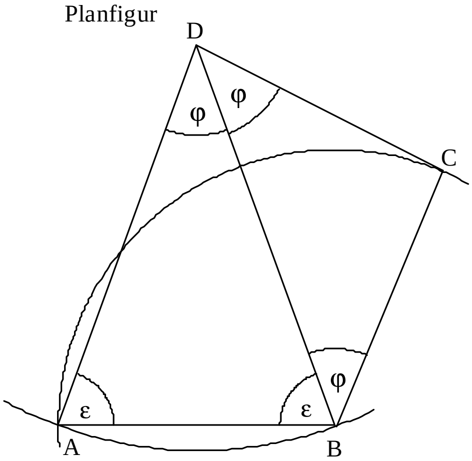
4. Landeswettbewerb Mathematik Bayern
2. Runde 2001/2002 – Aufgaben und Lösungsbeispiele

Aufgabe 1

In einem Viereck ABCD sind die Seiten [AB], [BC] und [CD] gleich lang. Die Seite [DA] hat die gleiche Länge wie die Diagonale [DB]. Diese Diagonale halbiert den Winkel ADC.

Wie groß können die Innenwinkel eines solchen Vierecks sein?

Planfigur



Lösung

Nach den Voraussetzungen ist das Dreieck BCD gleichschenklig mit der Basis [BD], denn es gilt $\overline{BC} = \overline{DC}$. Somit sind die Winkel CBD und BDC gleich weit

$$w(CBD) = w(BDC) = \varphi.$$

Da die Diagonale [DB] den Winkel ADC halbiert, gilt

$$w(ADB) = w(BDC) = \varphi.$$

Die Geraden BC und AD schließen mit der Diagonalen [BD] Winkel der gleichen Weite ein und sind nach der Umkehrung des Satzes über Wechselwinkel an sich schneidenden Geraden deshalb zueinander parallel.

Das Dreieck ABD ist nach Aufgabenstellung ebenfalls gleichschenklig mit der Basis [AB].

Wegen der Winkelsumme in diesem Dreieck gilt

$\varphi + 2\varepsilon = 180°$.

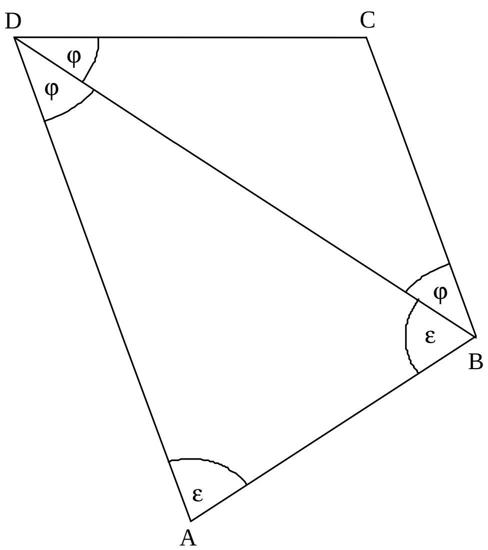
Im Viereck ABCD sind die Seiten [BC] und [AD] parallel und die Seiten [AB] und [CD] gleich lang. Das Viereck ABCD ist deshalb entweder ein gleichschenkliges Trapez oder ein Parallelogramm.

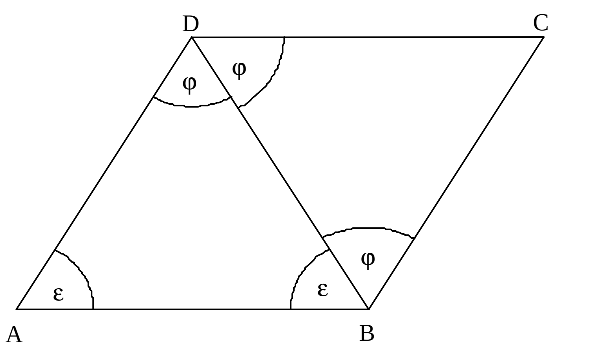
Ist ABCD ein gleichschenkliges Trapez mit der Basis [AD], so sind die Basiswinkel BAD und ADC gleich weit.

Aus $\varepsilon = 2\varphi \quad \wedge \quad \varphi + 2\varepsilon = 180°$ folgt $\varphi = 36°$, $\varepsilon = 72°$.

Ist ABCD ein Parallelogramm, dann ergänzen sich die Winkel BAD und ADC zu 180°.

Aus $\varepsilon = 180° - 2\varphi \quad \wedge \quad \varphi + 2\varepsilon = 180°$ folgt $\varphi = 60°$, $\varepsilon = 60°$.





Aufgabe 2

Zeige: Ist eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Summe zweier verschiedener positiver Quadratzahlen, so hat auch jede Potenz n^k ($k \in \mathbb{N}$, $k > 0$) diese Eigenschaft.

Lösung

Nach Aufgabenstellung ist die natürliche Zahl n die Summe verschiedener positiver Quadratzahlen. Es gibt also natürliche Zahlen $a > b > 0$ mit $n = a^2 + b^2$.

Als erstes wollen wir zeigen, dass auch n^2 als Summe von zwei unterschiedlichen positiven Quadratzahlen dargestellt werden kann.

Es ist $n^2 = (a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 4a^2b^2 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2$ eine Summe von zwei Quadratzahlen. Da $0 < b < a$ gilt, sind die beiden Zahlen positiv.

Wären sie gleich, also $x = 2ab = a^2 - b^2$, so wäre $n^2 = 2x^2$ und somit wäre $\sqrt{2} = \frac{n}{x}$ eine rationale Zahl, was bekanntlich nicht der Fall ist.

Wir wissen also jetzt, dass es natürliche Zahlen $c > d > 0$ gibt, mit $n^2 = c^2 + d^2$.

Jetzt untersuchen wir als nächstes, ob wir auch n^3 bzw. n^4 als Summe verschiedener positiver Quadratzahlen darstellen können.

Es ist

$n^3 = n \cdot n^2 = (a^2 + b^2) \cdot n^2 = a^2n^2 + b^2n^2 = (an)^2 + (bn)^2$

bzw.

$n^4 = n^2 \cdot n^2 = (c^2 + d^2) \cdot n^2 = c^2n^2 + d^2n^2 = (cn)^2 + (dn)^2$.

Da $a > b > 0$ bzw. $c > d > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, ist auch $an > bn > 0$ bzw. $cn > dn > 0$, d. h. n^3 bzw. n^4 lässt sich als Summe zweier verschiedener positiver Quadratzahlen darstellen.

Genauso wie wir jetzt von der Zerlegung von n bzw. n^2 auf die Zerlegung von n^3 bzw. n^4 geschlossen haben, können wir von der Zerlegung von n^3 bzw. n^4 auf die Zerlegung von n^5 bzw. n^6 schließen, davon wiederum auf die Zerlegung von n^7 bzw. n^8 usw. Allgemein kann man von der Darstellung von $n^k = e^2 + f^2$ ($e > f > 0$) als Summe zweier verschiedener positiver Quadratzahlen auf eine solche Darstellung von n^{k+2} schließen. Man muss im gerade geführten Beweis nur n^k statt n bzw. n^2 schreiben und n^{k+2} statt n^3 bzw. n^4. Somit gibt es eine solche gesuchte Darstellung für alle Potenzen n^k von n.

Aufgabe 3

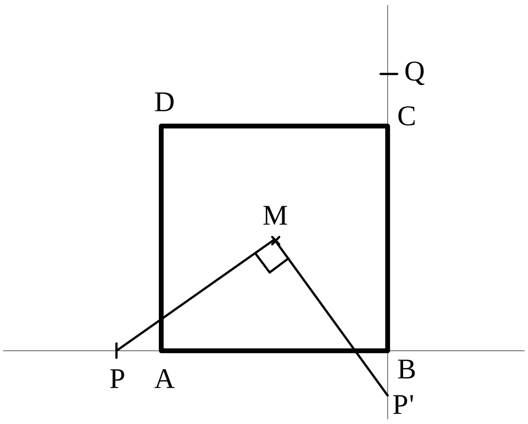
Gegeben sind drei verschiedene Punkte M, P und Q, die nicht auf einer Geraden liegen. Es soll ein Quadrat mit dem Mittelpunkt M konstruiert werden, so dass P und Q auf zwei benachbarten Seiten des Quadrats oder deren Verlängerungen liegen.

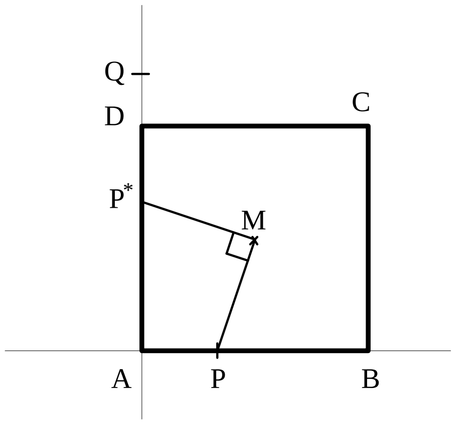
Wie viele verschiedene Quadrate gibt es in Abhängigkeit von der gegenseitigen Lage der Punkte M, P und Q?

1. Lösung

Grundidee der Konstruktion

Aus den gegebenen Punkten M, P und Q soll ein Quadrat ABCD mit den genannten Eigenschaften konstruiert werden. Wir können die Bezeichnung der Eckpunkte des Quadrats so wählen, dass P auf der Geraden AB liegt. Der Punkt Q liegt dann auf der Geraden BC oder auf der Geraden AD. Die nachfolgenden Bilder zeigen diese Möglichkeiten, wobei die Lage der Punkte P und Q auf den jeweiligen Geraden AB und BC bzw. AD variieren kann.

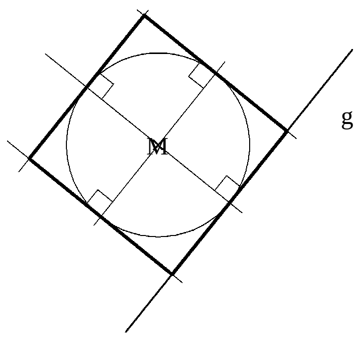




Dreht man die Strecke [MP] um M mit 90° bzw. 270°, dann liegen P' und Q bzw. P^* und Q auf der Trägergeraden der Quadratseite [BC] bzw. [AD]. Diese Eigenschaft folgt aus der Drehsymmetrie des Quadrats um seinen Mittelpunkt M als Zentrum. Die Gerade AB wird bei der Drehung um M und dem Drehwinkel 90° auf die Gerade BC und bei Drehung um 270° auf die Gerade DA abgebildet. Der Bildpunkt von P liegt deshalb auf BC bzw. DA. Entsprechendes gilt für die Drehung der Strecke [MQ] um M mit 90° bzw. 270°. Es entstehen dabei Trägergeraden des gleichen Quadrats.

Die Gerade QP' und die Gerade QP^* sind mögliche Trägergeraden von Quadratseiten.

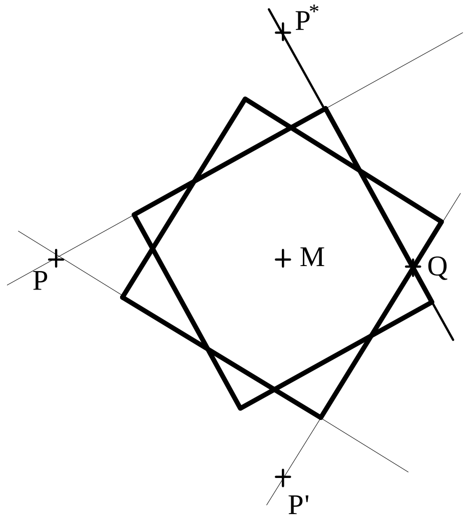
Mit Kenntnis der Trägergeraden g einer Quadratseite und der Lage des Punktes M kann man das Quadrat konstruieren, da der Abstand von M zu g die Länge der halben Quadratseite ist. Die Konstruktion ergibt sich aus dem nebenstehenden Bild.

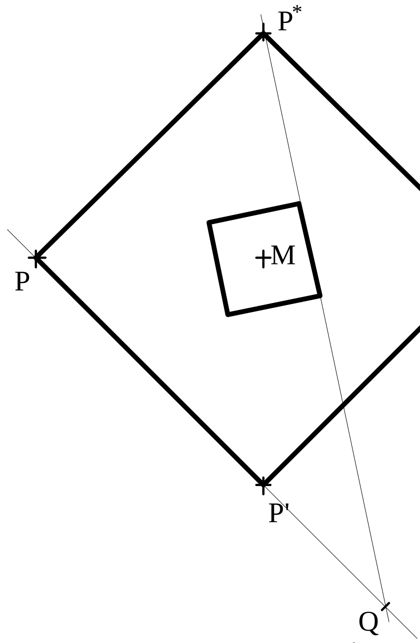


Das Quadrat ist durch die Trägergerade g und den Mittelpunkt M eindeutig bestimmt.

Allgemeiner Fall

Liegt der Punkt Q nicht auf der Geraden $P'M = P^*M = P'P^*$, so sind die Verbindungsgeraden QP' und QP^* verschieden. Jede dieser Geraden ist die Trägergerade einer Quadratseite. Es gibt also genau zwei verschiedene Quadrate.





Hinweis

Liegt Q auf der Geraden PP' (oder PP^*), so ist die Gerade PQ selbst eine Trägergerade des Quadrats. Konstruiert man nun das zugehörige Quadrat, dann sind P, P' und P^* Eckpunkte dieses Quadrats. Der Punkt P liegt als Eckpunkt gleichzeitig auf zwei benachbarten Seiten.

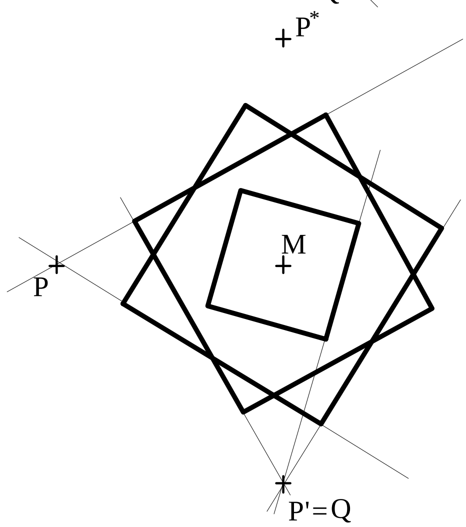
Außerdem gibt es ein zweites Quadrat mit einer Seite auf der Trägergeraden QP* (oder QP'), falls $Q \neq P'$ (oder $Q \neq P^*$).

Diese Ausganglage wird bei den Sonderfällen behandelt.

Sonderfälle

1) Fällt Q mit P' oder mit P* zusammen, so bilden die Punkte P, Q und M ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Die Gerade QP' oder die Gerade QP* ist nicht mehr eindeutig bestimmt. Jede Gerade durch Q, die nicht durch M geht, ist Trägergerade eines Quadrats. Das nebenstehende Bild zeigt drei Möglichkeiten.

   Bei diesen beiden Lagen von Q gibt es jeweils unendlich viele Lösungen.



2) Liegt Q auf der Geraden $P'M = P^*M = P'P^*$ und stimmt Q weder mit P' noch mit P^* überein, so ist der Abstand der Geraden $QP' = QP^*$ von M gleich 0. Es existiert kein Quadrat.

__2. Lösung__

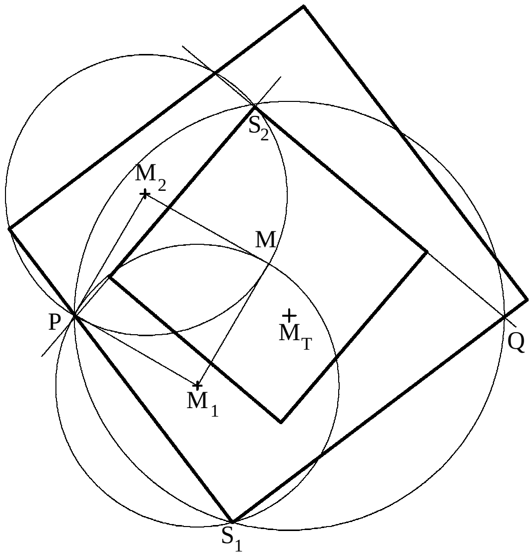
Grundidee der Konstruktion

Falls ein solches Quadrat existiert, gibt es einen von M verschiedenen Eckpunkt S des Quadrats, für den die Geraden SP und SQ orthogonal sind. Durch den Mittelpunkt M und den Eckpunkt S ist das Quadrat eindeutig bestimmt.

Es gilt:

1. S liegt auf dem Thaleskreis über [PQ].
2. Wegen w(PSM) = 45° oder w(PSM) = 90° + 45° = 135° liegt S auf dem Fasskreisbogen über MP zu 45° bzw. 135°.

Um diese Fasskreise zu erhalten, konstruiert man über der Strecke [PM] nach beiden Seiten ein gleichschenklig – rechtwinkliges Dreieck. Die der Strecke [PM] gegenüberliegenden Punkte M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der Fasskreise. Die Fasskreise mit den Mittelpunkten M_1 bzw. M_2 und der Thaleskreis über PQ mit dem Mittelpunkt M_T schneiden sich auf Grund der Konstruktion immer in P. Für die übrigen Schnittpunkte der Fasskreise mit dem Thaleskreis gibt es mehrere Möglichkeiten:



Allgemeiner Fall

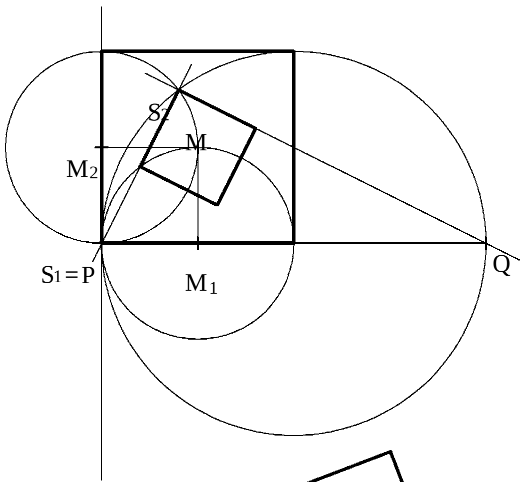
Der Punkt M liegt nicht auf dem Thaleskreis über [PQ]. Die Schnittpunkte S_1 bzw. S_2 der Fasskreise mit dem Thaleskreis sind dann von M verschieden.

Es gibt zwei verschiedene Quadrate. Das nebenstehende Bild zeigt eine solche Situation.

Hinweis

Wenn der Mittelpunkt eines Fasskreises auf der Geraden PQ liegt, aber nicht mit dem Mittelpunkt der Strecke [PQ] zusammenfällt, dann berührt dieser Fasskreis den Thaleskreis über [PQ] in genau einem Punkt. Dieser Punkt ist P. Der Mittelpunkt des anderen Fasskreises liegt dann auf der Orthogonalen zu PQ durch P.

Das nebenstehende Bild zeigt die beiden möglichen Quadrate, wobei in einem Fall der Punkt P selbst Eckpunkt des Quadrates ist und zwei Seiten zugeordnet werden kann.

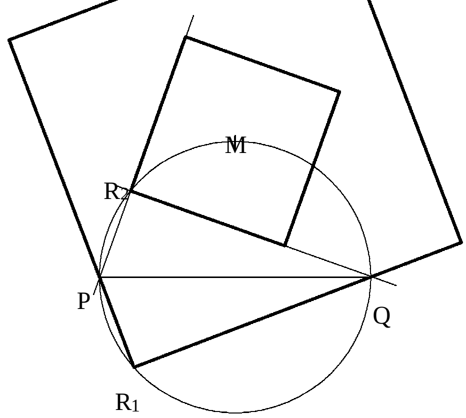


Sonderfälle

1. Der Punkt M ist der Schnittpunkt des Thaleskreises über [PQ] und der Mittelsenkrechten von [PQ].

   Das Dreieck PQM ist gleichschenklig – rechtwinklig. Der Mittelpunkt des einen Fasskreises fällt mit dem Mittelpunkt des Thaleskreises zusammen, d.h. einer der Fasskreise ist mit dem Thaleskreis identisch. In diesem Fall gibt es unendlich viele Lösungen.

   Im nebenstehenden Bild sind zwei dieser Quadrate mit den beliebig auf dem Thaleskreis gewählten Eckpunkten R_1 und R_2 angegeben.



2. Der Punkt M liegt auf dem Thaleskreis über [PQ] aber nicht auf der Mittelsenkrechten von [PQ].

   Die Fasskreise und der Thaleskreis schneiden sich in den Punkten P und M.

   Die Möglichkeit M = S scheidet aus, da in diesem Fall die Seitenlänge des Quadrats 0 wäre.

   Für P = S wäre die Gerade QS und damit auch PQ Trägergerade einer Quadratseite. Da weiterhin M auf dem Thaleskreis über [PQ] aber nicht auf der Mittelsenkrechten von [PQ] liegt, ist die Winkelweite von $\angle$QSM von 45° verschieden. Es gibt deshalb kein Quadrat mit dem Eckpunkt S und einer Seite mit der Trägergeraden SQ.

Aufgabe 4

Für natürliche Zahlen werden die beiden folgenden Operationen definiert:

(A) An die Zahl kann eine der Ziffern 0, 4 oder 8 angehängt werden.

(B) Die Zahl kann halbiert werden, wenn sie gerade ist.

Zeige, dass von 4 ausgehend jede positive natürliche Zahl durch eine endliche Anzahl dieser Operationen erreicht werden kann.

Zum Beispiel kann die Zahl 51 erreicht werden durch:

$4 \xrightarrow{(A)} 40 \xrightarrow{(B)} 20 \xrightarrow{(A)} 204 \xrightarrow{(B)} 102 \xrightarrow{(B)} 51.$

Lösung

Idee

Es wird gezeigt, dass es zu jeder der genannten Operationen eine eindeutige Umkehrung gibt und dass man durch die Anwendung dieser Umkehrungen von jeder beliebigen natürlichen Zahl n zur Zahl 4 gelangen kann.

Dieser Nachweis soll in zwei Teilen erfolgen.

Im ersten Teil wird gezeigt, dass durch die Anwendung der Umkehroperationen jede natürliche Zahl n verkleinert werden kann. Nach endlich vielen Schritten gelangt man dann zu einer einstelligen Zahl.

Im zweiten Teil wird nachgewiesen, dass man von jeder einstelligen Zahl durch die Anwendung der Umkehroperationen zur Zahl 4 gelangen kann.

Teil 1

Die drei unter (A) zusammengefassten Operationen werden zur einfacheren Darstellung mit A0, A4 bzw. A8 bezeichnet, je nach dem ob die Ziffer 0, 4 oder 8 angehängt wird.

Zu jeder der Operationen (A) und (B) gibt es eine eindeutige Umkehroperation:

$\overline{\text{A0}}$: Von einer natürlichen Zahl n mit der Einerziffer 0 wird die Endnull abgeschnitten, d.h. $\overline{\text{A0}}$ (n) = n : 10, $\overline{\text{A0}}$ hat demnach den Verkleinerungsfaktor 0,1.

$\overline{\text{A4}}$: Von einer natürlichen Zahl n mit der Einerziffer 4 wird die Endziffer abgeschnitten, d.h. $\overline{\text{A4}}$ (n) = (n – 4) : 10, $\overline{\text{A4}}$ hat demnach einen Verkleinerungsfaktor kleiner als 0,1, da vor der Division durch 10 die Zahl 4 subtrahiert wurde.

$\overline{\text{A8}}$: Von einer natürlichen Zahl n mit der Einerziffer 8 wird die Endziffer abgeschnitten, d.h. $\overline{\text{A8}}$ (n) = (n – 8) : 10, $\overline{\text{A8}}$ hat demnach einen Verkleinerungsfaktor kleiner als 0,1.

$\overline{\text{B}}$: n wird verdoppelt, d.h. $\overline{\text{B}}$ (n) = 2·n, $\overline{\text{B}}$ hat demnach den Vergrößerungsfaktor 2.

Jede beliebige Verkettung von Operationen A0, A4, A8 und B kann durch Ersetzen von A0 durch $\overline{\text{A0}}$, A4 durch $\overline{\text{A4}}$ usw. rückgängig gemacht werden und umgekehrt. Gelingt also der Nachweis, dass es durch die Anwendung von $\overline{\text{A0}}$, $\overline{\text{A4}}$, $\overline{\text{A8}}$ und $\overline{\text{B}}$ einen Weg von einer beliebigen Zahl n zur Zahl 4 gibt, so gibt es durch die Anwendung von A0, A4, A8 und B einen Weg von der Zahl 4 zur Zahl n.

Es wird nun am Beispiel einer Zahl n mit der Einerziffer 1 gezeigt, dass durch eine endliche Anwendung der Umkehroperationen die Zahl verkleinert werden kann.

Zweimaliges Anwenden von $\overline{B}$, also zweimaliges Verdoppeln der Zahl n führt zu einer Zahl mit der Einerziffer 4. Die anschließende Anwendung von $\overline{A4}$ ergibt eine natürliche Zahl n' . Der Wert von n' ist kleiner als $0{,}4 \cdot n$, denn es gilt: $n' = (n \cdot 2 \cdot 2 - 4) : 10 = 0{,}4 \cdot n - 0{,}4 < 0{,}4 \cdot n$

Mit den oben angegebenen Bezeichnungen kann man dies kurz so ausdrücken:

$\overline{A4}\,\{\overline{B}\;[\overline{B}(n)]\} = (n \cdot 2 \cdot 2 - 4) : 10 < 0{,}4 \cdot n$

Für die übrigen Einerziffern ist die Folge der Umkehroperationen, die zu einer Verkleinerung von n führen, in Kurzform in der nachfolgenden Tabelle angegeben.

Endziffer von n $(n \geq 10)$	***Verkettung von Operationen***		***Verkleinerungsfaktor***
0	$\overline{A0}$:	$n \to n:10$	= 0,1
1 / 6	$\overline{A4}\;\{\overline{B}[\overline{B}(n)]\}$:	$n \to (n \cdot 2 \cdot 2 - 4):10$	< 0,4
2 / 7	$\overline{A4}\;[\overline{B}(n)]$:	$n \to (n \cdot 2 - 4):10$	< 0,2
3	$\overline{A4}\;(\overline{B}\{\overline{B}[\overline{B}(n)]\})$:	$n \to (n \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 4):10$	< 0,8
4	$\overline{A4}(n)$:	$n \to (n - 4):10$	< 0,1
5	$\overline{A0}\;[\overline{B}(n)]$:	$n \to n \cdot 2:10$	= 0,2
8	$\overline{A8}\;(n)$:	$n \to (n - 8):10$	< 0,1
9	$\overline{A8}[\overline{B}(n)]$:	$n \to (n \cdot 2 - 8):10$	< 0,2

Die Tabelle zeigt, dass jede natürliche Zahl n durch die Anwendung von höchstens vier geeigneten Umkehroperationen in eine kleinere Zahl n' übergeht. Wendet man nun auf die jeweils verkleinerte Zahl immer wieder die gleichen Verfahren an, so gelangt man schließlich zu einer einstelligen, von 0 verschiedenen Zahl.

Teil 2

Die folgende Tabelle zeigt, wie man von einer einstelligen Zahl zur Zahl 4 gelangt:

einstellige Zahl	***Verkettung von Operationen***	
1	$\{\overline{B}[\overline{B}(1)]\} = 4$	
2	$\overline{B}(2) = 4$	
3	$\overline{A4}\;(\overline{B}\{\overline{B}[\overline{B}(3)]\}) = 2$	, weiter wie bei 2.
4		
5	$\overline{A0}\;[\overline{B}(5)] = 1$	, weiter wie bei 1.
6	$\overline{A4}\;\{\overline{B}[\overline{B}(6)]\} = 2$	, weiter wie bei 2.
7	$\overline{A4}\;[\overline{B}(7)] = 1$	, weiter wie bei 1.
8	$\overline{A4}\;(\overline{B}\{\overline{B}[\overline{B}(8)]\}) = 6$	, weiter wie bei 6.
9	$\overline{A8}\;[\overline{B}(9)] = 1$	, weiter wie bei 1.