem gestreckten Winkel bei B, so dass auch gilt: $\beta = 180^o - \alpha - \gamma - \delta$

Damit ist gezeigt, dass BD den Winkel FBE halbiert.

Aufgabe 3

Auf einem Tisch liegt ein Haufen mit 1000 Streichhölzern. Anna und Bernd spielen folgendes Spiel:
Sie müssen von diesem Haufen abwechselnd Streichhölzer wegnehmen, wobei jeweils die Zahl der weggenommenen Streichhölzer eine Zweierpotenz (1, 2, 4, 8, ...) sein muss.
Wer das letzte Streichholz wegnimmt, hat verloren. Anna beginnt.
Wer von beiden kann den Sieg erzwingen?

Lösung:
Bernd kann den Sieg erzwingen.

Beweis:
Es wird bewiesen, dass Bernd nach einem beliebigen Zug von Anna – sofern dann noch Streichhölzer auf dem Tisch liegen – immer so ziehen kann, dass Anna vor ihrem nächsten Zug wieder eine Anzahl von Streichhölzern vorfindet, die bei Division durch 3 den Rest 1 lässt. Die Anzahl 1000 der Streichhölzer, die Anna zu Beginn vorfindet, lässt offensichtlich den Rest 1 bei Division durch 3.

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ist keine Zweierpotenz durch 3 teilbar, denn die Primfaktorzerlegung einer Zweierpotenz enthält keine 3.

Anna nimmt in jedem ihrer Züge also eine Anzahl von Streichhölzern weg, die bei Division durch 3 entweder den Rest 1 (Fall a) oder den Rest 2 (Fall b) lässt.

Findet Anna vor ihrem Zug eine Zahl von Streichhölzern vor, die den Rest 1 bei Division durch 3 lässt, so liegt nach ihrem Zug

im Fall a) eine Zahl von Streichhölzern vor, die bei Division durch 3 den Rest 0 lässt.

im Fall b) eine Zahl von Streichhölzern vor, die bei Division durch 3 den Rest 2 lässt.

Für Bernd bedeutet dies, dass er

im Fall a) entweder kein Streichholz vorfindet und damit gewonnen hat, da Anna den letzten Zug gemacht hat, oder er ein echtes Vielfaches von 3 vorfindet. Dann kann er in jedem Fall 2 Streichhölzer wegnehmen. So findet Anna wieder einen Haufen von Hölzern vor, deren Anzahl den Rest 1 bei Division durch 3 lässt.

im Fall b) in jedem Fall 1 Streichholz wegnehmen kann, da er mindestens zwei Streichhölzer vorfindet. So findet Anna auch in diesem Fall wieder einen Haufen von Hölzern vor, deren Anzahl den Rest 1 bei Division durch 3 lässt.

Da die Anzahl der Streichhölzer im Laufe eines Spieles immer kleiner wird, muss irgendwann das letzte Streichholz genommen werden. Da die Anfangszahl der Streichhölzer den Rest 1 lässt und Bernd nach eben beschriebener Strategie immer so ziehen kann, dass die neue Zahl wieder den Rest 1 lässt, ist Anna diejenige, die gezwungen ist den Haufen zu leeren, spätestens dann, wenn sie nur noch ein Streichholz vorfindet.

Aufgabe 4

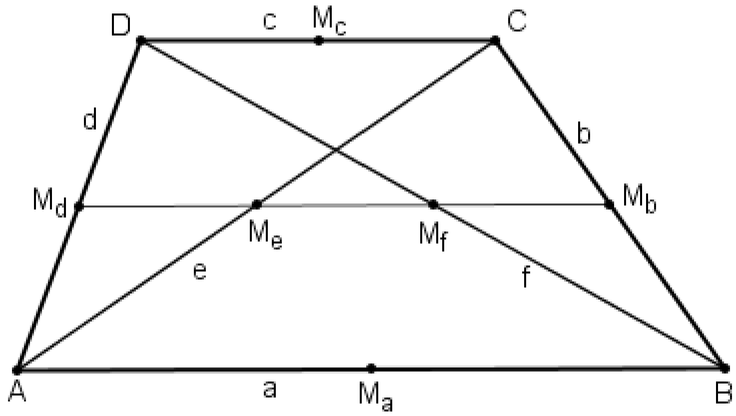
Beweise: Ein konvexes Viereck ist genau dann ein Trapez, wenn die Entfernung der beiden Diagonalenmittelpunkte so groß ist wie die halbe Differenz der Längen zweier gegenüberliegender Seiten.

1. Beweismöglichkeit:

1. Beweisrichtung („Wenn Trapez, dann Längeneigenschaft"):

Die Bezeichnungen der Punkte und Strecken wird wie in der nebenstehenden Abbildung vorgenommen.

In dem gegebenen Trapez ABCD sind a und c parallele gegenüberliegenden Seiten, wobei $c \le a$ ist.



In dem Trapez müssen die Mittelpunkte M_b, M_d, M_e und M_f der Seiten [BC] und [AD] sowie der Diagonalen [AC] und [BD] auf einer Geraden liegen, nämlich der Mittelparallelen [M_bM_d] des Trapezes.

Die Strecke [M_bM_d] besitzt dabei die Länge $\frac{a+c}{2}$.

Die Strecken [M_bM_f] und [M_eM_d] sind die Mittelparallelen der Dreiecke BCD bzw. ACD, daher haben sie beide die Länge $\frac{\overline{CD}}{2} = \frac{c}{2}$.

Somit gilt: $\overline{M_fM_e} = \overline{M_bM_d} - \overline{M_bM_f} - \overline{M_eM_d} = \frac{a+c}{2} - \frac{c}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a-c}{2}$

Dies ist die halbe Differenz der Längen zweier gegenüberliegender Seiten.

Auch der Sonderfall a = c ist hierbei enthalten.

2. Beweisrichtung („Wenn Längeneigenschaft, dann Trapez")

Gegeben ist nun ein Viereck ABCD mit $c \le a$, in dem $\overline{M_fM_e} = \frac{a-c}{2}$ gilt.

Es ist zu zeigen, dass ABCD ein Trapez ist.

Aus der Lage der Punkte im Viereck ergibt sich:

- $\overline{M_eM_b} = \frac{a}{2}$, da die Strecke [$M_eM_b$] die Mittelparallele im Dreieck ABC ist.
- $\overline{M_fM_b} = \frac{c}{2}$, da die Strecke [$M_fM_b$] die Mittelparallele im Dreieck BCD ist.

Also gilt $\overline{M_eM_f} + \overline{M_fM_b} = \frac{a-c}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a}{2} = \overline{M_eM_b}$. Daraus folgt, dass die drei Punkte M_e, M_f und M_b auf einer Geraden liegen.

Falls M_e, M_f und M_b nämlich ein echtes Dreieck bilden würden, so müsste nach der Dreiecksungleichung $\overline{M_eM_b} < \overline{M_eM_f} + \overline{M_fM_b}$ gelten.

Die Gerade M_eM_f ist parallel zu DC, denn M_fM_b ist parallel zu DC, da $[M_fM_b]$ Mittelparallele im Dreieck BCD ist.

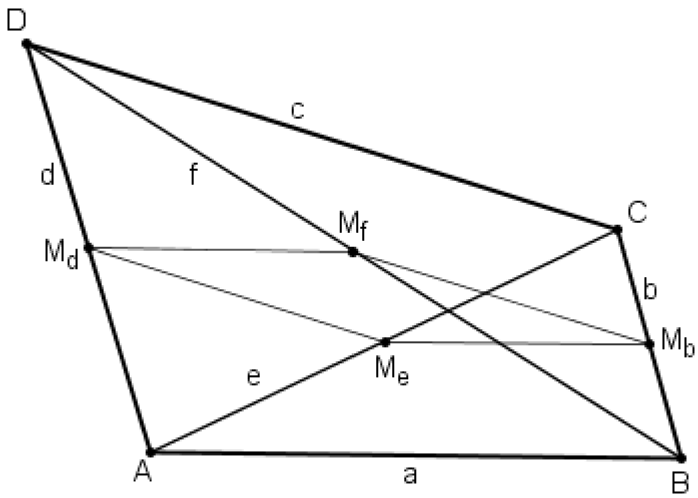
Ebenso ist M_eM_f parallel zu AB, denn M_eM_b ist parallel zu AB, da $[M_eM_b]$ Mittelparallele im Dreieck ABC ist.

Da M_fM_e parallel zu AB und DC ist, sind AB und DC ebenfalls parallel.

Somit ist ABCD ein Trapez.

2. Beweismöglichkeit:

Nach dem Satz über die Mittelparallelen in einem Dreieck ist die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von zwei Dreiecksseiten parallel zur dritten Dreiecksseite und halb so lang wie diese,



Somit folgt:

- $M_dM_f \parallel AB \parallel M_eM_b$,
- $\overline{M_dM_f} = \frac{1}{2} \cdot a = \overline{M_eM_b}$,
- $M_dM_e \parallel CD \parallel M_bM_f$ und
- $\overline{M_dM_e} = \frac{1}{2} \cdot c = \overline{M_bM_f}$.

Das Viereck $M_fM_dM_eM_b$ bildet also ein Parallelogramm.

Genau dann, wenn AB und CD parallel sind, ist es ein entartetes Parallelogramm, denn die vier Punkte M_f, M_d, M_e und M_b liegen dann auf eine Geraden.

Aus der Dreiecksungleichung, angewandt auf das Teildreieck $M_fM_dM_e$, folgt einerseits $\frac{a}{2} + \overline{M_fM_e} = \overline{M_dM_f} + \overline{M_fM_e} \geq \overline{M_dM_e} = \frac{c}{2}$, also $\overline{M_fM_e} \geq \frac{c-a}{2}$, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn M_f, M_d und M_e auf einer Geraden liegen.

Andererseits ergibt die Dreiecksungleichung im gleichen Dreieck $M_fM_dM_e$ auch $\frac{c}{2} + \overline{M_fM_e} = \overline{M_dM_e} + \overline{M_fM_e} \geq \overline{M_dM_f} = \frac{a}{2}$, also $\overline{M_fM_e} \geq \frac{a-c}{2}$.

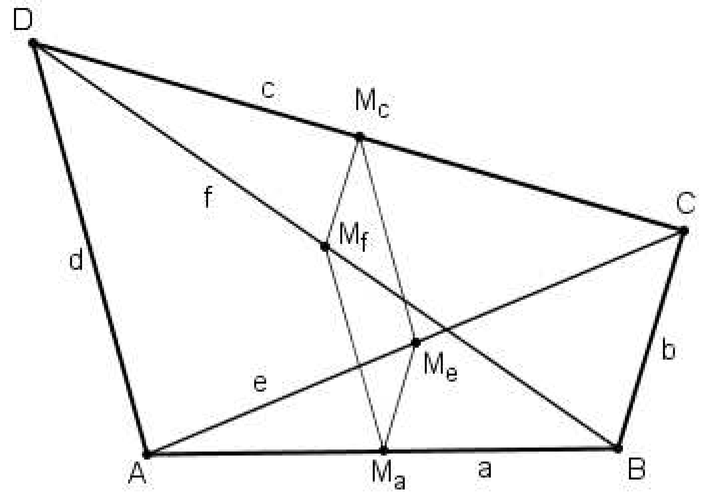
Somit ist insgesamt: $\overline{M_fM_e} \geq \frac{|a-c|}{2}$.

Da das Viereck $M_fM_dM_eM_b$ ein Parallelogramm ist, tritt in dieser Ungleichung genau dann Gleichheit ein, wenn M_f, M_d, M_e und M_b auf einer Geraden liegen.

Analog lässt sich auch für das Viereck $M_fM_aM_eM_c$ beweisen:

<table>
<tr>
<td>

- $M_fM_aM_eM_c$ ist ein Parallelogramm; es ist genau dann entartet, d. h. M_f, M_a, M_e und M_c liegen auf einer Geraden, wenn BD und DA parallel sind.
- $\overline{M_fM_e} \geq \frac{|b-d|}{2}$, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn M_f, M_a, M_e und M_c auf einer Geraden liegen.

</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

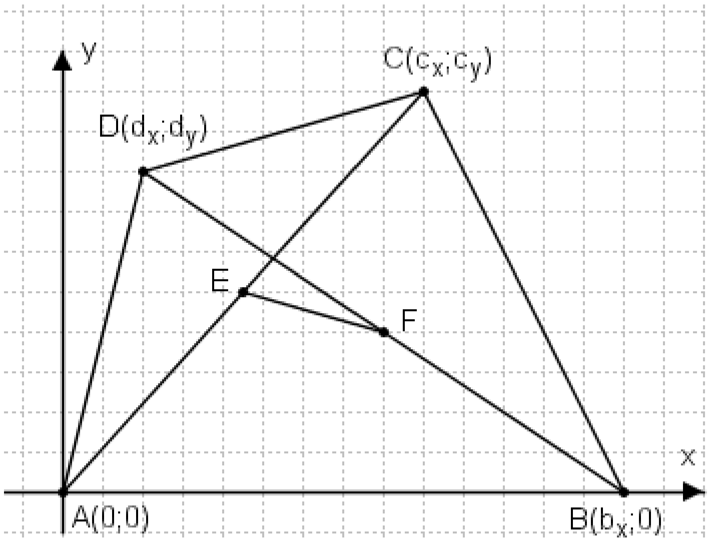
Daraus ergeben sich folgende Äquivalenzen:
Das Viereck ABCD ist ein Trapez
$\Leftrightarrow$ AB ∥ CD oder BD ∥ DA
$\Leftrightarrow$ M_f, M_d, M_e und M_b liegen auf einer Geraden oder M_f, M_a, M_e und M_c liegen auf einer Geraden
$\Leftrightarrow \overline{M_eM_f} = \frac{|a-c|}{2}$ oder $\overline{M_eM_f} = \frac{|b-d|}{2}$
Das war zu zeigen.

Lösungsmöglichkeit 3:

Wir legen an das Viereck ein Koordinatensystem, so dass A(0;0), B(b_x;0), C(c_x;c_y) und D(d_x;d_y).

Da ABCD konvex ist, können A, B, C und D so gewählt werden, dass $c_x > d_x$ und AD und BC nicht parallel sind. Dann gilt:
Das Viereck ABCD ist genau dann ein Trapez, wenn $c_y = d_y$.

Für die Mittelpunkte E und F von [AC] bzw. [BD] gilt dann:
$E(\frac{c_x}{2};\frac{c_y}{2})$ und $F(\frac{b_x+d_x}{2};\frac{d_y}{2})$.



Die Länge der Strecke [EF] ist demnach:

$$\overline{EF} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(b_x+d_x-c_x)^2+(d_y-c_y)^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{b_x{}^2+2\cdot b_x\cdot(d_x-c_x)+(d_x-c_x)^2+(d_y-c_y)^2}$$

Die halbe Differenz der Längen der Strecken [AB] und [CD] ist demnach:

$$\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}-\overline{CD}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|b_x - \sqrt{(d_x - c_x)^2 + (d_y - c_y)^2}\right|$$

Damit gelten die folgenden Äquivalenzumformungen:

$$\overline{EF} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}-\overline{CD}\right|$$

Multipliziert man beide Seite dieser Gleichung mit 2 und quadriert dann, so erhält man:

$$\Leftrightarrow \quad b_x{}^2 + 2\cdot b_x\cdot(d_x - c_x) + (d_x - c_x)^2 + (d_y - c_y)^2 =$$
$$b_x{}^2 - 2\cdot b_x\cdot\sqrt{(d_x - c_c)^2 + (d_y - c_y)^2} + (d_x - c_x)^2 + (d_y - c_y)^2$$

Subtrahiert man auf beiden Seiten $b_x{}^2 + (d_x - c_x)^2 + (d_y - c_y)^2$ und dividiert dann durch $(-2\cdot b_x)$, so erhält man mit $(c_x - d_x) = -(d_x - c_x) > 0$:

$$\Leftrightarrow \quad c_x - d_x = \sqrt{(d_x - c_x)^2 + (d_y - c_y)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (d_y - c_y)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad d_y = c_y$$

$\Leftrightarrow$ AB und CD sind parallel.

$\Leftrightarrow$ Das Viereck ABCD ist ein Trapez.