20. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Lösungsbeispiele

für die Aufgaben der 2. Runde 2017/2018

Aufgabe 1

Eine Folge $a_0, a_1, \ldots$ *natürlicher Zahlen ist durch einen Startwert* $a_0 > 1$ *und die folgende Vorschrift bestimmt:*

$$a_{i+1} = \begin{cases} a_i : 3, & \text{falls } a_i \text{ durch 3 teilbar ist} \\ a_i + 5, & \text{falls } a_i \text{ nicht durch 3 teilbar ist.} \end{cases} \qquad (i \geq 0)$$

Für welche Startwerte a_0 *gibt es ein n mit* $a_n = 1$ *?*

Lösung:

Genau dann, wenn die Zahl a_0 nicht durch 5 teilbar ist, gibt es ein n mit $a_n=1$.

Beweisvorschlag:

Zunächst wird eine Hilfsaussage gezeigt.

Hilfsaussage:

(1) Wenn a_0 durch 5 teilbar ist, dann sind alle Zahlen der Folge durch 5 teilbar.
(2) Wenn a_0 nicht durch 5 teilbar ist, dann ist keine Zahl der Folge durch 5 teilbar.

Beweis der Hilfsaussage:

Zu (1): Wir zeigen die Aussage durch einen Widerspruchsbeweis.
Angenommen, a_0 ist durch 5 teilbar aber nicht alle anderen Zahlen der Folge sind durch 5 teilbar. Dann tritt in der Folge irgendwann an einer Stelle i erstmals eine solche nicht durch 5 teilbare Zahl a_i auf. Weil a_0 durch 5 teilbar ist, muss $i \geq 1$ sein und weil i der kleinste Index ist, für den a_i nicht durch 5 teilbar ist, muss a_{i-1} durch 5 teilbar sein.
Dann gibt es eine natürliche Zahl b so, dass $a_{i-1} = 5b$ ist.
Ist dabei a_{i-1} durch 3 teilbar, so muss b durch 3 teilbar sein. Dann ist b=3b‘ mit einer natürlichen Zahl b‘ und es gilt entsprechend der Bildungsvorschrift der Folge: $a_i = a_{i-1}:3 = 5b:3 = 15b':3 = 5b'$. Daher wäre auch a_i durch 5 teilbar, was nicht sein kann.
Ist aber a_{i-1} nicht durch 3 teilbar, dann ist $a_i = a_{i-1} + 5 = 5b + 5 = 5(b+1)$. Daher wäre auch hier a_i durch 5 teilbar, was ein Widerspruch ist, weil a_i nicht durch 5 teilbar sein sollte.
Also war die ursprüngliche Annahme falsch und die Behauptung (1) ist bewiesen.

Zu (2): Auch hier zeigen wir die Aussage über einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, a_0 ist nicht durch 5 teilbar aber nicht alle anderen Zahlen der Folge sind nicht durch 5 teilbar. Dann tritt in der Folge irgendwann an einer Stelle i erstmals eine durch 5 teilbare Zahl a_i auf und es gibt eine natürliche Zahl b so, dass $a_i = 5b$ ist.
Weil a_0 nicht durch 5 teilbar ist, muss $i \geq 1$ sein und weil i der kleinste Index ist, für den a_i durch 5 teilbar ist, kann a_{i-1} nicht durch 5 teilbar sein.
Ist nun a_{i-1} durch 3 teilbar, so wäre entsprechend der Bildungsvorschrift der Folge $a_i = a_{i-1}:3$ und daher auch $a_{i-1} = 3 \cdot a_i = 3 \cdot 5 \cdot b$. Daher wäre auch a_{i-1} durch 5 teilbar, was nicht sein kann.
Ist aber a_{i-1} nicht durch 3 teilbar, dann ist $a_i = a_{i-1} + 5$ bzw. $a_{i-1} = a_i - 5 = 5b - 5 = 5(b-1)$. Daher wäre auch hier a_{i-1} durch 5 teilbar, was ein Widerspruch ist. Also war die ursprüngliche Annahme falsch und die Behauptung (2) ist bewiesen.

Nun können wir zum Beweis der eigentlichen Behauptung kommen. Zu zeigen sind dabei zwei Richtungen:

(A) Wenn a_0 durch 5 teilbar ist, dann gibt es kein n mit a_n=1.
(B) Wenn a_0 nicht durch 5 teilbar ist, dann gibt es ein n mit a_n=1.

Zu (A): Wenn a_0 durch 5 teilbar ist, sind nach der Hilfsaussage alle Zahlen der Folge durch 5 teilbar. Weil 1 nicht durch 5 teilbar ist, kann es demnach kein n geben, für das a_n=1 ist.

Zu (B):
Sei a_0 nicht durch 5 teilbar.
Unter allen natürlichen Zahlen, die in der Folge auftreten, gibt es eine kleinste K. Es gilt also für mindestens einen Index $j \geq 0$, dass $a_j = K$ ist und $a_i \geq K$ für alle $i \geq 0$ gilt.

Angenommen, alle Zahlen der Folge wären größer als 5.

Dann wäre $a_j = K \geq 6$. Wir unterscheiden nun drei Fälle:
<u>Fall 1:</u> a_j ist durch 3 teilbar.
Dann ist $a_{j+1} = a_j : 3 < a_j = K$, weil $a_j \geq 6 > 0$. Das kann aber nicht sein, weil $a_i \geq K$ für alle $i \geq 0$ gilt.
<u>Fall 2:</u> a_j lässt beim Teilen durch 3 den Rest 1.
Dann ist $a_j = 3m + 1$ mit einer natürlichen Zahl $m \geq 2$. Nach der Bildungsvorschrift der Folge ist $a_{j+1} = a_j + 5 = (3m + 1) + 5 = 3m + 6 = 3(m + 2)$ durch 3 teilbar und deswegen folgt $a_{j+2} = a_{j+1}: 3 = 3(m + 2): 3 = m + 2 < 3m + 1 = a_j = K$.
Hierbei wurde $m \geq 2$ und die daraus folgenden Beziehungen $2m > 1$, also $3m + 1 = m + 2m + 1 > m + 1 + 1 = m + 2$ genutzt.
Das sich ergebende $a_{j+2} < K$ ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von K.
<u>Fall 3:</u> a_j lässt beim Teilen durch 3 den Rest 2.
Dann ist $a_j = 3m + 2$ mit einer natürlichen Zahl $m \geq 2$. Nach der Bildungsvorschrift der Folge ist $a_{j+1} = a_j + 5 = (3m + 2) + 5 = 3m + 7 = 3(m + 2) + 1$ ebenfalls nicht durch 3 teilbar und deswegen folgt $a_{j+2} = a_{j+1} + 5 = (3m + 7) + 5 = 3m + 12 = 3(m + 4)$. Diese

Zahl ist aber durch 3 teilbar, so dass $a_{j+3} = a_{j+2}: 3 = 3(m+4): 3 = m+4 < 3m+2 = a_j = K$ folgt.
Hierbei wurde $m \geq 2$ und die daraus folgenden Beziehungen $2m > 2$, also
$3m + 2 = m + 2m + 2 > m + 2 + 2 = m + 4$ genutzt.
Das sich ergebende $a_{j+3} < K$ ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von K.

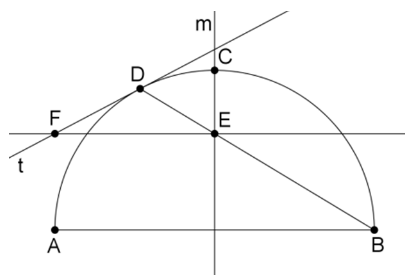
In allen drei möglichen Fällen ergibt sich also ein Widerspruch
Die Annahme, alle Zahlen der Folge wären größer als 5, kann also nicht wahr sein.
Somit muss $K \leq 5$ sein. Wir untersuchen nun die einzelnen Fälle für $a_j = K$:

Der Fall $a_j = K = 5$ kann nach dem eingangs gezeigten Hilfssatz aufgrund der Voraussetzung, dass a_0 nicht durch 5 teilbar ist, nicht eintreten.
Wäre $a_j = K = 4$, dann ergeben sich die weiteren Folgeglieder: $a_{j+1} = 4 + 5 = 9$, $a_{j+2} = 9: 3 = 3$. Das ist aber wieder ein Widerspruch zur Minimalität von K.
Wäre $a_j = K = 3$, dann ergibt sich $a_{j+1} = 3: 3 = 1$, wieder im Widerspruch zur Minimalität von K.
Wäre $a_j = K = 2$, dann ergeben sich die weiteren Folgeglieder: $a_{j+1} = 2 + 5 = 7$, $a_{j+2} = 7 + 5 = 12$, $a_{j+3} = 12: 3 = 4$, $a_{j+4} = 4 + 5 = 9$, $a_{j+5} = 9: 3 = 3$ und $a_{j+6} = 3: 3 = 1$.
Das ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von K.

Also bleibt nur $a_j = K = 1$. Das bedeutet aber, dass die Zahl 1 in der Folge auftritt.
Das war zu zeigen.

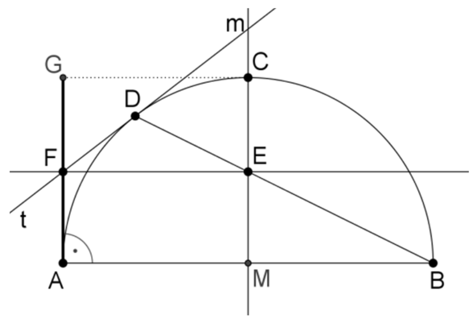
Aufgabe 2

Der Halbkreis über der Strecke [AB] schneidet die Mittelsenkrechte m der Strecke [AB] im Punkt C.
Auf dem Viertelkreisbogen zwischen den Punkten A und C wird ein Punkt D gewählt und durch ihn die Tangente t an den Halbkreis gezeichnet.
Die Strecke [BD] schneidet m im Punkt E.
Die Parallele zu [AB] durch E schneidet t im Punkt F.



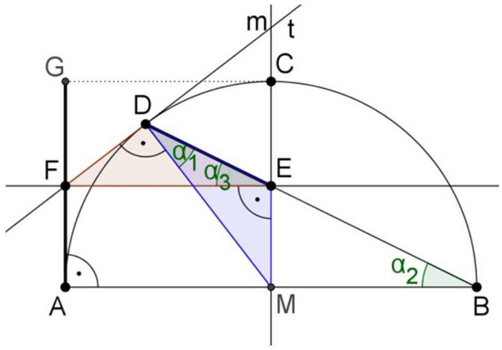
Auf welcher Bahn bewegt sich F, wenn sich D auf dem Viertelkreisbogen von A nach C bewegt, ohne den Punkt C zu erreichen.

Vorbemerkung: Sei M der Mittelpunkt der Strecke [AB].
Weil $\overline{AM} = \overline{CM}$ und $\angle CMA = 90°$ ist, gibt es einen Punkt G, für den das Viereck AMCG ein Quadrat ist.



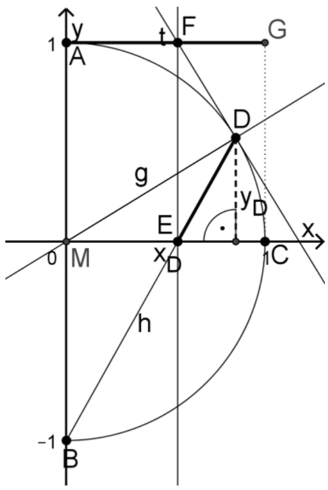
Lösung: Der Punkt F bewegt sich auf der Strecke [AG] und erreicht jeden Punkt dieser Strecke, außer den Punkt G.

1. Beweisvorschlag (mit kongruenten Dreiecken):



Wenn D=A ist, ist auch F=A. F liegt also in diesem Fall wie behauptet auf [AG].
Andernfalls sind in nebenstehender Skizze die Winkel α_1, α_2 und α_3 eingezeichnet.
Weil die Radien [MD] und [MB] des Halbkreises gleich lang sind, ist das Dreieck BDM gleichschenklig mit Basis [BD]. Deswegen ist $\alpha_1 = \alpha_2$. Weil EF parallel zu [AB] verläuft, gilt nach dem Stufenwinkelsatz: $\alpha_2 = \alpha_3$. Insgesamt folgt damit auch $\alpha_1 = \alpha_3$ (1).
Weil m senkrecht auf [AB] steht und EF parallel zu [AB] verläuft, steht m auch senkrecht auf EF (wieder nach Stufenwinkelsatz).
Ebenso steht die Tangente t senkrecht auf dem Radius [MD].
Daher folgt $\angle DEM = 90° + \alpha_3 = 90° + \alpha_1 = \angle FDE$ (2).
Die beiden Dreiecke FED und DME stimmen wegen (1) und (2) also in der Seite [DE] und den beiden angrenzenden Winkeln überein, sind also nach Kongruenzsatz wsw kongruent.
Hieraus kann man schließen, dass $\overline{FE} = \overline{MD} = \overline{AM}$ ist, letzteres weil [MD] und [MA] Radien des Halbkreises sind. Die Strecken [AM] und [FE] sind also gleichlang und parallel. Zusätzlich ist der Winkel $\angle FEM = 90°$. Damit ist das Viereck AMEF ein Rechteck.
Der Winkel $\angle MAF$ ist also auch gleich 90°. Damit liegt der Punkt F auf dem Strahl [AG und weil $\overline{AF} = \overline{ME} < \overline{MC}$ ist, liegt F wie behauptet auf der Strecke [AG] (und ist nicht gleich dem Punkt G).
Umgekehrt wird jeder solche Punkt F auch durch eine geeignete Lage von D auf dem Viertelkreis erreicht, denn: F=A wird erreicht, wenn D=A ist. Andernfalls schneidet die Parallele zu [AB] durch einen Punkt F auf [AG] (außer G) die Strecke [MC] in einem Punkt E und der Strahl [BE schneidet den Viertelkreis in einem Punkt D, der nicht gleich C ist. Daher schneidet die Tangente an den Viertelkreis in D die Gerade EF in einem Punkt F‘. Wie oben gesehen, liegt F‘ dann aber so, dass das Viereck AMEF‘ ein Rechteck ist. Daher ist F‘=F.

2. Beweisvorschlag (Rechnen im Koordinatensystem):



Die Figur wird so in ein Koordinatensystem gelegt, dass M im Ursprung liegt, C auf der x-Achse die Koordinaten C(1|0) hat und A auf der y-Achse die Koordinaten A(0|1) bekommt.
Der Punkt D habe dann die Koordinaten D(x_D|y_D) mit nichtnegativen Werte x_D und y_D.
Im Fall D=A folgt F=A. Hier liegt F also wie behauptet auf [AG].
Andernfalls ist $0 < x_D < 1$ und $0 < y_D < 1$ und nach Satz des Pythagoras folgt auch $x_D^2 + y_D^2 = \overline{MD}^2 = 1$.
Die Gerade g durch M und D hat die Steigung $\frac{y_D}{x_D}$. Die Tangente t verläuft senkrecht zu g durch den Punkt D. Sie hat demnach die

Steigung -$\frac{x_D}{y_D}$ und ihr y-Achsenabschnitt r erfüllt die Gleichung -$\frac{x_D}{y_D} \cdot x_D + r = y_D$. Dies kann man nach r umformen, wobei sich $r = \frac{x_D}{y_D} \cdot x_D + y_D = \frac{x_D^2}{y_D} + \frac{y_D^2}{y_D} = \frac{1}{y_D}$ ergibt. Hierbei wurde $x_D^2 + y_D^2 = 1$ benutzt.

Für die Tangente t ergibt sich damit die Gleichung: t: $y = -\frac{x_D}{y_D} \cdot x + \frac{1}{y_D}$. (*)

Um die Koordinaten des Punktes E zu ermitteln, wird die Gerade h durch die Punkte D und B betrachtet. Sie hat die Steigung $\frac{y_D+1}{x_D}$ und den y-Achsenabschnitt -1.

Daher ergibt sich ihre Gleichung zu: h: $y = \frac{y_D+1}{x_D} \cdot x - 1$.

Die x-Koordinate x_E von E erfüllt demnach die Gleichung $0 = \frac{y_D+1}{x_D} \cdot x_E - 1$. Formt man dies nach x_E um, so folgt $x_E = \frac{x_D}{y_D+1}$.

Die y-Koordinate y_F von F erhält man schließlich, indem man x_F=x_E in die Gleichung (*) von t einsetzt: $y_F = -\frac{x_D}{y_D} \cdot x_E + \frac{1}{y_D} = -\frac{x_D}{y_D} \cdot \frac{x_D}{y_D+1} + \frac{1}{y_D} = \frac{-x_D^2}{y_D(y_D+1)} + \frac{y_D+1}{y_D(y_D+1)} = \frac{-x_D^2+y_D+1}{y_D(y_D+1)}$.

Hier kann man nun wieder ausnutzen, dass $x_D^2 + y_D^2 = 1$, also $y_D^2 = 1 - x_D^2$ gilt, womit weiter folgt: $y_F = \frac{-x_D^2+y_D+1}{y_D(y_D+1)} = \frac{y_D+y_D^2}{y_D^2+y_D}$ =1.

Die Koordinaten von F sind also $F(\frac{x_D}{y_D+1}|1)$, der Punkt F liegt demnach auf der Geraden AG.

Um zu zeigen, dass F jeden Punkt mit den Koordinaten (z|1) auf der Strecke [AG] außer G selbst annehmen kann, muss nur noch gezeigt werden, dass es für jede Zahl z mit 0<z<1 eine Zahl x_D mit 0<x_D<1 gibt, für die $\frac{x_D}{y_D+1} = \frac{x_D}{\sqrt{1-x_D^2}+1} = z$ gilt (z=0 wird durch D=A erreicht).

Setzt man $x_D = \frac{2 \cdot z}{1+z^2}$, so ist sicher x_D>0 und wegen $(z-1)^2 > 0$ folgt $z^2 + 1 > 2 \cdot z$, also $x_D = \frac{2 \cdot z}{1+z^2} < 1$. Für dieses x_D gilt tatsächlich:

$$\frac{x_D}{\sqrt{1-x_D^2}+1} = \frac{\frac{2 \cdot z}{1+z^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2 \cdot z}{1+z^2}\right)^2}+1} = \frac{\frac{2 \cdot z}{1+z^2}}{\sqrt{\frac{(1+z^2)^2-4z^2}{(1+z^2)^2}}+1} = \frac{\frac{2 \cdot z}{1+z^2}}{\sqrt{\frac{(1-z^2)^2}{(1+z^2)^2}}+1} = \frac{\frac{2 \cdot z}{1+z^2}}{\frac{1-z^2}{1+z^2}+1} = \frac{\frac{2 \cdot z}{1+z^2}}{\frac{2}{1+z^2}} = z.$$

Damit ist alles gezeigt.

Bemerkung:

Die Formel für x_D ergibt sich durch Umformen von $\frac{x_D}{\sqrt{1-x_D^2}+1} = z$ zu $x_D = z \cdot \sqrt{1-x_D^2} + z$ bzw. $x_D - z = z \cdot \sqrt{1-x_D^2}$. Nach Quadrieren folgt weiter $x_D^2 - 2 \cdot x_D \cdot z + z^2 = z^2 - z^2 \cdot x_D^2$ und nach Subtraktion von z² und Division durch $x_D \neq 0$ schließlich $x_D - 2 \cdot z = -z^2 \cdot x_D$. Dies lässt sich nach x_D umformen: $x_D = \frac{2 \cdot z}{1+z^2}$.

Aufgabe 3

Bestimme die größte natürliche Zahl n, für die gilt: Das Produkt aller Teiler von n ist n^2 und die Summe aller Teiler von n ist n + 2017.

Vorbemerkung: Ein Teiler einer Zahl k heißt echter Teiler, wenn er von 1 und k verschieden ist.

Lösung: Die größte solche Zahl ist $n = 997 \cdot 1019 = 1\,015\,943$.

Beweisvorschlag:

Wir betrachten eine beliebige Zahl n, für die gilt: Das Produkt aller Teiler von n ist n^2 und die Summe aller Teiler von n ist n + 2017.
Dann muss n größer als 1 sein, denn die Summe aller Teiler von 1 ist gleich 1, und das ist nicht gleich 1+2017. Daher hat n mindestens die beiden verschiedenen Teiler 1 und n.

Weiter ist klar, dass n mindestens einen echten Teiler haben muss, da ansonsten die Summe aller Teiler von n gleich n+1 wäre, was nicht gleich n+2017 ist.
Der kleinste echte Teiler von n sei p. Die Zahl p ist eine Primzahl, denn anderenfalls hätte p einen echten Teiler, der dann auch ein echter Teiler von n und kleiner als p wäre. Das kann nicht sein, weil p ja der kleinste echte Teiler von n ist.

Mit p ist auch die Zahl $q = \frac{n}{p}$ ein echter Teiler von n. Wäre p = q, so wäre n = p^2, also wären 1, p und n die einzigen Teiler von n, und ihr Produkt wäre $1 \cdot p \cdot n < q \cdot p \cdot n = n^2$, also nicht n^2. Folglich muss $q \neq p$ sein.
Die Zahl n hat also mindestens die verschiedenen Teiler 1, p, q und n, und das Produkt schon dieser Teiler ist $1 \cdot p \cdot q \cdot n = n^2$. Also kann n keinen weiteren Teiler besitzen, sonst wäre ja das Produkt aller Teiler größer als n^2.

Damit ist gezeigt: Wenn das Produkt aller Teiler von n gleich n^2 und die Summe aller Teiler von n gleich n+2017 ist, dann hat n genau zwei echte Teiler p und q mit p < q und p ist eine Primzahl.

Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

<u>Fall 1:</u> q ist keine Primzahl

Da alle Teiler von q auch Teiler von n sind, können nur die Zahlen 1, p und q Teiler von q sein, d.h. der einzige echte Teiler von q ist p.
Dann kann q in seiner Primfaktorzerlegung keine Primzahlen außer p enthalten, es ist also $q = p^k$ mit einer natürlichen Zahl k>1. Wäre k dabei größer als 2, dann wäre p^2 ein weiterer echter Teiler von q, was nicht sein kann.
Also ist $q = p^2$.
Dann ist im Fall 1 also n = p · q = p^3, die Teiler von n sind 1, p, p^2 und p^3. Da die Summe aller Teiler n + 2017 ist, folgt $1 + p + p^2 + p^3 = n + 2017 = p^3 + 2017$. Dies vereinfacht sich zu $p + p^2 = 2016$.

Diese Gleichung hat aber keine ganzzahlige positive Lösung, denn je größer p ist desto größer ist auch $p + p^2$ und wegen $44 + 44^2 = 1980$ und $45 + 45^2 = 2070$ muss folglich $44 < p < 45$ gelten, was nicht sein kann. Also ist der 1. Fall nicht möglich.
(Alternativ kann man argumentieren, dass für $p + p^2 = p(1+p) = 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ die Primzahl p genau eine der Zahlen 2, 3 oder 7 sein müsste, was aber offenbar nicht geht.)

Fall 2: q ist eine Primzahl

Die Summe aller Teiler von n ist in diesem Fall 1 + p + q + n = n + 2017, also gilt

$$p + q = 2016. \quad (*)$$

Dabei soll $n = p \cdot q$ maximal werden.
Weil p<q ist, ist p<1008. Die Zahl x = 1008 – p ist demnach eine positive ganze Zahl und es folgen mit (*) $p = 1008 - x$ und $q = 1008 + x$. Daher gilt:
$n = p \cdot q = (1008 + x) \cdot (1008 - x) = 1008^2 - x^2$.
An dieser Darstellung von n sieht man, dass n maximal ist, wenn x möglichst klein und so gewählt wird, dass 1008 – x und 1008 + x Primzahlen sind.
Damit letzteres gewährleistet ist, darf x nicht gerade und nicht durch 3 teilbar sein, weil sonst $1008 + x = 2 \cdot 3 \cdot 168 + x$ gerade bzw. durch 3 teilbar wäre.

Im Bereich $1 \le x \le 10$ bleiben dann nur die folgenden Möglichkeiten:

x	Sind 1008 - x und 1008 + x prim?
1	$1008 - 1 = 1007 = 19 \cdot 53$ ist nicht prim
5	$1008 - 5 = 1003 = 17 \cdot 59$ ist nicht prim
7	$1008 - 7 = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ ist nicht prim

Daher muss $x \ge 11$ sein.
Für das kleinste nun noch mögliche x = 11 ergeben sich 1008 – x = 997 und 1008 + x = 1019. Beide Zahlen sind aufgrund der bekannten Teilbarkeitsregeln nicht durch 2, 3 oder 5 teilbar.
Weil $997 = 1001 - 4 = 7 \cdot 11 \cdot 13 - 4$ ist, ist 997 nicht durch 7, 11 oder 13 teilbar, weil dann auch 4 durch 7, 11 bzw. 13 teilbar sein müsste.
An den Darstellungen

$$997 = 2 \cdot 17 \cdot 29 + 11 = 52 \cdot 19 + 9 = 43 \cdot 23 + 8 = 32 \cdot 31 + 5$$

sieht man genauso, dass 997 auch nicht durch 17, 19, 23, 29 und 31 teilbar ist.
Wäre nun die Zahl 997 keine Primzahl, dann hätte sie einen kleinsten echten Teiler p, der selbst eine Primzahl sein muss. Wie oben gesehen, wäre dann $p \ge 37$. Auch $\frac{997}{p}$ wäre dann ein echter Teiler von 997, weswegen $\frac{997}{p} \ge p$ bzw. $997 \ge p^2 \ge 37^2 = 1369$ folgen würde. Das ist ein Widerspruch. Also ist 997 eine Primzahl.
Genauso sieht man mithilfe der Darstellungen
$1019 = 7 \cdot 11 \cdot 13 + 18 = 2 \cdot 17 \cdot 29 + 33 = 53 \cdot 19 + 12 = 44 \cdot 23 + 7 = 32 \cdot 31 + 27$,
dass 1019 keinen Primteiler kleiner als 37 haben kann und wegen $37^2 = 1369 > 1019$ dann selbst eine Primzahl sein muss.
Somit ist das kleinstmögliche x = 11 und das größtmögliche $n = 997 \cdot 1019 = 1\,015\,943$.

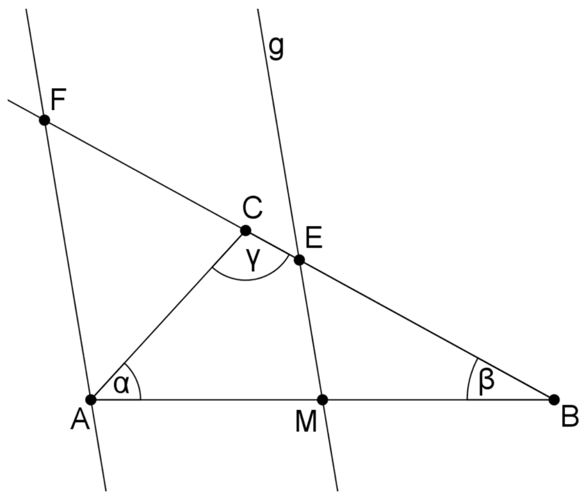
Aufgabe 4

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Der Mittelpunkt der Seite [AB] ist M. Eine Gerade durch M zerlegt das Dreieck in zwei Figuren mit gleichem Umfang.
Bestimme den Schnittwinkel, den diese Gerade mit der Seite [AB] einschließt, in Abhängigkeit von den Innenwinkeln des Dreiecks ABC.

Lösung: Die Innenwinkel des Dreiecks bei A, B und C sind wie üblich mit α, β und γ bezeichnet. Dann schließt die Gerade mit [AB] die beiden Winkel $\alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ und $\beta + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ ein. Der gesuchte Schnittwinkel ist daher der kleinere dieser beiden Winkel bzw., falls $\alpha = \beta$ ist, gleich 90°.

1. Beweisvorschlag:

Für den Verlauf der Gerade, die mit g bezeichnet wird, kann man die folgenden drei Fälle unterscheiden:



<u>Fall 1:</u> g schneidet die Strecke [BC] in einem inneren Punkt E.

Die Gerade g zerlegt das Dreieck ABC in das Viereck AMEC und das Dreieck MBE, die nach der Voraussetzung der Aufgabe gleichen Umfang haben.
Es gilt also: $\overline{AM} + \overline{ME} + \overline{CE} + \overline{CA} = \overline{MB} + \overline{BE} + \overline{EM}$. Hieraus folgt wegen $\overline{AM} = \overline{MB}$, dass $\overline{CE} + \overline{CA} = \overline{BE}$ bzw. $\overline{BE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{BE} + \overline{CE} + \overline{CA}\right) = \frac{1}{2} \cdot (\overline{BC} + \overline{CA})$ gilt. (*)
Die Parallele zu g durch A schneidet den Strahl [BC in einem Punkt F. Nach Strahlensatz gilt dabei $\frac{\overline{BF}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BM}} = 2$. Also folgt mit (*), dass $\overline{BF} = 2 \cdot \overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CA}$ ist. Daraus folgt, dass F und B auf verschiedenen Seiten von C auf dem Strahl [BC liegen und dass $\overline{FC} = \overline{BF} - \overline{BC} = \overline{CA}$ ist. Das Dreieck FAC ist also gleichschenklig mit Basis [FA].
Demnach gilt für einen seiner Basiswinkel aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck FAC und aufgrund des Nebenwinkelsatzes: $\angle CAF = \frac{1}{2} \cdot (180° - \angle FCA) = \frac{1}{2} \cdot \angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \gamma$.
Aufgrund des Stufenwinkelsatzes folgt schließlich

$$\angle BME = \angle BAF = \angle BAC + \angle CAF = \alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma.$$

Die Gerade g schließt mit der Dreiecksseite [AB] also den Winkel $\angle BME = \alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ und dessen Nebenwinkel $\angle EMA = 180° - \left(\alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma\right) = \alpha + \beta + \gamma - \left(\alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma\right) = \beta + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ ein.
Der Schnittwinkel der Gerade g mit der Seite [AB] ist der kleinere dieser beiden Winkel (bei Gleichheit wäre der Schnittwinkel 90°).

Weil im vorliegenden Fall $\overline{BC} > \overline{BE} = \overline{AC} + \overline{CE} > \overline{AC}$ gilt und im Dreieck der längeren Seite der größere Innenwinkel gegenüberliegt, ist $\alpha > \beta$. Also ist $\beta + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ der gesuchte Schnittwinkel.

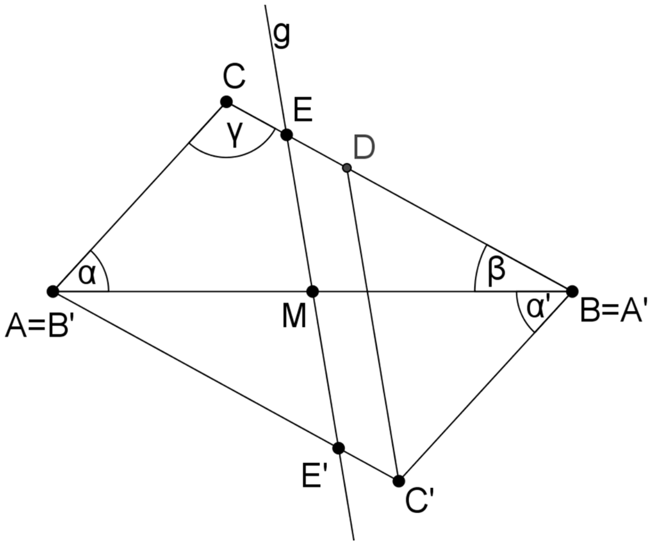
<u>Fall 2:</u> g schneidet die Strecke [AC] in einem inneren Punkt E.

Durch Vertauschung der Bezeichnungen von A und B bzw. von α und β ergibt sich der Fall 1. Der Schnittwinkel ist hier also $\alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma$.

<u>Fall 3:</u> g verläuft durch den Punkt C.

Die Gerade g zerlegt das Dreieck ABC in die beiden Dreiecke AMC und MBC, die nach der Voraussetzung der Aufgabe gleichen Umfang haben.
Es gilt also: $\overline{AM} + \overline{MC} + \overline{CA} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CM}$. Hieraus folgt wegen $\overline{AM} = \overline{MB}$, dass $\overline{CA} = \overline{BC}$ gilt. Das Dreieck ABC ist demnach gleichschenklig mit Basis [AB]. Die Seitenhalbierende [CM] ist daher gleichzeitig die Höhe durch C im Dreieck ABC uns steht senkrecht auf [AB]. Der gesuchte Schnittwinkel ist hier also 90°.

2. Beweisvorschlag:



Wie im 1. Beweisvorschlag kann man drei Fälle unterscheiden.

<u>Fall 1.</u> Die Gerade g durch M schneidet die Seite [BC] in einem inneren Punkt E.

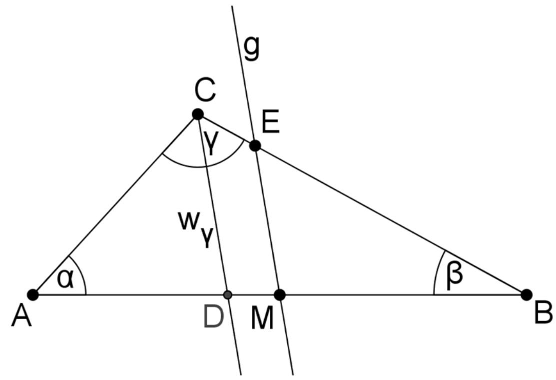
Wie im 1. Beweisvorschlag folgen dann
$\overline{BE} = \overline{AC} + \overline{CE}$ $(*)$ und $\overline{BC} > \overline{AC}$.
Auf [BC] existiert also genau ein Punkt D so, dass $\overline{BD} = \overline{AC}$ ist.
Weil $\overline{BE} = \overline{AC} + \overline{CE} > \overline{AC} = \overline{BD}$ ist, liegen dann B, D, E und C in dieser Reihenfolge auf [BC].
Außerdem ist wegen (*) dann
$\overline{CE} = \overline{BE} - \overline{AC} = \overline{BE} - \overline{BD} = \overline{ED}$ (**).

Nun betrachtet man die Punktspiegelung an M. Dabei wird A auf B, B auf A, C auf einen Punkt C‘ und E auf einen Punkt E‘ abgebildet. Die Gerade g wird auf sich selbst abgebildet. Weil die Strecke [BC] und ihre Bildstrecke [B’C‘] parallel sind, sind auch die Strecken [ED] und [E’C‘] parallel. Außerdem sind sie wegen (**) und $\overline{E'C'} = \overline{EC}$ gleich lang. Daher ist das Viereck E’C’DE ein Parallelogramm und EM ist parallel zu DC‘ (***).
Weil $\overline{BD} = \overline{AC} = \overline{A'C'} = \overline{BC'}$ ist, ist das Dreieck DBC‘ gleichschenklig mit Basis [DC‘].
Deswegen kann man mithilfe der Innenwinkelsumme in den den Dreiecken DC’B und ABC schließen:

$\angle C'DB = \frac{1}{2} \cdot (180° - \angle DBC') = \frac{1}{2} \cdot (180° - \beta - \alpha') = \frac{1}{2} \cdot (180° - \beta - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot \gamma$.
Wegen (***) folgt dann mit Stufenwinkelsatz: $\angle MEB = \angle C'DB = \frac{1}{2} \cdot \gamma$. Damit ergibt sich schließlich mit der Innenwinkelsumme im Dreieck MEB:
$\angle BME = 180° - \beta - \frac{1}{2} \cdot \gamma = (\alpha + \beta + \gamma) - \beta - \frac{1}{2} \cdot \gamma = \alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma$.
Wie im 1. Beweisvorschlag ergibt sich also, dass die Gerade g mit der Dreiecksseite [AB] den Winkel $\angle BME = \alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ und dessen Nebenwinkel $\angle EMA = 180° - \left(\alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma\right) = \alpha + \beta + \gamma - \left(\alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma\right) = \beta + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ einschließt und dass der kleinere der beiden Winkel $\beta + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ der gesuchte Schnittwinkel ist.

Die Fälle 2 und 3 werden in Analogie zum 1. Beweisvorschlag behandelt.

3. Beweisvorschlag (skizziert):



Wie in den vorigen Beweisen werden drei Fälle bezüglich des Schnittpunktes von g mit [AC] bzw. [BC] unterschieden.
Nur der 1. Fall, bei dem E innerer Punkt von [BC] ist, wird betrachtet und wie oben folgt dann auch $\overline{BE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AC} + \overline{BC}\right)$. (*)
Die Winkelhalbierende w_γ des Innenwinkels $\angle ACB$ schneidet die Seite [AB] in einem Punkt D.
Nach dem Satz über die Winkelhalbierende teilt D die Strecke [AB] im Verhältnis der Streckenlängen von [AC] und [BC].
Es gilt also $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ bzw. nach Addition von 1 auf beiden Seiten $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} + \frac{\overline{BD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}}$, also $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{\overline{BC}}$. Umgeformt nach $\overline{BD}$ erhält man hieraus: $\overline{BD} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC}+\overline{BC}}$.
Berechnet man damit die Streckenverhältnisse

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{BD}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB}} = \frac{\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC} + \overline{BC}}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB}} = \frac{2 \cdot \overline{BC}}{\overline{AC} + \overline{BC}}$$

und mit (*)

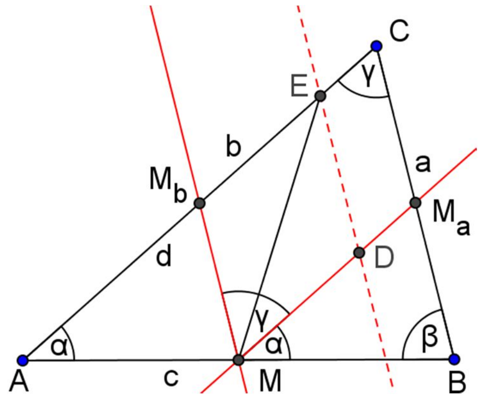
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BC}}{\frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AC} + \overline{BC}\right)} = \frac{2 \cdot \overline{BC}}{\overline{AC} + \overline{BC}} \quad ,$$

so sieht man, dass $\frac{\overline{BD}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ gilt. Nach der Umkehrung des Strahlensatzes folgt daraus, dass w_γ parallel zu g verläuft. Das wiederum lässt mit dem Stufenwinkelsatz auf $\angle MEB = \angle DCB = \frac{1}{2} \cdot \gamma$ schließen.
Damit ergibt sich dann aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck MBE:
$\angle BME = 180° - \beta - \frac{1}{2} \cdot \gamma = \alpha + \beta + \gamma - \beta - \frac{1}{2} \cdot \gamma = \alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma$.
Der Nebenwinkel $\beta + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ dieses Winkels ist wieder, wie in den vorigen Beweisen, der gesuchte Schnittwinkel.

4. Beweisvorschlag (skizziert):

Wie in den vorigen Beweisen werden drei Fälle bezüglich des Schnittpunktes von g mit [AC] bzw. [BC] unterschieden. Die Bezeichnungen einzelner Streckenlängen sind in der Zeichnung markiert.

Nur der Fall, bei dem E innerer Punkt von [AC] ist, wird betrachtet und wie oben folgt dann auch $\overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AC} + \overline{BC}\right)$. (1)



Es gilt $\overline{AC} > \overline{AE} = \overline{BC} + \overline{CE} > \overline{BC}$ und weil im Dreieck der längeren Seite der größere Innenwinkel gegenüberliegt, ist $\alpha < \beta$. (2)

Die Parallele zu BC durch M schneidet AC in M_b.
Die Parallele zu AC durch M schneidet BC in M_a.

Nun folgt:

- $\angle BMM_a = \alpha$ und $\angle M_BMA = \beta$ (Stufenwinkel) (3)
- Viereck MM_aCM_b ist ein Parallelogramm. Folglich: $\angle M_aMM_b = \gamma$ (4)
- Da M Mittelpunkt von [AB] ist: [MM_a] und [MM_b] sind Mittenparallelen im Dreieck ABC
  Folglich: M_a und M_b sind die Mittelpunkte von [BC] bzw. [AC]. (5)

Die Parallele zu BC durch E schneidet MM_a in D.
Dann gilt:

- $\overline{DE} = \overline{MM_b} = \overline{M_aC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$ (wegen (5))
- $\overline{MD} = \overline{M_bE} = \overline{AE} - \overline{AM_b} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AC} + \overline{BC}\right) - \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$ (wegen (1) und (5))

Folglich ist das Viereck $MDEM_b$ eine Raute. Demnach halbiert die Diagonale [ME] den Innenwinkel dieses Vierecks bei M, d. h. $\angle M_aM\,E = \frac{\gamma}{2}$ (6).

(3) und (6) zusammengefasst, ergibt: $\angle BM\,E = \alpha + \frac{\gamma}{2}$.

Dabei gilt wegen (2): $\alpha + \frac{\gamma}{2} < \beta + \frac{\gamma}{2}$, d. h. $\alpha + \frac{\gamma}{2} < 90^0$

Dies ist also der gesuchte Schnittwinkel.

Die anderen Fälle werden analog behandelt.