1. Landeswettbewerb Mathematik Bayern 1998/99

2. Runde - Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 1

Beweise: Das Quadrat einer Primzahl lässt sich nicht als Summe der Quadrate von drei Primzahlen darstellen.

1. Lösung

Die Quadrate von natürlichen Zahlen ergeben bei Division durch 3 die Reste 0 oder 1.

Aus $n \equiv 0 \bmod 3$ folgt $n^2 \equiv 0 \bmod 3$.

Aus $n \equiv 1 \bmod 3$ folgt $n^2 \equiv 1 \bmod 3$.

Aus $n \equiv 2 \bmod 3$ folgt $n^2 \equiv 1 \bmod 3$

Wir betrachten ab jetzt nur noch Primzahlen. Von den Primzahlen ergibt nur das Quadrat von 3 bei Division durch 3 den Rest 0; alle anderen Primzahlquadrate ergeben bei Division durch 3 den Rest 1.

Annahme: Es existieren Primzahlen p, p_1, p_2 und p_3 mit $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$

1. Fall: Es sei $p \leq 3$.

Die Zahlen $2^2 = 4$ und $3^2 = 9$ lassen sich wegen $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \geq 12$ nicht als Quadrate von drei Primzahlen darstellen.

2.Fall: Es sei p > 3 und alle drei Primzahlen $p_i \neq 3$.

Dann gilt $p^2 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0 \bmod 3$. Widerspruch

3.Fall: Es sei p > 3 und mindestens eine der Zahlen p_i ist 3.

1.Unterfall: O.B.d.A. $p_1 = 3$, $p_2 \neq 3$ und $p_3 \neq 3$.

$p^2 \equiv 0 + 1 + 1 \equiv 2 \bmod 3$ Widerspruch

2.Unterfall: O.B.d.A. $p_1 = p_2 = 3$ und $p_3 \neq 3$.

$p^2 = 18 + p_3^2$

$p^2 - p_3^2 = (p - p_3) \cdot (p + p_3) = 18$

Da p und p_3 natürliche Zahlen sind, kommen nur die drei Zahlenpaare (1/18), (2/9) und (3/6) als Werte für die Faktoren in Frage. Das Auflösen der Gleichungssysteme nach p ergibt:

Aus $p - p_3 = 1 \wedge p + p_3 = 18$ folgt p = 9,5; keine Lösung.

Aus $p - p_3 = 2 \wedge p + p_3 = 9$ folgt p = 5,5; keine Lösung.

Aus $p - p_3 = 3 \wedge p + p_3 = 6$ folgt p = 4,5; keine Lösung.

3. Unterfall: $p_1 = p_2 = p_3 = 3$.

Die Gleichung $p^2 = 27$ ist für keine Primzahl p lösbar.

2. Lösung

Ohne Nachweis wird als bekannt vorausgesetzt:

Die Summe zweier gerader Zahlen ist wieder gerade, die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade, die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ist ungerade. Primzahlen sind, ausgenommen die 2, ungerade und größer als 2.

Weiter wird verwendet, dass das Quadrat einer ungeraden Zahl bei Division durch 8 den Rest 1 ergibt.

> *Begründung:*
> Es sei n = 2m + 1. Dann gilt $n^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4m \cdot (m+1) + 1$. Von den beiden natürlichen Zahlen m und m + 1 ist genau eine gerade. Das Produkt $4m \cdot (m+1)$ ist deshalb ein Vielfaches von 8.

Der Nachweis der Behauptung in der Aufgabenstellung erfolgt nun indirekt.

Annahme: Das Quadrat einer Primzahl p lässt sich als Summe der Quadrate von drei Primzahlen p_1, p_2 und p_3 darstellen. Es gilt also $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$.

1. Fall: p = 2

Dies ist nicht möglich, da die Summe der Quadrate von drei Primzahlen mindestens 12 $\left(= 2^2 + 2^2 + 2^2\right)$ ist.

2. Fall: p > 2, p_1, p_2 und p_3 sind ungerade.

Dann ist einerseits $p^2 \equiv 1 \bmod 8$, aber andererseits $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \equiv 3$ mod 8, denn jede ungerade Quadratzahl ist kongruent 1 mod 8. Dies ist ein Widerspruch.

3. Fall: p > 2 und zwei der drei Primzahlen sind gerade, also 2; o.B.d.A. sei $p_1 = p_2 = 2$.

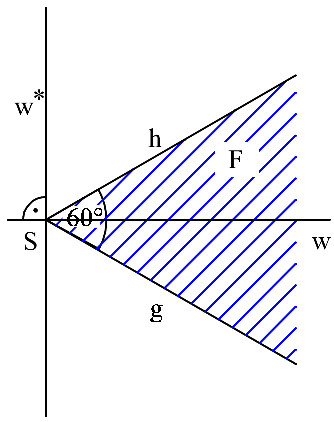
Es ist dann $p_1^2 + p_2^2 = 8$. Es gilt dann $p^2 - p_3^2 = (p - p_3) \cdot (p + p_3) = 8$. Da sowohl p als auch p_3 $(p > p_3)$ ungerade Primzahlen sind, ist der Faktor $p - p_3$ mindestens 2 und der Faktor $p + p_3$ mindestens 8. Die Bedingung $p^2 - p_3^2 = 8$ kann also nicht erfüllt werden.

1. Die Fälle, dass genau eine oder drei Primzahlen p_i gerade sind, ist wegen der eingangs genannten Voraussetzung nicht möglich.

Aufgabe 2

Ein 60°-Winkel hat die Schenkel g und h. Wir betrachten alle gleichseitigen Dreiecke, bei denen ein Eckpunkt auf g und ein Eckpunkt auf h liegt.

Welche Punkte können dritte Eckpunkte solcher gleichseitigen Dreiecke sein?



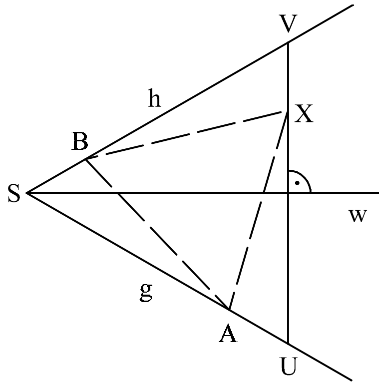
Behauptung

Der dritte Eckpunkt eines solchen gleichseitigen Dreiecks kann ein beliebiger Punkt im abgeschlossenen Winkelfeld F des 60°-Winkels oder ein Punkt auf der Geraden w* sein. w* ist die außerhalb des Winkelfeldes verlaufenden Winkelhalbierende der Trägergeraden von g und h. Sie ist orthogonal zur Winkelhalbierenden w von $\rightarrow$(g,h).

1. Lösung

Diese Behauptung wird in den folgenden vier Schritten bewiesen.

1. Schritt

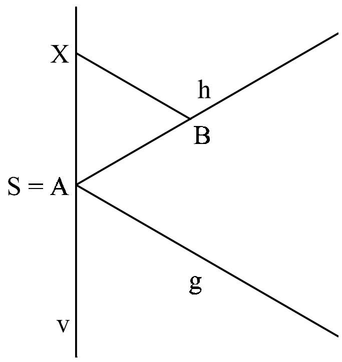


Sei X ein Punkt aus dem Winkelbereich F (X kann also auch auf g oder h liegen). Dann gibt es zum Punkt X einen Punkt A auf g und einen Punkt B auf h so, dass das Dreieck ABX gleichseitig ist.

Begründung

Wir wählen zunächst einen Punkt U auf g und einen Punkt V auf h so, dass X auf der Strecke UV liegt und UV senkrecht zur Winkelhalbierenden w steht. Da alle Innenwinkel des Dreiecks SUV die Weite 60° haben, ist dieses Dreieck gleichseitig. Durch Abtragen der Streckenlänge |UX| von S bzw. V aus finden wir einen Punkt A auf SU <u>und</u> einen Punkt B auf VS so, dass die Streckenlängen |UX|, |SA| und |VB| alle gleich sind. Da ΔSUV gleichseitig ist, gilt dann auch |VX| = |UA| = |SB|. Nach dem Kongruenzsatz sws sind jetzt die drei Dreiecke ΔUXA, ΔSAB und ΔVBX kongruent zueinander, insbesondere ist also |AX| = |XB| = |BA|. Also ist das Dreieck ΔAXB gleichseitig und der erste Teil ist bewiesen.

2. Schritt



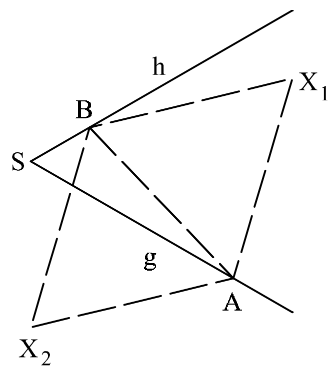
Zu einem Punkt X auf der Geraden w* gibt es Punkte A auf g und B auf h so, dass das Dreieck ΔABX gleichseitig ist.

Begründung

Wir wählen A = S und B auf h mit |SB| = |SX| (oder B = S und A auf g). Dann ist ΔSBX gleichschenklig und wegen w(BSX) = 60° sogar gleichseitig.

Nach den ersten beiden Schritten kommen alle in der Behauptung beschriebenen Punkte als dritte Eckpunkte gleichseitiger Dreiecke vor. Wir müssen jetzt zeigen, dass keine weiteren Punkte vorkommen können.

Zu zwei Punkten A auf g und B auf h gibt es genau zwei gleichseitige Dreiecke, die A und B als Eckpunkte haben. Wir bezeichnen die dritten zugehörigen Eckpunkte mit X_1 und X_2. Die beiden gleichseitigen Dreiecke sind also $\Delta A X_1 B$ und $\Delta AB X_2$.

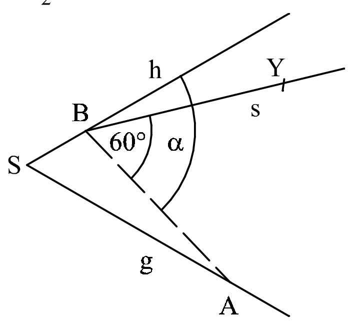


3. Schritt

Einer der Punkte, o.B.d.A. der Punkt X_1, liegt im Winkelbereich F .

Begründung

Da im Dreieck SAB die Winkelsumme 180° ergibt und da w(ASB) = 60° ist, sind die beiden Winkel ∠BAS und ∠SBA zusammen 120° und einer der beiden Winkel ist mindestens 60°. Wir nehmen an, dass 60° ≤ w(SBA) ≤ 120° gilt. (Der Beweis im Fall 60° ≤ w(BAS) ≤ 120° verläuft entsprechend.)

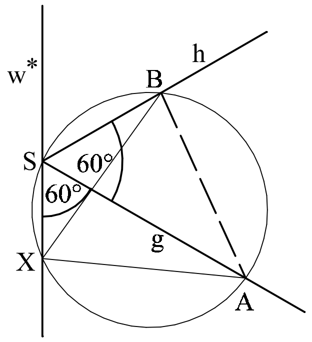


Ist α die Größe des Nebenwinkels von ∠SBA, so ist also auch 60° ≤ α ≤ 120°. Tragen wir nun an die Strecke AB einen 60°-Winkel mit Scheitel B ab und nennen den zweiten Schenkel dieses Winkels s, so verläuft die Halbgerade s von B ausgehend wegen α ≥ 60° zunächst im abgeschlossenen Winkelbereich F. Für einen beliebigen Punkt Y auf s ist w(SBY) ≥ 120°, also kann Y nicht auf g liegen (sonst wäre die Winkelsumme im Dreieck BSY wegen des 60°-Winkels zwischen g und der Halbgeraden SB größer als 180°). Somit hat der Winkelschenkel s keinen Schnittpunkt mit dem Winkelschenkel g und verläuft somit ganz innerhalb von F. Da X_1 auf s liegt, ist auch X_1 in F und damit der dritte Schritt bewiesen.

4. Schritt

X_2 liegt auf der Geraden w*.

Begründung



Sei X ein Punkt auf w* mit w(BAX) = 60°.

Da w(XSB) = 120° ist, beträgt im Viereck ABSX die Winkelsumme der gegenüberliegenden Winkel bei A und S 180°. Dieses Viereck ist deshalb eine *Sehnenviereck*. Es gibt also einen Kreis, auf dem alle vier Eckpunkte des Vierecks liegen.

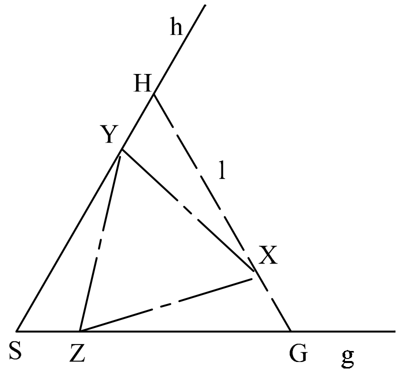
Der *Umfangswinkelsatz* besagt nun, dass die Winkel im Kreis zur Sehne AB gleich groß sind, also w(AXB) = w(ASB) = 60°.

Somit sind im Dreieck ABC alle drei Innenwinkel 60°. Das Dreieck ist daher gleichseitig. Da die Lage des dritten Eckpunktes eines gleichseitigen Dreiecks bei vorgegebener Lage der Seite AB (bis auf Spiegelung an AB) eindeutig bestimmt ist, gilt $X = X_2$. X_2 liegt also auf w*.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Lösung

1. Schritt



Zu jedem Punkt X im offenen Winkelfeld von →(g,h) kann man ein solches Dreieck konstruieren.

Begründung

Wir konstruieren durch X eine Gerade l so, dass g, h und l ein gleichseitiges Dreieck SHG erzeugen, wobei H der Schnittpunkt von l und h und G der Schnittpunkt von g und l ist. Dann tragen wir von G aus auf der Halbgeraden von G nach S die Länge der Strecke HX ab und erhalten den Punkt Z, von S aus auf der Halbgeraden von S nach H die Länge der Strecke HX und erhalten den Punkt Y. Nach Konstruktion sind die Dreiecke ZGX, XHY und YSZ kongruent. Das Dreieck XYZ ist deshalb gleichseitig.

2. Schritt

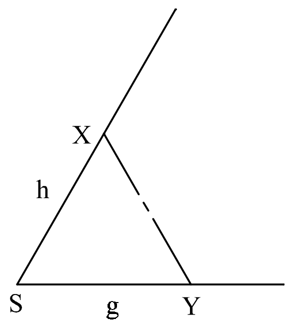
Für jeden Punkt, der auf g oder h liegt, lässt sich ein solches Dreieck konstruieren.

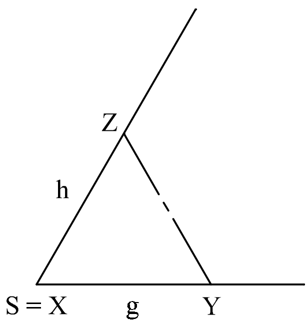
Begründung

Liegt X auf h und ist X ≠ S, dann tragen wir auf g von S aus die Länge der Strecke SX ab und erhalten Y. Das Dreieck XSY ist nach Konstruktion gleichseitig.

Entsprechend verfahren wir, wenn X auf H liegt und X ≠ S ist.

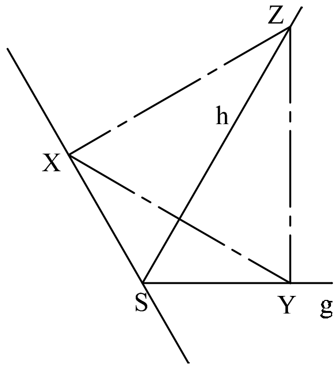
Ist X = S, so tragen wir von S aus auf g und h zwei gleich lange Strecken ab und erhalten die Punkte Y und Z. Das Dreieck XYZ ist nach Konstruktion gleichseitig.





3. Schritt

Zu jedem Punkt X **(** X ≠ S) auf der 2. Winkelhalbierenden von g und h, die nicht im Winkelfeld →(g,h) verläuft, kann man ein solches Dreieck konstruieren.



Begründung

In der nebenstehenden Abbildung ist h die Winkelhalbierende von →(g, SX). Von S aus tragen wir die Länge der Strecke SX ab und erhalten auf dem Winkelschenkel g den Punkt Y. Konstruieren wir nun über XY ein gleichseitiges Dreieck in der nebenstehend angegebenen Weise, so liegt der dritte Eckpunkt Z auf h, weil h die Mittelsenkrechte von XY ist.

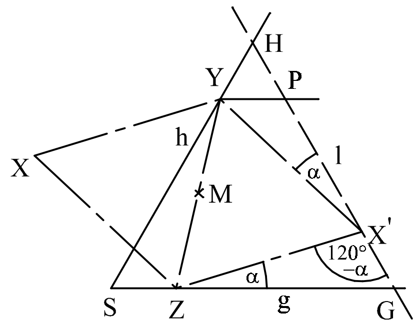
Entsprechend verläuft die Konstruktion, wenn g die Winkelhalbierende von ∠**(**SX, h) ist.

4. Schritt

Zu jedem Punkt X, der nicht im abgeschlossenen Winkelfeld ∠(g,h) oder auf der 2. Winkelhalbierenden liegt, lässt sich kein solches Dreieck konstruieren.

Beweis erfolgt indirekt.

Annahme: Es gäbe für einen solchen Punkt X ein gleichseitiges Dreieck XYZ, wobei Z auf g und Y auf h liegt.



Spiegeln wir das Dreieck XZY an der Geraden (YZ), so erhalten wir X' als Bildpunkt von X. Dieser Punkt X' liegt im Innern des Winkelfeldes von →(g,h), denn die Außenwinkel des Dreieckes SZY sind nach dem Satz über die Außenwinkel als Summe der nicht anliegenden Innenwinkel eines Dreiecks sicher größer als 60°. Die Bilder der Halbgeraden ZX und YX verlaufen deshalb nach der Spiegelung an (YZ) zunächst im Innern von →(g,h) und deshalb auch ihr Schnittpunkt X'.

Nun zeichnen wir eine Gerade l durch den Punkt X' so, dass ihr Schnittpunkt G mit g und der Schnittpunkt H mit h zusammen mit S ein gleichseitiges Dreieck bilden. Die Dreiecke SZY, ZGX' und X'HY sind kongruent, denn sie stimmen in den Längen der Strecken ZX', X'Y und YZ überein. Außerdem haben die anliegenden Winkel wegen der Winkelsumme in den Teildreiecken und den gestreckten Winkeln bei Z, X' und Y die Weiten α und 120°−α.

Zusätzlich wird nun eine Parallele zu g durch den Punkt Y gezeichnet. Sie schneidet die Gerade l im Punkt P. Das Dreieck YPH ist gleichseitig, da alle drei Winkel nach Konstruktion gleich groß sind. Wegen |SZ| = |YH| und der Gleichseitigkeit von ΔYPH sind auch die Strecken SZ und YP gleich lang.

Durch die Punktspieglung am Mittelpunkt M der Strecke YZ wird der Punkt S auf den Punkt P abgebildet.

> *Begründung:*
> Das Bild der Geraden (SZ) ist die zu (SZ) parallele Gerade durch Y, also die Gerade (YP).
> Da |SZ| = |YP| gilt, wird die Strecke SZ auf die Strecke YP abgebildet.

Dies bedeutet insbesondere, dass bei dieser Punktspiegelung auch SX auf X'P abgebildet wird. Die Strecken SX und X'P sind also parallel. Die Halbgerade SX schließt mit der Halbgeraden g also einen Winkel von 120° ein. Der Punkt X liegt also auf der zweiten Winkelhalbierenden von →(g,h).

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe 3

Anfang Januar 1999 wurde eine geheimnisvolle Inschrift entdeckt, die offensichtlich von Außerirdischen bei einem Besuch auf der Erde hinterlassen wurde. Sie konnte entschlüsselt werden:

> *"Wir landen am letzten Tag des Jahres n wieder auf der Erde. Die Zahl n ist das Produkt zweier natürlicher Zahlen. Das Produkt aus der Summe dieser beiden Zahlen und der Anzahl der Tage des Monats unserer Rückkehr ist um 3 größer als das Doppelte von n."*

Wann ist mit der Rückkehr der Außerirdischen zu rechnen?

1. Lösung

Die Beschreibung der Jahreszahl n in der Botschaft besagt, dass man n als ein Produkt $a \cdot b$ von zwei natürlichen Zahlen a und b so schreiben kann, dass $31 \cdot (a+b) = 2n+3$ gilt.

Wir setzen $n = a \cdot b$ in diese Gleichung ein und lösen sie nach b auf:

$$31 \cdot (a+b) = 2ab+3 \quad \Leftrightarrow \quad 31a+31b = 2ab+3 \quad \Leftrightarrow \quad b(31-2a) = 3-31a \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{31a-3}{2a-31}.$$

Da b eine natürliche Zahl ist, muss $2a-31$ ein Teiler von $31a-3$ sein. Dann ist $2a-31$ auch ein Teiler von $2 \cdot (31a-3)$.

Wegen $\frac{62a-6}{2a-31} = \frac{62a-961+955}{2a-31} = \frac{31(2a-31)}{2a-31} + \frac{955}{2a-31} = 31 + \frac{955}{2a-31}$ genügt es, a so bestimmen, dass $2a-31$ ein Teiler von 955 ist.

Nun ist 955 = 5 · 191; 955 hat also nur die vier Teiler 1, 5, 191 und 955. Für den Term 2a – 31 sind vier Fälle zu betrachten:

1. 2a – 31 = 1, dann ist a = 16, b = 493 und n = 16 · 493 =7888.
2. 2a – 31 = 5, dann ist a = 18, b = 111 und n = 18 · 111 = 1998.
3. 2a – 31 = 191, dann ist a = 111, b = 18 und n = 1998.
4. 2a – 31 = 955, dann ist a = 493, b = 16 und n = 7888.

Als Zeitpunkte kommen also der 31.12.1998 oder der 31.12.7888 in Frage. Da die Nachricht aber erst Anfang Januar 1999 gefunden wurde, kommt wohl erst der 31.12.7888 für die Rückkehr der Außerirdischen in Frage.

2. Lösung

n habe die beiden Faktoren a und b.

Es ist die Gleichung (a + b) ·31 – 3 = 2ab für natürliche Zahlen a und b (a ≤ b) zu lösen.

Wir formen äquivalent um:

ab – 15,5·a – 15,5·b = –1,5 (Faktorisieren)

(a – 15,5) · (b – 15,5) = –1,5 + 240,25 (Multiplikation mit 4)

(2a – 31) · (2b – 31) = 955

Da a und b natürliche Zahlen sind, stellen 2a – 31 und 2b – 31 ganze Zahlen dar, wobei entweder beide Faktoren positiv oder beide negativ sind. Die Zahl 955 hat, abgesehen vom Vorzeichen, die Teiler 1, 5, 191 und 955.

1. Fall: $2a-31=-955 \quad \wedge \quad 2b-31=-1.$

a = –462, b = 15, n = –6930, keine Lösung.

2. Fall: $2a-31=-191 \quad \wedge \quad 2b-31=-5$.

a = –80, b = 13, n = –1040, keine Lösung.

3. Fall $2a-31=1 \quad \wedge \quad 2b-31=955$.

a = 16, b = 493, n = 7888.

4. Fall $2a-31=5 \quad \wedge \quad 2b-31=191$.

a = 18, b = 111, n = 1998.

Da Ende des Jahres 1998 keine Außerirdischen gemeldet wurden, ist mit ihrer Rückkehr am 31.12.7888 zu rechnen.

3. Lösung

Die beiden Faktoren mögen a und b heißen. Dabei kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a, b \in N$ und $a \le b$ angenommen werden.

Der letzte Tag des Jahres ist der 31.12..

Somit gilt: $(a+b)\cdot 31-3=2ab$

Umformen und Auflösen nach b führt zu

$$31a+31b-3=2ab \quad \Leftrightarrow \quad 31a-3=b\cdot(2a-31) \quad \Leftrightarrow \quad b=\frac{31a-3}{2a-31} \qquad (*)$$

Der letzte Schritt ist möglich, da a eine natürliche Zahl ist und somit sicherlich $2a-31\neq 0$ ist.

Die Zahl b ist positiv, wenn $a\ge 16$ ist, da in diesem Fall sowohl Zähler als auch Nenner positive Zahlen sind. Für $1\le a\le 15$ ist der Zähler positiv und der Nenner negativ, der Bruch also ebenfalls negativ.

Daher müssen wir für a nur noch natürliche Zahlen größer oder gleich 16 betrachten.

Da die Wiederkehr der Außerirdischen in der Zukunft liegt, muss außerdem n > 1998 sein.

Somit gilt $b>\frac{1998}{a}$.

Zusammen mit (*) folgt also:

$$\frac{31a-3}{2a-31}>\frac{1998}{a} \Leftrightarrow 31a^2-3a>3996a-31\cdot 1998 \Leftrightarrow 31a^2-3999a+31\cdot 1998>0 \Leftrightarrow a^2-129a+1998>0$$

Die linke Seite der Ungleichung lässt sich nach dem Satz von Vieta in Linearfaktoren zerlegen:

$$(a-18)\cdot(a-111)>0 .$$

Diese Ungleichung ist erfüllt für $a>18 \quad \wedge \quad a>111;$ also $a>111$ (1)

oder für $a<18 \quad \wedge \quad a<111;$ also $a<18$ (2).

Im ersten Fall wäre $\frac{1998}{a}<18$ und damit b < a im Widerspruch zu Voraussetzung $a \le b$.

Der zweite Fall führt zusammen mit $a\ge 16$ zu den beiden möglichen Lösungen a = 16 oder a = 17.

Für a = 16 erhalten wir b = 493 und damit n = 7888. Für a = 17 erhalten wir $b=174\frac{2}{3}$ und damit keinen ganzzahligen Wert für b.

Da n = 7888 die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, kann mit der Wiederkehr der Außerirdischen am 31.12.7888 gerechnet werden.

Aufgabe 4

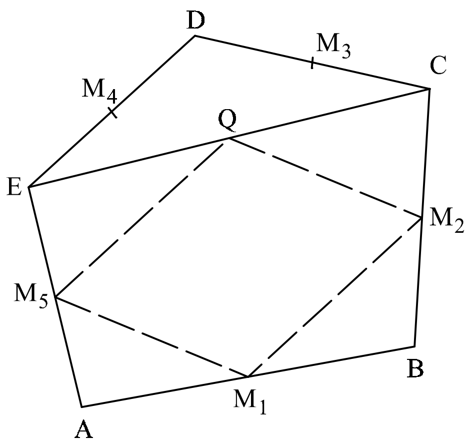
Von einem Fünfeck sind nur die fünf Seitenmittelpunkte gegeben.

Konstruiere dieses Fünfeck und begründe die Konstruktion.

1. Lösung

Zeichnen wir in die Planfigur eines Fünfecks die Diagonale CE ein, so bildet der Mittelpunkt Q zusammen mit den drei Seitenmitten M_1, M_2 und M_5 ein Parallelogramm, da die Seiten dieses Vierecks die Mittelparallelen in den Teildreiecken des Vierecks ABCE sind. Auch das Viereck QM_3DM_4 ist ein Parallelogramm, weil QM_4 und QM_3 Mittelparallelen im Dreieck CDE sind.

Planfigur



Damit haben wir ein Konstruktionsverfahren für das Fünfeck gefunden:

Q sei der Schnittpunkt der Parallelen zu M_1M_2 durch M_5 mit der Parallelen zu M_1M_5 durch M_2. Dieser Schnittpunkt ist eindeutig bestimmt, weil die Seitenmitten M_1, M_2 und M_5 ein Dreieck bilden.

D ist der Schnittpunkt der Parallelen zu QM_3 durch M_4 mit der Parallelen zu QM_4 durch M_3. Auch dieser Schnittpunkt ist eindeutig bestimmt, da bei einem Fünfeck die Punkte C, D und E ein Dreieck bilden und dies deshalb auch für die Seitenmitten dieses Dreieckes gilt.

Die Eckpunkte C und E des Fünfecks ergeben sich dann durch Punktspiegelung von D an M_3 bzw. an M_4. Die Punkte A und B erhalten wir durch Punktspiegelung von E an M_5 bzw. von C an M_2. Nach der Konstruktion ist M_1 der Mittelpunkt der Seite AB.

2. Lösung

Konstruktionsüberlegungen:

M_2M_3 ist eine Mittellinie im Dreieck BCD. Sie hat deshalb die gleiche Richtung wie BD und die halbe Länge.

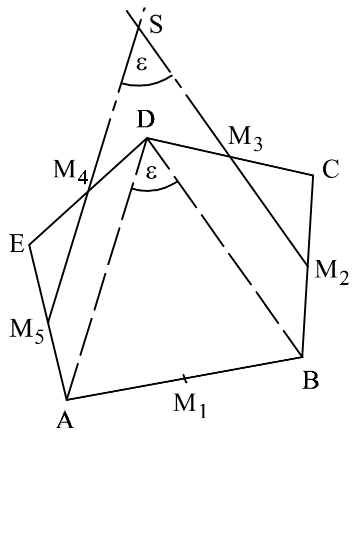
M_5M_4 ist eine Mittellinie im Dreieck ADE. Sie hat deshalb die gleiche Richtung wie AD und die halbe Länge.

Die Schnittwinkel der Geraden (M_2M_3) und (M_5M_4) und der Geraden (AD) und (BD) sind gleich groß. Ihre Größe sei ε.

Aus diesen drei Eigenschaften lässt sich ein Dreieck A´B´D´ konstruieren, das zum Dreieck ABD nach sws kongruent ist.

(Die beiden Geraden (M_2M_3) und (M_5M_4) sind nicht parallel, sonst würden nämlich die Punkte A und B zusammenfallen und das Fünfeck zu einem Viereck entarten. Damit ist der Schnittpunkt S der beiden Geraden gesichert und die Größe von ε bekannt.)

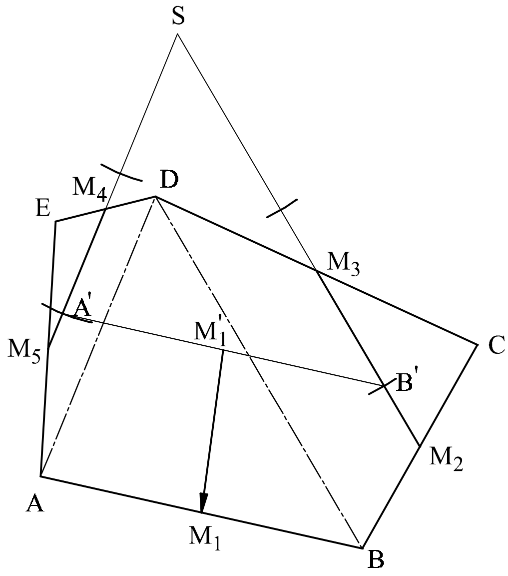
Planfigur



Nachfolgend wird nun ausgehend von der Lage der fünf Seitenmittelpunkte M_i die Konstruktion des Fünfecks ABCDE beschrieben.

Konstruktion:

1. Die Strecken M_2M_3 und M_5M_4 werden bis zum Schnittpunkt S verlängert.
2. Die Streckenlängen $|M_2M_3|$ und $|M_5M_4|$ werden auf der jeweiligen Halbgeraden SM_5 bzw. SM_2 jeweils zweimal abgetragen. Dadurch wird das Dreieck SA´B´ festgelegt.
3. Der Mittelpunkt M_1' der Strecke A´B´ wird bestimmt.
4. Die Parallelverschiebung $\overrightarrow{M_1'M_1}$ des Dreiecks SA´B´ führt das Dreieck SA´B´ in das Dreieck ABD über.
5. Die beiden fehlenden Eckpunkte C und E des Fünfecks werden durch die Punktspiegelung von B an M_2 bzw. von A an M_5 bestimmt.



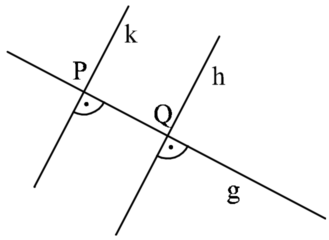
3. Lösung

Bei der folgenden Lösung werden Ergebnisse über die Verkettung (Hintereinanderausführung) von Geradenspiegelungen bzw. die Darstellung von Abbildungen durch Geradenspiegelungen verwendet. **Wichtig** dabei ist:

Die Verkettung $S_g \circ S_h$ zweier Geradenspiegelungen S_g und S_h mit

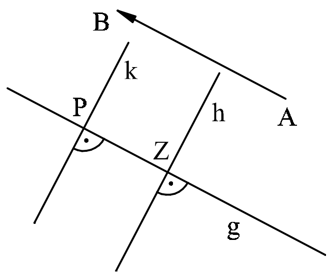
- zueinander orthogonalen Geraden g und h ist die Punktspiegelung S_Z am Schnittpunkt Z von g und h.
- zueinander parallelen Geraden g und h ist eine Verschiebung. Der Verschiebungspfeil ist orthogonal zu den beiden Geraden und von der ersten Achse h zur zweiten Achse g gerichtet. Seine Länge ist der doppelte Abstand von g und h.

Wendet man diese Ergebnisse an, so ergibt sich, dass die Verkettung $S_P \circ S_Q$ zweier Punktspiegelungen eine Verschiebung ist.



$$S_P \circ S_Q = S_k \circ S_g \circ S_g \circ S_h = S_k \circ S_h = V_{2\cdot\overrightarrow{PQ}}$$

Die Verkettung einer Punktspiegelung S_P mit einer Verschiebung $V_{\overrightarrow{AB}}$ ist eine Punktspiegelung.



$$S_P \circ V_{\overrightarrow{AB}} = S_g \circ S_k \circ S_k \circ S_h = S_g \circ S_h = S_Z$$

Nach diesen Vorbemerkungen nun zur eigentlichen Aufgabe. Dazu betrachten wir die Abbildung $S_{M_5} \circ S_{M_4} \circ S_{M_3} \circ S_{M_2} \circ S_{M_1}$ mit den bekannten Seitenmitten $M_1, \ldots, M_5$.

Die Verkettung der fünf Punktspiegelungen ist eine Punktspiegelung, was sich aus der nebenstehenden Darstellung ergibt, in der die obigen Ergebnisse benutzt wurden. Weiterhin ist leicht zu sehen, dass der gesuchte Eckpunkt A ein Fixpunkt dieser Abbildung ist, da der Punkt A bei der Verkettung der fünf Punktspiegelungen zunächst auf B, dieser Bildpunkt auf C usw. bis schließlich wieder auf A abgebildet wird. Damit ist A das Zentrum dieser Punktspiegelung.

$$\underbrace{S_{M_5} \circ \underbrace{S_{M_4} \circ \underbrace{S_{M_3} \circ \underbrace{S_{M_2} \circ S_{M_1}}_{\text{Verschiebung}}}_{\text{Punktspiegelung}}}_{\text{Verschiebung}}}_{\text{Punktspiegelung}}$$

Wählen wir nun einen beliebigen Punkt P und bilden ihn mit $S_{M_5} \circ S_{M_4} \circ S_{M_3} \circ S_{M_2} \circ S_{M_1}$ ab, so ist in der Regel $P' \neq P$. Der Fixpunkt der Punktspiegelung, die P auf P´ abbildet ist der Mittelpunkt dieser Strecke; also ist A der Mittelpunkt der Strecke PP´. Ausgehend von A können dann die anderen Eckpunkte des Fünfecks nacheinander durch Punktspiegelung an den vorgegebenen Seitenmitten bestimmt werden.