6. Landeswettbewerb Mathematik Bayern
2. Runde 2003/04 – Aufgaben und Lösungsbeispiele

Aufgabe 1

Die Seite [AB] eines Dreiecks ABC wird über B hinaus bis zum Punkt D so verlängert, dass $\overline{AD} = n \cdot \overline{AB}$ gilt ($n \in \mathbb{N} \wedge n > 1$). Die Gerade durch D und den Mittelpunkt M von [BC] schneidet [AC] im Punkt E.

In welchem Verhältnis teilt E die Strecke [AC]?

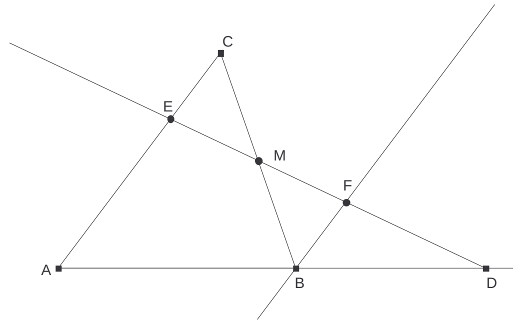
Lösung:

E teilt die Strecke [AC] im Verhältnis $\overline{AE} : \overline{EC} = n : (n-1)$.

Beweis:

1. Möglichkeit (über kongruente Dreiecke):

Der Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch B mit der Geraden DE werde mit F bezeichnet.



Die Dreiecke CEM und BFM sind nach dem Kongruenzsatz WSW kongruent, da

$\overline{CM} = \overline{MB}$,

$\angle CME = \angle BMF$ (Scheitelwinkel) und

$\angle ECM = \angle FBM$ (Wechselwinkel an parallelen Geraden)

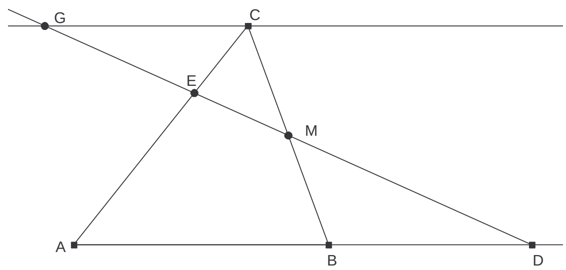
Daraus folgt: $\overline{EC} = \overline{BF}$.

Mit dem Strahlensatz (Zentrum D) folgt:

$$\underline{\overline{AE} : \overline{EC}} = \overline{AE} : \overline{BF} = \overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AD} : (\overline{AD} - \overline{AB}) = n \cdot \overline{AB} : ((n-1) \cdot \overline{AB}) = \underline{n : (n-1)}$$

Alternative:

Der Schnittpunkt der Parallelen zu AB durch C mit der Geraden DE werde mit G bezeichnet.



Die Dreiecke CGM und BDM sind nach dem Kongruenzsatz WSW kongruent, da

$\overline{CM} = \overline{MB}$,

$\angle CMG = \angle BMD$ (Scheitelwinkel) und

$\angle GCM = \angle DBM$ (Wechselwinkel an parallelen Geraden)

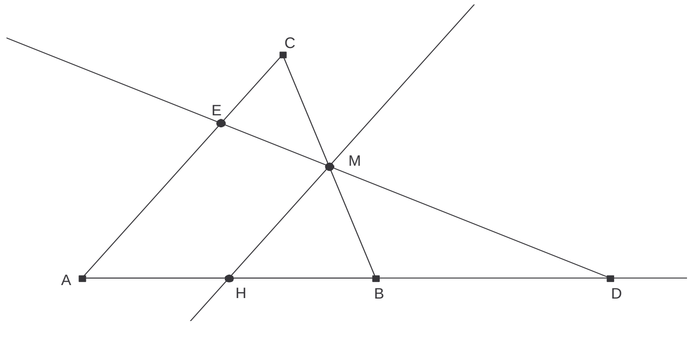
Daraus folgt: $\overline{CG} = \overline{BD}$.

Mit dem Strahlensatz (Zentrum E) folgt:

$$\underline{\overline{AE} : \overline{EC}} = \overline{AD} : \overline{CG} = \overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AD} : (\overline{AD} - \overline{AB}) = n \cdot \overline{AB} : ((n-1) \cdot \overline{AB}) = \underline{n : (n-1)}$$

2. Möglichkeit (über Mittelparallele):

Der Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch M mit der Geraden AB werde mit H bezeichnet. Da MH Mittelparallele zu AC im Dreieck ABC ist, gilt:



$\overline{AH} = 0{,}5 \cdot \overline{AB}$ und $\overline{HM} = 0{,}5 \cdot \overline{AC}$

Mit dem Strahlensatz (Zentrum D) und folgt:

$$\overline{AE} = (\overline{AD} : \overline{HD}) \cdot \overline{HM} = (\overline{AD} : (\overline{AD} - \overline{AH})) \cdot 0{,}5 \cdot \overline{AC} =$$

$$= (n \cdot \overline{AB} : (n \cdot \overline{AB} - 0{,}5 \cdot \overline{AB})) \cdot 0{,}5 \cdot \overline{AC} = (n : (2n-1)) \cdot \overline{AC}$$

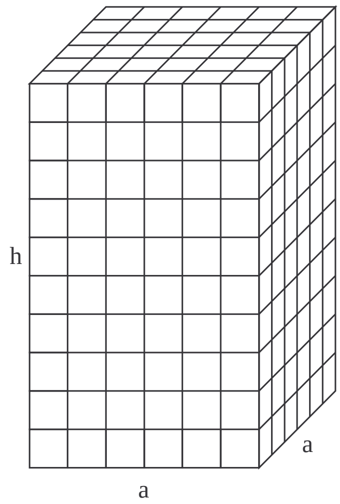
Damit erhält man:

$$\underline{\overline{AE} : \overline{EC}} = \overline{AE} : (\overline{AC} - \overline{AE}) = \frac{n : (2n-1) \cdot \overline{AC}}{(1 - n : (2n-1)) \cdot \overline{AC}} = \frac{n}{2n - 1 - n} = \underline{n : (n-1)}$$

Aufgabe 2

Auf einem Platz soll aus lauter gleichen Würfeln ein Denkmal gebaut werden. Es ist ein massiver quaderförmiger Block geplant, der auf seiner quadratischen Grundfläche steht. Die Anzahl der Würfel, die der Luft ausgesetzt sind, ist halb so groß wie die Anzahl aller Würfel.

Aus wie vielen Würfeln kann das Denkmal bestehen?



Lösung:

Das Denkmal kann aus $8^2 \cdot 9 = 576$ oder $7^2 \cdot 50 = 2450$ Würfeln bestehen.

Beweis:

Es sei a die Länge und Breite, h die Höhe des Blocks. Dann gibt es insgesamt $a^2 \cdot h$ Würfel.

Der Luft ausgesetzt sind a^2 Würfel der obersten Schicht und zusätzlich auf jeder der vier Seiten (a-1)(h-1) Würfel, also zusammen $a^2 + 4(a-1)(h-1)$ Würfel.

Gemäß Angabe soll genau die Hälfte aller Würfel der Luft ausgesetzt sein, also:

(*) $a^2 \cdot h = 2 \cdot \left(a^2 + 4(a-1)(h-1)\right)$.

Löst man (*) nun nach h auf, so erhält man: $h = \dfrac{2(a-2)^2}{a^2 - 8a + 8}$.

Da h eine natürliche Zahl sein muss und der Zähler $2(a-2)^2$ nicht negativ werden kann, muss der Nenner $a^2 - 8a + 8$

(1) positiv sein und

(2) ein Teiler des Zählers sein.

Zunächst untersuchen wir Bedingung (1): $a^2 - 8a + 8 > 0$

Quadratische Ergänzung ergibt: $(a-4)^2 > 8$

Da a eine natürliche Zahl sein muss und a = 1 hier offensichtlich keine Lösung ist, folgt daraus:

$a - 4 \geq 3$, also $a \geq 7$.

Bemerkung 1:

Diese untere Grenze für a erhält man auch durch eine anschauliche Überlegung:

In der obersten Schicht sind alle a^2 Würfel der Luft ausgesetzt, in den darunter liegenden h-1 Schichten sind von allen a^2 Würfeln jeweils $(a-2)^2$ Würfel verdeckt und nicht der Luft ausgesetzt. Damit insgesamt Gleichgewicht zwischen Randwürfeln und inneren Würfeln besteht, müssen in den unteren h – 1 Schichten jeweils mehr Würfel innen als außen liegen, sonst kann die oberste Schicht, in der ja alle Würfel außen liegen, nicht ausgeglichen werden.

Dies bedeutet, es muss $(a-2)^2 > \dfrac{a^2}{2}$ sein.

Durch Umformung ergibt sich daraus $a^2 - 8a + 8 > 0$ und somit wieder $a \geq 7$.

Nun untersuchen wir Bedingung (2):

Der größte Teiler von $2(a-2)^2$ ist $2(a-2)^2$ selbst; hier ergibt sich h = 1, was offensichtlich kein sinnvolles Ergebnis ist. Auch der nächste Teiler von $2(a-2)^2$, nämlich $\dfrac{2(a-2)^2}{2} = (a-2)^2$ liefert kein brauchbares Ergebnis, denn $a^2 - 8a + 8 = (a-2)^2$ ist äquivalent zu a = 1.

Der nächst kleinere Teiler von $2(a-2)^2$ ist $\frac{2(a-2)^2}{3}$. Der Nenner a^2-8a+8 kann also höchstens so groß sein wie $\frac{2(a-2)^2}{3}$, d.h. $a^2-8a+8 \le \frac{2(a-2)^2}{3}$.

Umformung dieser Gleichung führt auf $a^2-16a+16 \le 0$.

Mit quadratischer Ergänzung erhält man: $(a-8)^2 \le 48$

Da a eine natürliche Zahl sein muss, folgt daraus: $a-8 \le 6$, also $a \le 14$

(und $-a+8 \le 6$, also $a \ge 2$, wegen Bedingung (1) ist aber sowieso $a \ge 7$).

Die beiden Bedingungen (1) und (2) haben also eine untere und eine obere Schranke für a ergeben: $7 \le a \le 14$.

Die Ergebnisse für die möglichen Werte von a sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

a	7	8	9	10	11	12	13	14
$h=\frac{2(a-2)^2}{a^2-8a+8}$	50	9	$\frac{98}{17}=5\frac{13}{17}$	$\frac{32}{7}=4\frac{4}{7}$	$\frac{162}{41}=3\frac{39}{41}$	$\frac{25}{7}=3\frac{4}{7}$	$\frac{242}{73}=3\frac{23}{73}$	$\frac{72}{23}=3\frac{3}{23}$

Nur für a = 7 und a = 8 ist $h=\frac{2(a-2)^2}{a^2-8a+8}$ eine natürliche Zahl.

Somit erhalten wir zwei mögliche Lösungen:

I. a = 7 und h = 50, also $\underline{7^2 \cdot 50 = 2450}$ Würfel oder

II. a = 8 und h = 9, also $\underline{8^2 \cdot 9 = 576}$ Würfel.

Bemerkung 2:

Statt der Untersuchung von Bedingung (2) kann man auch sofort für die ersten zulässigen Werte von a die entsprechenden Werte von h berechnen und erhält wieder obige Tabelle. Die zwei Lösungen, nämlich a = 7 und a = 8, lassen sich dann direkt ablesen. Die Existenz weiterer ganzzahliger Lösungen für a und h kann ausgeschlossen werden, da sich

für a > 14 stets Werte von h ergeben, die größer als 2, aber kleiner als 3 sind, wie im Folgenden allgemein nachgewiesen wird:

Der Nenner a^2-8a+8 des Bruchs ist für $a \ge 7$ größer als 0. Deshalb ist bei der Umformung der folgenden Bruchungleichungen keine Fallunterscheidung erforderlich. (Die Zusatzbedingung $a \ge 7$ wird nicht bei jeder Umformung genannt.)

$$h=\frac{2(a-2)^2}{a^2-8a+8} = \frac{2a^2-8a+8}{a^2-8a+8} > 2 \Leftrightarrow 2a^2-8a+8 > 2a^2-16a+16 \Leftrightarrow 8a > 8 \Leftrightarrow a > 1$$

$$h=\frac{2a^2-8a+8}{a^2-8a+8} < 3 \Leftrightarrow 2a^2-8a+8 < 3a^2-24a+24 \Leftrightarrow 0 < a^2-16a+16 \Leftrightarrow 0 < (a-8)^2-48 \Leftrightarrow (a-8)^2 > 48$$

Die jeweils letzten Ungleichungen sind für alle a > 14 erfüllt. Es kann also für a > 14 keine weiteren ganzzahligen Lösungen für h geben.

Bemerkung 3:

Da a = 1 und h = 1 hier keine sinnvollen Lösungen liefern, kann man Gleichung (*) auch umformen zu

$$8=\frac{a^2\cdot(h-2)}{(a-1)\cdot(h-1)}.$$

Auch a = 2 und h = 2 kann sofort ausgeschlossen werden. Für $a, h \in \{3;4;5;...\}$ sind (a-1) und a sowie (h-2) und (h-1) als direkt aufeinander folgende Zahlen teilerfremd. Daher muss (a-1) Teiler von (h-2) und (h-1) Teiler von a^2 sein. Im der folgenden Tabelle sind alle Möglichkeiten dargestellt, 8 hier in ein Produkt von zwei Faktoren zu zerlegen:

$\frac{(h-2)}{(a-1)}$	$\frac{a^2}{(h-1)}$	Lösung des Gleichungssystems ergibt :	Lösungen für die Anzahl an Würfeln des Denkmals:
1	8	a = 8, h = 9	576
2	4	$a = 4 \pm 2\sqrt{3} \notin N$	keine
4	2	$a = 4 \pm \sqrt{10} \notin N$	keine
8	1	a = 7, h = 50 (oder a = 1, bereits ausgeschlossen)	2450

Wieder ergeben sich dieselben Lösungen wie oben.

Aufgabe 3

Von einem Viereck ABCD ist bekannt, dass es sowohl einen Inkreis als auch einen Umkreis besitzt.

Wie kann man aus den drei Eckpunkten A, B und C eines solchen Vierecks das vollständige Viereck konstruieren?

Lösung:

Durch die Lage der Punkte A, B und C sind die Seitenlängen a und b sowie der Winkel β gegeben.

Aus der Angabe weiß man:

(1) Das Viereck ABCD hat einen Umkreis. Dieser kann durch die drei gegebenen Eckpunkte sofort als Umkreis des Dreiecks ABC rekonstruiert werden. ABCD ist also Sehnenviereck, d.h. die Summe der Innenwinkelweiten gegenüberliegender Winkel beträgt jeweils 180°:

(1a) $\alpha + \gamma = 180°$ und (1b) $\beta + \delta = 180°$

(2) Ferner hat das Viereck ABCD einen Inkreis. ABCD ist also Tangentenviereck, d.h. die Summen der Längen jeweils zweier gegenüberliegender Seiten sind gleich: a + c = b + d. Umgekehrt gilt auch: Wenn für ein Viereck a + c = b + d gilt, dann ist es ein Tangentenviereck.

Daraus ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, den fehlenden Punkt D zu konstruieren. Bei der Durchführung werden Grundkonstruktionen wie die Konstruktion von Winkelhalbierenden, Loten, Fasskreisbögen, Tangenten von einem Punkt an einen Kreis etc. sowie die Konstruktion des Umkreises des Dreiecks ABC benötigt. Ihre Durchführung ist aus dem Unterricht bekannt und wird daher im Folgenden nicht detailliert dargestellt.

Insbesondere wird bei den folgenden Konstruktionsmöglichkeiten die Lage des Umkreises bereits als bekannt vorausgesetzt.

1. Möglichkeit (mit Konstruktion des Inkreises):

Konstruktionsidee:

Zunächst wird der Inkreismittelpunkt I des Vierecks ABCD, ein Punkt F auf der Inkreislinie und damit der Inkreis konstruiert.

Der Punkt D ist dann der Schnittpunkt des Umkreises mit der von AB verschiedenen Tangente von A an den Inkreis.

Vorüberlegung:

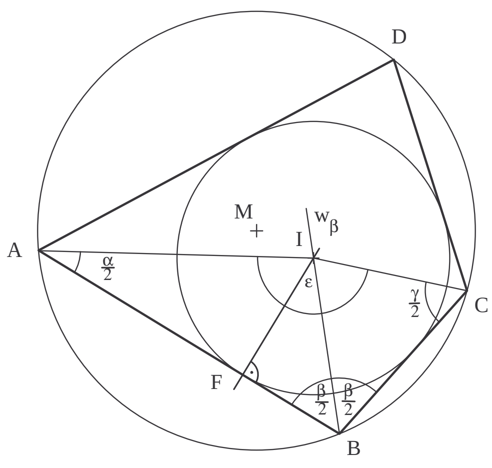
Da der Inkreismittelpunkt I der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden im Viereck ABCD ist, gilt mit $\varepsilon = \angle AIC$ für die Winkelsumme im Viereck ABCI:

$\frac{1}{2}\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma + \varepsilon = 360°$.

Mit $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\gamma) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$ nach (1a) folgt:

$90° + \beta + \varepsilon = 360°$, also $\varepsilon = 270° - \beta$.

Planfigur:



Da die Winkelweite β bekannt ist und ein 270°-Winkel konstruierbar ist, kann auch ε konstruiert werden.

Konstruktion:

Mit Hilfe von ε kann der Inkreismittelpunkt I konstruiert werden.

I liegt stets auf der Winkelhalbierenden des Winkels β.

Falls $\beta > 90°$ und damit $\varepsilon < 180^o$ ist, liegen I und B auf verschiedenen Seiten der Sehne [AC] (dieser Fall ist in der Planfigur dargestellt). Hier liegt I noch auf dem Fasskreisbogen CA über der Sehne [AC] zum Winkel der Weite $\varepsilon = 270^o - \beta$.

Falls $\beta < 90°$ und damit $\varepsilon > 180^o$ ist, liegen B und I auf der gleichen Seite der Sehne [AC]. Hier liegt I noch auf dem Fasskreisbogen AC über der Sehne [AC] zum Winkel der Weite $360° - \varepsilon = 90° + \beta$.

Falls $\beta = 90°$ und damit $\varepsilon = 180°$ ist, ist I der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von β und der Strecke [AC], die in diesem Fall ein Durchmesser des Umkreises ist.

Da sowohl die Winkelhalbierende des Winkels β als auch die entsprechenden Fasskreisbögen unter Verwendung der Punkte A, B und C eindeutig konstruierbar sind, ist die Konstruktion des Inkreismittelpunktes I möglich und eindeutig.

Gemäß Konstruktion von I ist $I \in AB$ ausgeschlossen. Daher kann immer das Lot von I auf AB konstruiert werden, womit sich eindeutig der Lotfußpunkt F, der Inkreisradius $\rho = \overline{IF}$ und somit der Inkreis ergeben.

Anschließend kann eindeutig die von AB verschiedene Tangente von A an den Inkreis konstruiert werden. Ihr Schnittpunkt mit dem Umkreis des Dreiecks ABC ist der gesuchte Punkt D.

Statt mittels Grundkonstruktion kann die Tangente auch wie folgt eindeutig konstruiert werden:

Man zeichnet den Kreis um A mit dem Radius $\overline{AF}$. Sein Schnittpunkt mit dem Inkreis werde mit G bezeichnet. Da AF Tangente von A an den Inkreis ist und $\overline{AG} = \overline{AF}$ gemäß Konstruktion, ist auch die Gerade AG Tangente von A an den Inkreis. Sie schneidet den Umkreis (außer im Punkt A) noch im gesuchten Eckpunkt D.

Entsprechend lässt sich D auch mit Hilfe der Tangente von C an den Inkreis eindeutig konstruieren.

Bemerkung:

D erhält man aus dem Inkreismittelpunkt auch ohne explizite Konstruktion des Inkreises:

Da der Inkreismittelpunkt I der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Vierecks ABCD ist, hat man mit seiner Konstruktion auch die Winkel $\frac{\alpha}{2} = \angle BAI$ und $\frac{\gamma}{2} = \angle ICB$ konstruiert. Trägt man $\frac{\alpha}{2}$ an [AI und $\frac{\gamma}{2}$ an [CI in entgegengesetzte Richtung von B an, so schneiden sich die freien Schenkel dieser Winkel auf der Umkreislinie eindeutig im gesuchten Punkt D.

Vorbemerkung zur 2. und 3. Möglichkeit (jeweils ohne Konstruktion des Inkreises):

Hier wird als Eigenschaft (2) die Gleichheit der Summen gegenüberliegender Seitenlängen verwendet, also a + c = b + d. Für die Konstruktionen benötigt man aber jeweils Differenzen von Seitenlängen. Daher wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit a $\geq$ b angenommen. Dann ist a – b ≥ 0. Ferner gilt: a – b = d – c.

Zunächst zum Sonderfall a = b:

Hier ist auch c = d, d.h. man erhält den fehlenden Punkt D als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von [AC] (gleichzeitig Winkelhalbierende von β) mit dem Umkreis des Dreiecks ABC.

Dieser Punkt existiert und ist eindeutig, also ist das Viereck ABCD eindeutig konstruiert.

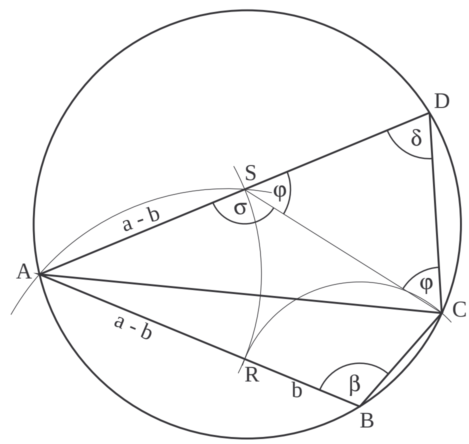
Im Folgenden wird nur noch der Fall a – b > 0 betrachtet.

2. Möglichkeit:

Konstruktionsidee:

Zunächst wird mittels eines Hilfsdreiecks ein Hilfspunkt S konstruiert, so dass $\overline{AS} = a - b$ und $D \in [AS$.

Planfigur:



Vorüberlegung:

Da ABCD Tangentenviereck ist, gilt

(2) a + c = b + d, also d = a – b + c.

Mit $\overline{AS} = a - b$ folgt:

$\overline{SD} = \overline{AD} - \overline{AS} = d - (a - b) = a - b + c - a + b = c$

Das Dreieck SCD ist somit gleichschenklig mit Spitze D.

Für seine Basiswinkel gilt:

$\varphi := \angle CSD = \angle DCS = \dfrac{180° - \delta}{2}$.

Da ABCD auch Sehnenviereck ist, folgt mit (1b):

$\varphi = \dfrac{\beta}{2}$.

Sein Nebenwinkel $\sigma := \angle ASC$ hat damit die Weite $\sigma = 180° - \varphi = 180° - \dfrac{\beta}{2}$.

Wegen $\beta = 180° - \delta < 180°$ ist $\sigma = 180° - \dfrac{\beta}{2} > 180° - \dfrac{180°}{2} = 90°$; σ ist also größter Winkel im Dreieck ACS.

Da $\sigma = 180° - \dfrac{\beta}{2}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AS} = a - b$ aus den vorgegebenen Punkten A,B und C konstruierbar sind und $\overline{AC}$ im Dreieck ACS dem größten Winkel σ gegenüberliegt, also größte Seite ist, ist das Dreieck ACS eindeutig konstruierbar (SsW).

Konstruktion:

Zunächst wird in einer Hilfskonstruktion das Dreieck ACS konstruiert (siehe Vorüberlegung) und an die gegebene Strecke [AC] so übertragen, dass S und B auf verschiedenen Seiten bezüglich AC liegen. Anschließend zeichnet man die Halbgerade [AS ein; sie schneidet den Umkreis des Dreiecks ABC (außer in A) eindeutig im gesuchten Punkt D.

Bemerkung:

Der Punkt S lässt sich auch ohne eigenes Hilfsdreieck konstruieren: Man erhält ihn als Schnittpunkt des Kreises um A mit Radius a – b mit dem Fasskreisbogen über [AC] zum Winkel $\sigma = 180° - \dfrac{\beta}{2}$, der bezüglich AC auf der anderen Seite als B liegt.

(Wie man leicht zeigen kann, ist der Mittelpunkt dieses Fasskreisbogens stets der Bogenmittelpunkt des Bogens AC.)

Dieser Schnittpunkt existiert und ist eindeutig.

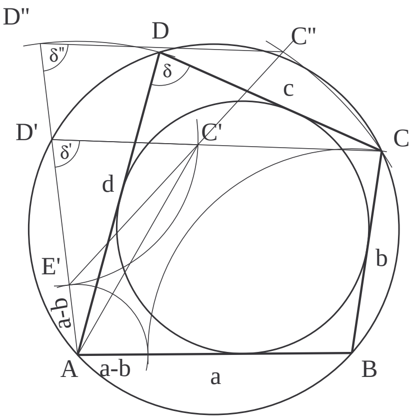
3. Möglichkeit:

Konstruktionsidee:

Der Punkt D ist konstruiert, wenn für das Teildreieck ACD des Vierecks ABCD gilt:

1. D liegt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC
2. $\overline{AD} - \overline{CD} = d - c = a - b$

Planfigur:



Dies wird in drei Schritten erreicht:

(I) Im ersten Schritt wird ein Teildreieck AC'D' konstruiert, bei dem der Punkt D' auf dem Umkreis von Dreieck ABC liegt, $\delta' = \delta$ und $\overline{AD'} - \overline{C'D'} = a - b$ gilt.

(II) Im zweiten Schritt wird daraus das Dreieck AC"D" konstruiert, für das $\delta'' = \delta' = \delta$, $\overline{AD''} - \overline{C''D''} = a - b$ und $\overline{AC''} = \overline{AC}$ gilt.

(III) Im dritten Schritt wird das Dreieck AC"D" durch eine Drehung um A so abgebildet, dass der Punkt C" auf den Punkt C fällt.

Das Bild des Punktes D" ist dann der gesuchte Punkt D.

Konstruktion:

(I) Man wählt D' fest, aber beliebig so auf dem Bogen CA des Umkreises, dass $\overline{AD'} > a - b = d - c$ erfüllt ist. Dies ist möglich, da d > d – c > 0 ist nach Voraussetzung. Man zeichnet AD' sowie CD'. Der Winkel AD'C hat dann die gleiche Weite δ' wie der gesuchte Winkel ADC der Weite δ (Satz vom Umfangwinkel über der Sehne AC).

Der Kreis um A mit dem Radius a – b = d – c schneidet [AD'] eindeutig im Punkt E'. Durch die Beachtung der Bedingung $\overline{AD'} > a - b = d - c$ ist die Existenz von E' sichergestellt.

Der Kreis um D' mit dem Radius $\overline{D'E'}$ schneidet die Halbgerade [D'C eindeutig in C'.

Das Dreieck AC'D' hat somit die gewünschte Winkelweite bei D' und die richtige Seitenlängendifferenz $\overline{AD'} - \overline{C'D'} = a - b$.

(II) Der Kreis um A mit dem Radius $\overline{AC}$ schneidet die von E' ausgehende Halbgerade durch C' eindeutig in C".

Die Parallele zu C'D' durch C" schneidet AD' eindeutig in D".

Die beiden Winkel AD'C und AD"C" haben die gleiche Weite $\delta' = \delta''$ (Stufenwinkel an Parallelen).

Der 2. Strahlensatz von E' aus garantiert wegen $\overline{E'D'} = \overline{C'D'}$ auch $\overline{E'D''} = \overline{C''D''}$.

Vom Dreieck AC"D" weiß man damit, dass es zwei Seitenlängen hat, die sich um a – b unterscheiden, da $\overline{AD''} - \overline{C''D''} = (\overline{AE'} + \overline{E'D''}) - \overline{C''D''} = \overline{AE'} = a - b$ (nach Konstruktion). Ferner gilt nach Konstruktion: $\delta'' = \delta' = \delta$ und $\overline{AC''} = \overline{AC}$.

(III) Das Dreieck AC"D" wird um den Punkt A so gedreht, dass C" auf C abgebildet wird. Nach der Umkehrung des Satzes vom Umfangwinkel wird dabei der Punkt D" auf einen Punkt des Umkreises abgebildet. Dieser Punkt heiße D. Diese Abbildung ist eindeutig.

Da die Drehung längentreu ist, hat die Strecke [AD] dieselbe Länge wie die Strecke [AD"] und [CD] dieselbe Länge wie [C"D"]. Die beiden Dreiecke AC"D" und ACD sind daher kongruent nach Kongruenzsatz SSS. Somit unterscheiden sich die Längen der Seiten [AD] und [CD] ebenfalls um a – b.

Folglich ist das Viereck ABCD ein Tangentenviereck (Umkehrung des Satzes vom Tangentenviereck) und D der gesuchte Viereckspunkt. Sämtliche Konstruktionen sind möglich und eindeutig, also ist das Viereck ABCD eindeutig konstruiert.

Aufgabe 4

Das Produkt der ersten n Primzahlen $2\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot p_n$ wird als Produkt zweier natürlicher Zahlen a und b geschrieben. Die auf p_n folgende nächstgrößere Primzahl sei p_{n+1}.

Zeige: Wenn a + b kleiner als p_{n+1}^2 ist, so ist a + b eine Primzahl.

Lösung:

Zunächst ein Beispiel zur Erläuterung der Aufgabenstellung:

Sei n = 4. Die ersten vier Primzahlen sind 2, 3, 5 und 7. Das Produkt ist also $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 210$. Die fünfte Primzahl $p_5 = p_{n+1}$ ist 11 und $p_5^2 = p_{n+1}^2 = 121$.

Eine mögliche Zerlegung von 210 in ein Produkt ist 210 = 1·210. Dann ist aber 1 + 210 = 211 > 121; man muss 211 daher nicht weiter untersuchen, denn die Voraussetzung $a + b < p_{n+1}^2$ ist nicht erfüllt.

Eine andere mögliche Zerlegung von 210 in ein Produkt ist 210 = 14·15. Hier ist 14 + 15 = 29 < 121, die Voraussetzung $a + b < p_{n+1}^2$ ist erfüllt. Nach Aufgabenstellung müsste also 29 eine Primzahl sein, was ja auch der Fall ist.

Die anderen möglichen Zerlegungen von 210 in ein Produkt $a \cdot b$ sind in der folgenden Tabelle erfasst – man erkennt, dass die Summe a + b immer eine Primzahl ist.

210 = 2·105	210 = 3·70	210 = 5·42	210 = 7·30	210 = 6·35	210 = 10·21
2 + 105 = 107 ist Primzahl	3 + 70 = 73 ist Primzahl	5 + 42 = 47 ist Primzahl	7 + 30 = 37 ist Primzahl	6 + 35 = 41 ist Primzahl	10 + 21 = 31 ist Primzahl

Nun aber zum eigentlichen Beweis:

Das Produkt $2\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot p_n$ der ersten n Primzahlen werde als Produkt $a \cdot b$ geschrieben, wobei $a + b < p_{n+1}^2$.
Wir müssen zeigen, dass a + b eine Primzahl ist. Dazu beweisen wir, dass jede Primzahl q, die Teiler von a + b ist, gleich a + b sein muss. a + b hat damit keine echten Teiler und ist somit Primzahl.

Vorbemerkung:

Eine Primzahl $p \le p_n$ teilt <u>entweder</u> a <u>oder</u> b, aber keinesfalls beide Zahlen a <u>und</u> b, denn:

Als Teiler von $2\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot p_n$ ist a entweder 1 oder selbst ein Produkt von Primzahlen, die alle unter den ersten n Primzahlen 2, 3, ..., p_n vorkommen. Der andere Faktor b ist dann aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktordarstellung das Produkt der übrigen Primzahlen bis p_n, die in a nicht vorkommen. Somit kommt $p \le p_n$ in der Primfaktordarstellung von a oder b vor, teilt also eine der beiden Zahlen. p teilt aber nicht a <u>und</u> b, denn sonst müsste p^2 auch $a \cdot b$ teilen, was wiederum aufgrund der Primfaktordarstellung $a \cdot b = 2\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot p_n$ ausgeschlossen ist.

Behauptung:

Wenn q eine Primzahl ist, die a + b teilt, dann ist q = a + b.

Beweis:

1. Fall: $q \le p_n$

Nach der Vorbemerkung teilt dann q eine der beiden Zahlen a oder b, aber nicht beide. Würde q z.B. a teilen, so teilt es b nicht. Dann kann aber q nicht a + b teilen. Denn andernfalls würde q auch (a + b) – a = b teilen.
Also ist $q \le p_n$ unmöglich, wenn q ein Teiler von a + b ist.

2. Fall: $q > p_n$

Dann ist $q \ge p_{n+1}$. Somit ist $\frac{a+b}{q} \le \frac{a+b}{p_{n+1}} < p_{n+1}$, da ja nach Voraussetzung $a + b < p_{n+1}^2$. Wäre $\frac{a+b}{q} > 1$, so müsste $\frac{a+b}{q}$ auch wieder einen Primteiler r haben. Wegen $1 < \frac{a+b}{q} < p_{n+1}$ muss r zwischen 2 und p_n liegen. Nach der Vorbemerkung teilt dann r entweder a oder b, aber nicht beide. Wie in Fall 1 teilt r jedenfalls nicht a + b. Damit kann r erst recht nicht den Teiler $\frac{a+b}{q}$ von a + b teilen. Somit kann nur $\frac{a+b}{q} = 1$ sein.
Es ergibt sich also a + b = q. Wenn $a + b < p_{n+1}^2$, hat a + b also keine echten Teiler und ist Primzahl.