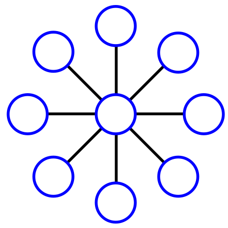
20. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Lösungsbeispiele

für die Aufgaben der 1. Runde 2017/2018

Aufgabe 1



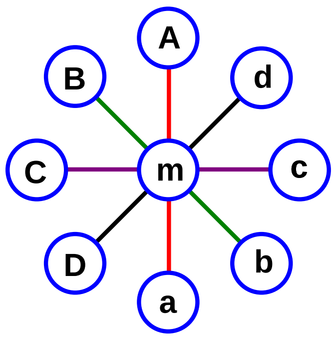
Kathi verteilt die Zahlen 1, 2, 3, … 9 auf die neun Kreise der Figur. Dabei hat die Summe von drei Zahlen auf einer geraden Linie stets den gleichen Wert.

Ermittle alle Zahlen, die in der Mitte stehen können.

Lösung:

In der Mitte können nur die Zahlen 1, 5 oder 9 stehen.

1. Beweisvorschlag:



Die Zahl, die in der Mitte steht, bezeichnen wir mit m. Die Zahlen, die in den acht Kreisen außen stehen, bezeichnen wir wie in der Abbildung mit A, B, C, D, a, b, c, d.

Laut Aufgabenstellung gilt

$$A + m + a = B + m + b.$$

Subtrahiert man auf beiden Seiten m, so folgt

$$A + a = B + b.$$

Ebenso gilt $B + b = C + c$ und $C + c = D + d$.

Die vier Zahlen $A + a$, $B + b$, $C + c$, $D + d$ sind also gleich.

Die Summe aller Zahlen, die Kathi verwendet, beträgt $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$. Es ist also $(A + a) + (B + b) + (C + c) + (D + d) + m = 45$.

Da hier alle vier Klammern gleich $A + a$ sind, folgt $4 \cdot (A + a) + m = 45$, oder $4 \cdot (A + a) = 45 - m$.

Die Zahl $4 \cdot (A + a)$ ist durch 4 teilbar, also muss auch $45 - m$ durch 4 teilbar sein. Für m kommen also nur die Zahlen 1, 5 oder 9 infrage, denn $45 - 1 = 44$, $45 - 5 = 40$, $45 - 9 = 36$ sind durch 4 teilbar, während $45 - 2 = 43$, $45 - 3 = 42$, $45 - 4 = 41$, $45 - 6 = 39$, $45 - 7 = 38$ und $45 - 8 = 37$ nicht durch 4 teilbar sind.

Nun muss noch gezeigt werden, dass die Zahlen 1, 5, und 9 auch wirklich in der Mitte stehen können. Dazu muss man jeweils eine Verteilung finden, die die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt. Dies gelingt durch folgende Überlegung:

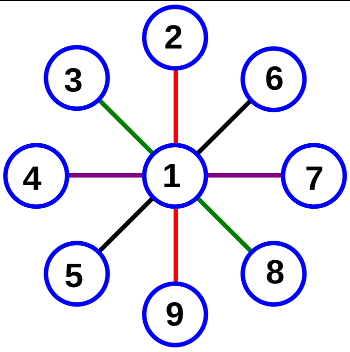
Für $m = 1$ ist $45 - 1 = 44$, also muss $A + a = \frac{44}{4} = 11$ ergeben. Die Summe gegenüberliegender Zahlen ist 11.

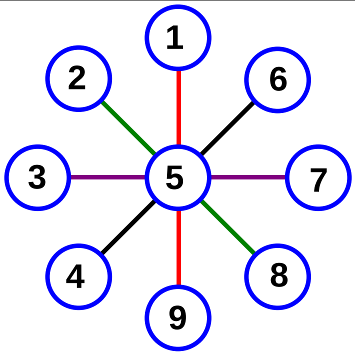
Für $m = 5$ ist $45 - 5 = 40$, also muss $A + a = \frac{40}{4} = 10$ ergeben. Die Summe gegenüberliegender Zahlen ist 10.

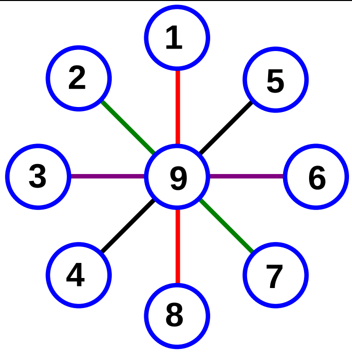
Für $m = 9$ ist $45 - 9 = 36$, also muss $A + a = \frac{36}{4} = 9$ ergeben. Die Summe gegenüberliegender Zahlen ist 9.

Damit ergeben sich die folgenden Verteilungen:

$m = 1$	$m = 5$	$m = 9$







2. Beweisvorschlag:

Wir bezeichnen die Zahl in der Mitte mit m. Die übrigen Zahlen werden der Größe nach von klein nach groß mit a_1, a_2, … , a_8 bezeichnet.

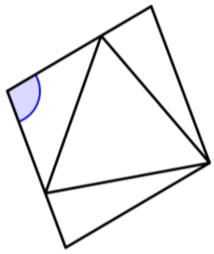
Stehen nun die Zahlen a_1, m und a_i sowie a_j, m und a_8 jeweils auf einer geraden Linie (mit $2 \leq i \leq 8$ und $1 \leq j \leq 7$), so gilt: $a_1+m+a_i \leq a_1+m+a_8 \leq a_j+m+a_8$. Weil nach Aufgabenstellung die erste und die letzte Summe in dieser Ungleichungskette gleich groß ist, muss überall Gleichheit herrschen. Daher ist $a_i=a_8$ bzw. $a_1=a_j$ und somit stehen die Zahlen a_1, m und a_8 auf einer geraden Linie.

Wäre jetzt m keine der Zahlen 1, 5 bzw. 9, dann wäre $a_1=1$, $a_8=9$ und für ein j ($2\leq j\leq 7$) $a_j=5$. Für die Zahl a_k, die der 5 gegenüber steht, wäre dann aber $10+m = a_1+m+a_8 = a_j+m+a_k = 5+m+a_k$, also $a_k=5$. Das kann nicht sein, weil somit die 5 zweimal vorkäme. Also muss m eine der Zahlen 1, 5 bzw. 9 sein.

Dass diese auch tatsächlich in der Mitte stehen können, zeigen die Beispiele aus dem 1. Beweisvorschlag.

Aufgabe 2

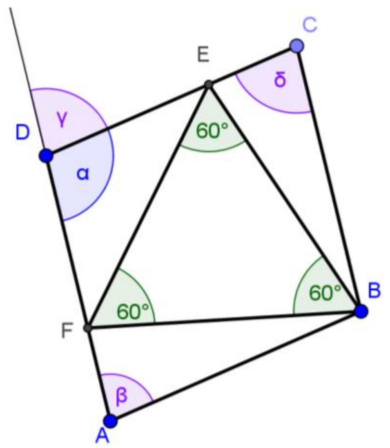
Sieben gleich lange Strohhalme werden wie in der Abbildung gelegt. Bestimme die Größe des markierten Winkels.



Lösung:

Die Größe des markierten Winkels ist 100°.

1. Beweisvorschlag:



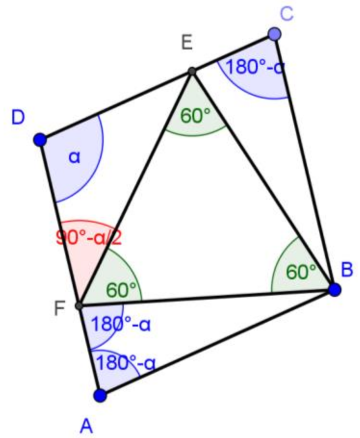
Die Eckpunkte und Winkel der Figur seien wie in der Abbildung bezeichnet. Da alle sieben Strecken gleich lang sind, ergeben sich die folgenden Eigenschaften:
(1) Das Viereck $ABCD$ ist eine Raute, also insbesondere ein Parallelogramm. Der Winkel β ist Stufenwinkel zu γ. der Winkel δ ist Wechselwinkel zu γ. Der Winkel γ ist Nebenwinkel von α. Also gilt:

$$\beta = \gamma = \delta = 180° - \alpha.$$

(2) Das Dreieck BEF ist gleichseitig, alle Innenwinkel haben also die Größe 60°.
(3) Das Dreieck ABF ist gleichschenklig mit Basiswinkeln $\measuredangle BAF$ und $\measuredangle AFB$. Es gilt also nach (1):

$$\measuredangle BAF = \measuredangle AFB = 180° - \alpha.$$

(4) Auch das Dreieck EBC ist gleichschenklig mit demselben Basiswinkel wie Dreieck ABF .
Die beiden Dreiecke ABF und EBC stimmen also in allen Innenwinkeln und zusätzlich in der Schenkellänge $\overline{AB} = \overline{BC}$ bzw. $\overline{BE} = \overline{BF}$ überein, sie sind demnach kongruent. Somit gilt auch $\overline{CE} = \overline{AF}$ und damit auch $\overline{DE} = \overline{DF}$, da die Seiten des Vierecks alle gleich lang sind. Das Dreieck FED ist also ebenfalls gleichschenklig.
Die beiden Basiswinkel $\measuredangle EFD$ und $\measuredangle DEF$ haben somit beide die Größe $\frac{180°-\alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$.



Beim Punkt F treffen nun drei Winkel zusammen, nämlich die Winkel $\measuredangle AFB$, $\measuredangle BFE$ und $\measuredangle EFD$. Alle drei Winkel zusammen bilden einen gestreckten Winkel, da F auf der Strecke *[AD]* liegt. Nach (2), (3) und (4) ist:

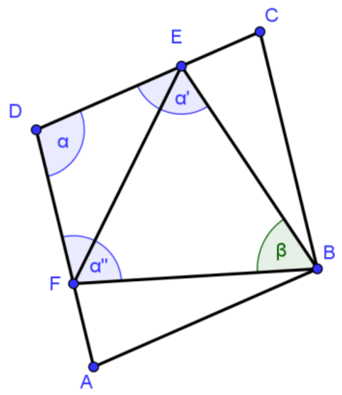
$$180° = \measuredangle AFB + \measuredangle BFE + \measuredangle EFD = (180° - \alpha) + 60° + \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 330° - \frac{3}{2}\alpha.$$

Löst man $180° = 330° - \frac{3}{2}\alpha$ nach α auf, so ergibt sich $\frac{3}{2}\alpha = 150°$ bzw. $\alpha = 100°$.

Hinweis: Die Aussage in (1) kann auch als aus dem Schulunterricht bekannte Tatsache zitiert werden.

2. Beweisvorschlag:

Die Winkel und Eckpunkte der Figur seien wie in nebenstehender Abbildung bezeichnet. Da das Viereck ABCD eine Raute ist, sind gegenüberliegende Seiten parallel. Insbesondere ist [AB] parallel zu [DC]. Im Viereck ABED sind demnach die gegenüberliegenden Seiten [AB] und [DE] parallel, es handelt sich also um ein Trapez. Weil weiterhin $\overline{AD} = \overline{BE}$ und $\overline{DE} < \overline{AB}$ ist, ist das Trapez ABED gleichschenklig und achsensymmetrisch. Insbesondere folgt damit, dass α'=α ist.
Betrachtet man das Viereck BCDF, so folgt völlig analog, dass α''=α ist.
Weil das Dreieck BEF gleichseitig ist, ist β=60°.



Die Betrachtung der Innenwinkelsumme im Viereck BEDF ergibt dann schließlich

360° = α+α'+α''+β = 3α + 60°, also 3α = 300° und daher α = 100°.

Aufgabe 3

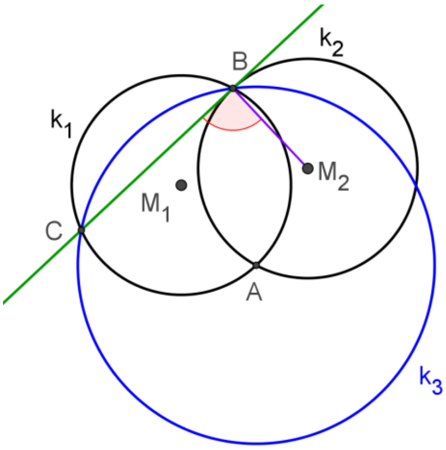
Die Kreise $\boldsymbol{k_1}$ und $\boldsymbol{k_2}$ mit gleich langen Radien schneiden sich in zwei Punkten A und B. Ein dritter Kreis hat den Mittelpunkt A, geht durch B und schneidet den Kreis $\boldsymbol{k_1}$ in einem weiteren Punkt C.
Zeige, dass die Gerade BC eine Tangente an $\boldsymbol{k_2}$ ist.

Beweisvorschlag:

Die Abbildung zeigt die zur Aufgabenstellung gehörende Figur.

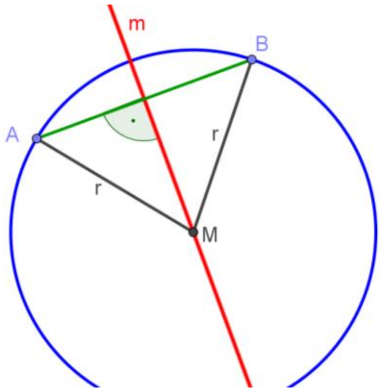
Die Punkte M_1 und M_2 bezeichnen die Mittelpunkte der Kreise k_1 bzw. k_2.

Die Tangente an k_2 im Punkt B ist die eindeutig bestimmte Gerade durch B, die orthogonal zum Radius $[M_2B]$ ist.
Es genügt also zu beweisen, dass BC und $[M_2B]$ orthogonal sind.



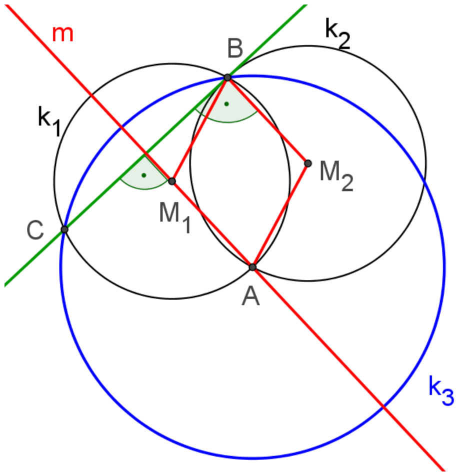
Beim Beweis wird folgende Aussage benutzt:
Die Mittelsenkrechte m einer Sehne *[AB]* eines Kreises mit Radius r verläuft durch den Mittelpunkt M des Kreises.
Die Mittelsenkrechte von *[AB]* besteht nämlich genau aus den Punkten, die von A und B den gleichen Abstand haben. Das ist für M der Fall, da

$$\overline{AM} = \overline{BM} = r \text{ ist.}$$



Diese Aussage wird nun für die Mittelsenkrechte m der Strecke *[BC]* benutzt. Diese Strecke ist nach Aufgabenstellung eine Sehne in den Kreisen k_1 und k_3. Ihre Mittelsenkrechte verläuft also durch den Mittelpunkt M_1 von k_1 und den Mittelpunkt A von k_3.
Es gilt also:

(1) Die Gerade M_1A ist orthogonal zu BC.



Außerdem ist das Viereck M_1AM_2B eine Raute, da alle vier Seiten des Vierecks Radien der Kreise k_1 und k_2 sind.

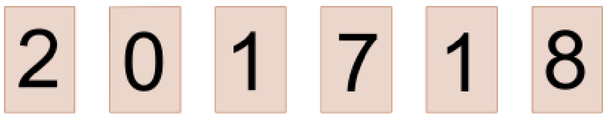
Da eine Raute ein Parallelogramm ist, folgt:

(2) Die Strecken *[M_1A]* und *[M_2B]* sind parallel.

Aus (1) und (2) folgt: Die Gerade BC ist orthogonal zu *[M_2B]* .
Damit ist die Gerade BC Tangente an k_2 im Punkt B.

Aufgabe 4

Auf dem Tisch liegen die sechs abgebildeten Zahlenkarten.
Amelie und Marius vereinbaren das folgende Spiel:



Marius darf die Karten in eine von ihm bestimmte Reihenfolge umsortieren. Danach nimmt Amelie eine der beiden äußeren Karten. Von der verbleibenden Kartenreihe nimmt sich nun Marius eine der beiden äußeren Karten. So geht es abwechselnd weiter, bis keine Karte mehr auf dem Tisch liegt. Danach addieren beide die Zahlen auf ihren Karten. Wer die größere Summe hat, gewinnt.

Kann Amelie oder kann Marius den Sieg erzwingen?

Lösung:

Amelie kann den Sieg erzwingen, egal wie Marius die Zahlenkarten anordnet.

1. Beweisvorschlag (Angabe einer Strategie für Amelie):

Die sechs von Marius ausgelegten Karten werden abwechselnd rot und blau gefärbt:
rot – blau – rot – blau – rot – blau.

Die Summe der Zahlen auf allen Karten ist 2+0+1+7+1+8 = 19. Also ist für genau eine der beiden Farben die Summe der Zahlen auf den Karten mindestens 10. Diese Farbe nennen wir Gewinnfarbe, die andere Verlustfarbe.

Es wird nun gezeigt, dass Amelie - egal wie Marius spielt - alle drei Karten der Gewinnfarbe ziehen kann und folglich gewinnt.
Vor Amelies erstem Zug liegen außen eine rote und eine blaue Karte. Amelie kann also die Karte der Gewinnfarbe nehmen, worauf nun für Marius die beide äußeren Karten von der Verlustfarbe sind. Egal welche dieser beiden Karten Marius nimmt, Amelie findet neben der von Marius gezogenen Karte wieder eine Karte der Gewinnfarbe vor. Sie nimmt diese und hinterlässt Marius wiederum nur die Möglichkeit eine Karte der Verlustfarbe zu wählen. Nun liegen nur noch zwei Karten, die von verschiedener Farbe sind, auf dem Tisch. Von diesen nimmt Amelie diejenige in der Gewinnfarbe. Damit hat sie alle drei Karten der Gewinnfarbe gezogen und somit gewonnen.

2. Beweisvorschlag (Vollständige Darstellung des Spielverlaufs):

Nach dem Umsortieren durch Marius haben die Zahlen auf den Karten die Reihenfolge $z_1\ z_2\ z_3\ z_4\ z_5\ z_6$.

Für ihre Strategie vergleicht Amelie zu Beginn die beiden Summen $s_1 = z_1 + z_3 + z_5$ und $s_2 = z_2 + z_4 + z_6$. Es ist

$$s_1 + s_2 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 2 + 0 + 1 + 7 + 1 + 8 = 19.$$

Die Summe $s_1 + s_2$ ist also ungerade, somit können s_1 und s_2 nicht gleich groß sein.

Amelie unterscheidet daher zwei Fälle:

Fall 1: $s_1 > s_2$

Es wird gezeigt, dass Amelie das Spiel so steuern kann, dass sie am Ende die „guten“ Karten mit den Zahlen z_1, z_3 und z_5 mit der größeren Summe s_1 weggenommen hat. Für Marius bleiben nur die „schlechten“ Karten z_2, z_4 und z_6.

Amelie nimmt zuerst die Karte mit der Zahl z_1.
Übrig bleiben dann die fünf Karten $z_2\ z_3\ z_4\ z_5\ z_6$. Marius muss eine der beiden Karten mit den Zahlen z_2 oder z_6. wegnehmen.

Fall 1.1: Marius nimmt die Karte mit der Zahl z_2.
Dann bleiben die vier Karten $z_3\ z_4\ z_5\ z_6$ liegen.
Amelie kann die „gute“ Karte z_3 wegnehmen.

Fall 1.2: Marius nimmt die Karte mit der Zahl z_6.
Dann bleiben die vier Karten $z_2\ z_3\ z_4\ z_5$ liegen.
Amelie kann die „gute“ Karte z_5 wegnehmen.

Im Fall 1.1 bleiben für Marius die Karten mit den Zahlen in der Reihenfolge $z_4\ z_5\ z_6$ übrig. Er kann also wieder nur eine der „schlechten“ Karten mit den Zahlen z_2 oder z_6 wegnehmen. Amelie kann danach die „gute“ Karte mit der Zahl z_5 wegnehmen und hat insgesamt die Karten mit den Zahlen z_1, z_3 und z_5 mit der Summe s_1 weggenommen. Marius dagegen hat die Karten mit den Zahlen z_2, z_4 und z_6 mit der Summe s_2 bekommen.

Im Fall 1.2 bleiben für Marius die Karten mit den Zahlen in der Reihenfolge $z_2\ z_3\ z_4$ übrig. Er kann also wieder nur eine der „schlechten“ Karten mit den Zahlen z_2 oder z_4 wegnehmen. Amelie kann danach die „gute“ Karte mit der Zahl z_3 wegnehmen und hat auch hier insgesamt die Karten mit den Zahlen z_1, z_3 und z_5 mit der Summe s_1 weggenommen. Marius dagegen hat die Karten mit den Zahlen z_2, z_4 und z_6 mit der Summe s_2 bekommen.

Da $s_1 > s_2$ hat in beiden Fällen 1.1 und 1.2 Amelie das Spiel gewonnen.

Fall 2: $s_1 < s_2$
Es wird gezeigt, dass Amelie das Spiel so steuern kann, dass sie am Ende die „guten“ Karten mit den Zahlen z_2, z_4 und z_6 mit der Summe s_2 weggenommen hat.
Für Marius bleiben nur die „schlechten“ Karten z_1, z_3 und z_5.

Amelie nimmt zuerst die „gute“ Karte mit der Zahl z_6.
Übrig bleiben dann fünf Karten mit den Zahlen in der Reihenfolge $z_1\ z_2\ z_3\ z_4\ z_5$.
Marius muss dann eine der beiden „schlechten“ Karten mit den Zahlen z_1 oder z_5 wegnehmen.

Fall 2.1: Marius nimmt die Karte mit der Zahl z_1.
Dann bleiben die vier Karten mit den Zahlen in der Reihenfolge $z_2\ z_3\ z_4\ z_5$ liegen.
Amelie kann dann wieder eine „gute“ Karte mit der Zahl z_2 wegnehmen.

Fall 2.2: Marius nimmt die Karte mit der Zahl z_5.
Dann bleiben die vier Karten mit den Zahlen in der Reihenfolge $z_1\ z_2\ z_3\ z_4$ liegen.
Amelie kann dann wieder eine „gute“ Karte mit der Zahl z_4 wegnehmen.

Im Fall 2.1 bleiben für Marius die Karten mit den Zahlen in der Reihenfolge $z_3\ z_4\ z_5$ übrig. Er kann also wieder nur eine der „schlechten“ Karten mit den Zahlen z_3 oder z_5 wegnehmen. Amelie kann danach die „gute“ Karte mit der Zahl z_4 wegnehmen und hat insgesamt die Karten mit den Zahlen z_2, z_4 und z_6 mit der Summe s_2 weggenommen. Marius dagegen hat die Karten mit den Zahlen z_1, z_3 und z_5 mit der Summe s_1 bekommen.

Im Fall 2.2 bleiben für Marius die Karten mit den Zahlen in der Reihenfolge $z_1\ z_2\ z_3$ übrig. Er kann also wieder nur eine der „schlechten“ Karten mit den Zahlen z_1 oder z_3

wegnehmen. Amelie kann danach die Karte mit der Zahl z_2 wegnehmen und hat auch hier insgesamt die Karten mit den Zahlen z_2, z_4 und z_6 mit der Summe s_2 weggenommen. Marius dagegen hat die Karten mit den Zahlen z_1, z_3 und z_5 mit der Summe s_1 bekommen.

Da $s_1 < s_2$ hat Amelie auch in diesen beiden Fällen 2.1 und 2.2 das Spiel gewonnen. Da alle möglichen Fälle erfasst sind, hat Amelie das Spiel in jedem Fall gewonnen und sie hat den Sieg erzwungen.

Aufgabe 5

Pauline wählt eine natürliche Zahl n und schreibt die Zahlen 1, 2, 3, ... , $2n$ der Größe nach an eine Tafel. Luisa möchte von diesen Zahlen n aufeinanderfolgende so streichen, dass die Summe der an der Tafel verbleibenden Zahlen 135 ist.
Bestimme alle Zahlen n, für die dies möglich ist.

Lösung:

Nur für die Zahlen $n = 10$ und $n = 15$ kann Luisa n aufeinanderfolgende Zahlen so streichen, dass die Restsumme 135 beträgt.

1. Beweisvorschlag:

Zuerst soll untersucht werden, wie groß n höchstens sein kann.
Hätte Pauline $n = 16$ gewählt, so hätte sie die Zahlen $1, 2, 3, \dots, 32$ an die Tafel geschrieben. Die kleinstmöglichen Zahlen, die Luisa nach ihrer Streichung von 16 Zahlen übriglassen könnte, wären die Zahlen $1,2,3, \dots ,16$. Die kleinstmögliche Summe ist also $1 + 2 + 3 + \cdots + 16 = 136$, also bereits größer als 135. Mit $n = 16$ ist es nicht möglich die Restsumme 135 zu erzielen. Erhöht Pauline ihre Zahl n, so wird die kleinstmögliche Summe $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ mit wachsendem n immer größer. Da sie schon für $n = 16$ zu groß war, ist sie auch für alle $n > 16$ zu groß. Um die Restsumme 135 zu erzielen, muss also $n \leq 15$ gelten.

Nun soll untersucht werden, wie groß n mindestens sein muss, damit die Restsumme 135 möglich ist.
Hätte Pauline $n = 9$ gewählt, so hätte sie die Zahlen $1,2,3, \dots ,18$ an die Tafel geschrieben. Die größtmöglichen Zahlen, die Luisa nach ihrer Streichung von 9 Zahlen übriglassen könnte, sind die Zahlen $10, \dots ,18$. Die größtmögliche Summe ist also
$10 + 11 + 12 + \cdots + 18 = 126$, also kleiner als 135. Mit $n = 9$ ist es nicht möglich die Restsumme 135 zu erzielen. Verkleinert Pauline ihre Zahl n, so wird die größtmögliche Restsumme $(n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + \cdots + 2n$ mit kleiner werdendem n immer kleiner, denn sowohl die Anzahl der Summanden als auch die Größe der Summanden wird kleiner. Da sie schon für $n = 9$ zu klein war, ist sie auch für alle $n < 9$ zu klein. Um die Restsumme 135 zu erzielen, muss also $n \geq 10$ gelten.

Es ist also nur $10 \leq n \leq 15$ möglich.
Wir zeigen nun, dass die Zahlen $n = 11, 12, 13, 14$ nicht möglich sind.
Streicht Luisa die n aufeinanderfolgenden Zahlen $k+1$, $k+2, \ldots, k+n$ (für $0 \leq k \leq n$), so haben die gestrichenen Zahlen die Summe
$S_{gestrichen} = (k+1) + (k+2) + \cdots + (k+n) = n \cdot k + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = nk + \frac{n(n+1)}{2}$.
Hier wurde die Gaußsche Summenformel $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ benutzt.
Die Summe $S_{gestrichen}$ ist für ungerade Zahlen durch n teilbar, da dann sowohl $n \cdot k$ als auch $\frac{n(n+1)}{2} = n \cdot \frac{n+1}{2}$ durch n teilbar ist. Für gerade n ist $S_{gestrichen}$ durch $\frac{n}{2}$ teilbar, da sowohl $n \cdot k$ als auch $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$ durch $\frac{n}{2}$ teilbar sind.
Die Summe $S_{gesamt} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) + \cdots + 2n = \frac{2n \cdot (2n+1)}{2} = n \cdot (2n+1)$ aller an die Tafel geschriebenen Zahlen ist in jedem Fall durch n teilbar. Somit ist die Summe der verbleibenden Zahlen $S_{verbleibend} = S_{gesamt} - S_{gestrichen}$ für ungerades n durch n und für gerades n durch $\frac{n}{2}$ teilbar.

Für $n = 11$ ist also $S_{verbleibend}$ durch 11 teilbar. Somit ist $S_{verbleibend} = 135$ nicht möglich, da 135 nicht durch 11 teilbar ist.
Für $n = 12$ ist also $S_{verbleibend}$ durch $\frac{12}{2} = 6$ teilbar. Somit ist $S_{verbleibend} = 135$ nicht möglich, da 135 nicht durch 6 teilbar ist.
Für $n = 13$ ist also $S_{verbleibend}$ durch 13 teilbar. Somit ist $S_{verbleibend} = 135$ nicht möglich, da 135 nicht durch 13 teilbar ist.
Für $n = 14$ ist also $S_{verbleibend}$ durch $\frac{14}{2} = 7$ teilbar. Somit ist $S_{verbleibend} = 135$ nicht möglich, da 135 nicht durch 7 teilbar ist.

Es bleibt also nur $n = 10$ und $n = 15$ übrig.
Für $n = 10$ streicht Luisa die zehn aufeinanderfolgenden Zahlen $3, 4, \ldots 12$:

$$1,2,\cancel{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12},13,14,15,16,17,18,19,20$$

Dann ist die Summe der verbleibenden Zahlen
$1 + 2 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 135$.

Für $n = 15$ streicht Luisa die fünfzehn aufeinanderfolgenden Zahlen $15, 16, \ldots 29$:

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,\cancel{15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29},30$$

Dann ist die Summe der verbleibenden Zahlen $1 + 2 + \cdots + 14 + 30 = 135$.
Somit kann die Restsumme nur für die Zahlen $n = 10$ und $n = 15$ genau 135 ergeben.

Variante (ohne Gaußsche Summenformel, aber Rechnen mit Resten):

Die Gaußsche Summenformel wurde benutzt, um zu zeigen, dass die Summe von n aufeinanderfolgenden Zahlen für ungerades n durch n und für gerades n durch $\frac{n}{2}$ teibar ist. Dies kann man auch ohne Summenformel zeigen:
Von n aufeinanderfolgenden Zahlen ist genau eine durch n teilbar, genau eine lässt bei Division durch n den Rest 1 usw. Jeder der Reste $0, 1, 2, \ldots, n-1$ kommt genau einmal

unter n aufeinander folgenden Zahlen vor.
Ist n ungerade, so kann man die $n-1$ Zahlen, die nicht durch n teilbar sind, zu $\frac{n-1}{2}$ Paaren gruppieren, so dass die Summe der beiden Zahlen jedes Paars durch n teilbar ist. Man gruppiert die Zahl mit Rest 1 mit der Zahl mit Rest $n-1$, die Zahl mit Rest 2 mit der Zahl mit Rest $n-2$ usw. Somit ist die Summe von n aufeinanderfolgenden Zahlen für ungerade n immer durch n teilbar.
Ist n gerade, so kann man ohne Verwendung der beiden Zahlen, die Rest 0 und Rest $\frac{n}{2}$ haben, auf die gleiche Weise $\frac{n-2}{2}$ Paare bilden, deren Summe durch n teilbar ist. Die Summe von n aufeinanderfolgenden Zahlen ist also durch $\frac{n}{2}$ teilbar.

2. Beweisvorschlag:

Wie im 1. Beweisvorschlag sieht man, dass gilt: Streicht Luisa die n aufeinanderfolgenden Zahlen $k+1$, $k+2$,…,$k+n$ (für $0 \leq k \leq n$), so haben die gestrichenen Zahlen die Summe $(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+n) = n \cdot k + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = nk + \frac{n(n+1)}{2}$.
Die Summe der übrigbleibenden Zahlen ist also

$$(1+2+3+\cdots+2n) - \left(nk + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{2n(2n+1)}{2} - nk - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n^2+n-2nk}{2}.$$

Laut Aufgabenstellung soll nun $\frac{3n^2+n-2nk}{2} = 135$ gelten. Das ist gleichbedeutend mit $270 = 3n^2 + n - 2nk = n(3n+1-2k)$. Weil $3n+1-2k \geq 3n+1-2n = n+1 > n$ ist, muss n also ein Teiler von $270 = 2 \cdot 5 \cdot 3^3$ sein, dessen Komplementärteiler $3n+1-2k$ größer als n ist. Demnach kann n nur eine der acht Zahlen in der folgenden Tabelle sein, in der auch der jeweils komplementäre Teiler m=3n+1-2k angegeben ist und hieraus $k = \frac{3n+1-m}{2}$ berechnet wurde:

N	1	2	3	5	6	9	10	15
3n+1-k	270	135	90	54	45	30	27	18
K	-133	-64	-40	-19	-13	-1	2	14

Nur für n = 10 und n = 15 ergeben sich Werte von k im Bereich $0 \leq k \leq n$. Somit sind nur diese beiden Werte von n möglich. Umgekehrt folgt aber wie im 1. Beweisvorschlag, dass es sich hierbei auch um Lösungen handelt, denn 1+2+13+14+…+20=135 und 1+2+3+…+14+30=135.

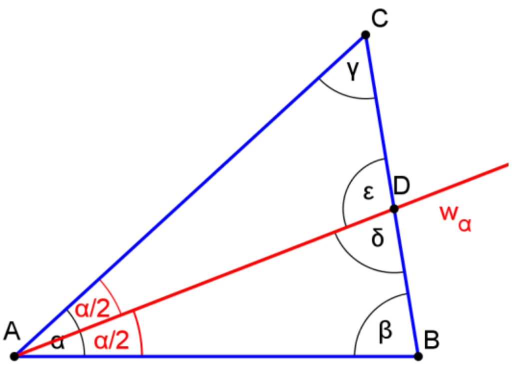
Aufgabe 6

Ein gleichschenkliges Dreieck ABC wird durch die Winkelhalbierende w_α in zwei Teildreiecke zerlegt. Für welche Innenwinkel α, β, γ des Dreiecks ABC ist mindestens eines der Teildreiecke ebenfalls gleichschenklig?

Lösung:

Die gesuchten Innenwinkel $(\alpha;\beta;\gamma)$ sind:
(1) $(90°; 45°; 45°)$,
(2) $(72°; 36°; 72°)$,
(3) $(72°; 72°; 36°)$,
(4) $\left(51\frac{3}{7}°; 77\frac{1}{7}°; 51\frac{3}{7}°\right)$ und
(5) $\left(51\frac{3}{7}°; 51\frac{3}{7}°; 77\frac{1}{7}°\right)$.

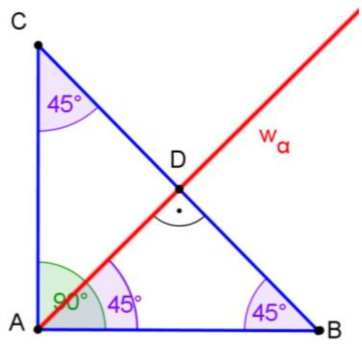
Beweisvorschlag:



Der Punkt D sei der Schnittpunkt von w_α mit der Seite *[BC].* Die Winkel ∡ADB und ∡CDA seien wie in der Abbildung mit δ bzw. ε bezeichnet.

Da das Dreieck ABC gleichschenklig ist, gibt es nur die drei Fälle

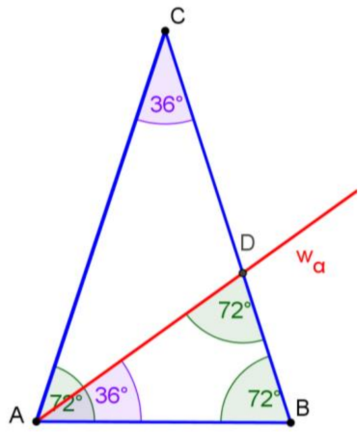
Fall 1: $\overline{AB} = \overline{AC}$
Fall 2: $\overline{CA} = \overline{CB}$
Fall 3: $\overline{BA} = \overline{BC}$.



Im **1. Fall** ist die Winkelhalbierende w_α gleichzeitig Symmetrieachse des Dreiecks ABC und Mittelsenkrechte von [BC]. Demnach gilt $\delta = \ \varepsilon = 90°$. Wenn nun eines der beiden symmetrisch zu w_α liegenden Dreiecke ABD und ADC auch gleichschenklig ist, dann sind es sogar beide. Dies geht nur, wenn der rechte Winkel bei δ bzw. ε jeweils der Winkel ist, den die beiden Schenkel einschließen, so dass im Dreieck ABD die Strecke [AB] die Basis und deswegen $\frac{\alpha}{2} = \beta = (180° - \delta) : 2 = 90° : 2 = 45°$ ist. Demnach sind $\alpha = 90°$ und $\gamma = 45°$. Ein solches Dreieck existiert auch offensichtlich und entspricht der Lösung (1).

Im **2. Fall** ergeben sich zunächst $\beta = \alpha$ und $\gamma = 180° - 2\alpha$.
Entsprechend der Aufgabenstellung müssen die folgenden beiden Fälle untersucht werden:

Fall 2.1: Das Dreieck ABD ist gleichschenklig.



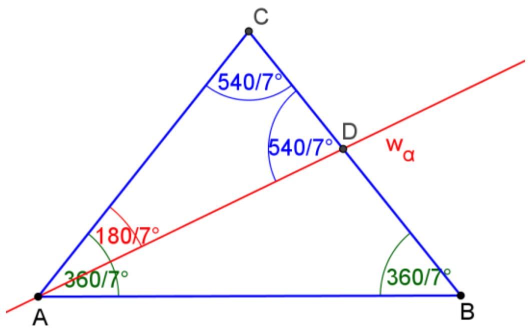
Wäre in diesem Dreieck die Strecke [AB] Basis, so müsste $\frac{\alpha}{2} = \beta$ sein, was im Widerspruch zu $\beta = \alpha$ steht.

Wäre in diesem Dreieck die Strecke [BD] Basis, so müsste $\beta = \delta = \left(180° - \frac{\alpha}{2}\right): 2$ sein. Zusammen mit $\beta = \alpha$ ergibt sich daraus $\left(180° - \frac{\alpha}{2}\right): 2 = \alpha$ bzw. $180° - \frac{\alpha}{2} = 2\alpha$ bzw. $180° = \frac{5}{2}\alpha$. Das bedeutet $\alpha = 360°: 5 = 72° = \beta$ und $\gamma = 180° - 2 \cdot 72° = 36°$. Dies ergibt, wie man leicht sieht, tatsächlich eine Lösung der Aufgabe, nämlich Lösung (3).

Wäre schließlich im Dreieck ABD die Strecke [AD] die Basis, so ergäbe sich $\delta = \frac{\alpha}{2}$ und $\beta = 180° - 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 180° - \alpha$. Das würde aber $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 0°$ bedeuten, was nicht sein kann. Weitere Möglichkeiten gibt es im Fall 2.1 nicht.

Fall 2.2: Das Dreieck ADC ist gleichschenklig.

Wäre in diesem Dreieck die Strecke [AD] Basis, so müsste $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ und $\gamma = 180° - 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 180° - \alpha$ sein. Das würde aber $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 0°$ bedeuten, was nicht sein kann.



Wäre in diesem Dreieck die Strecke [DC] Basis, so müsste $\varepsilon = \gamma = 180° - 2\alpha$ sein.
Mit der Innenwinkelsumme im Dreieck ADC ergibt dies $\frac{\alpha}{2} = 180° - 2\gamma = 180° - 2 \cdot (180° - 2\alpha) = 4\alpha - 180°$.
Umgeformt folgt hieraus $\frac{7}{2}\alpha = 180°$ bzw. $\alpha = 360°: 7 = 51\frac{3}{7}°$ und damit weiter $\beta = \alpha = 51\frac{3}{7}°$ und $\gamma = 180° - 2\alpha = 540°: 7 = 77\frac{1}{7}°$. Wie nebenstehende Abbildung zeigt, ergibt sich damit wirklich eine Lösung der Aufgabe, nämlich Lösung (5).

Wäre schließlich im Dreieck ADC die Strecke [AC] die Basis, so müsste $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ sein. Zusammen mit $\gamma = 180° - 2\alpha$ ergibt sich daraus $180° - 2\alpha = \frac{\alpha}{2}$ bzw. $\frac{5}{2}\alpha = 180°$, also $\alpha = 360°: 5 = 72° = \beta$ und $\gamma = 180° - 2 \cdot 72° = 36°$. Dies ergibt wieder die Lösung (3).

Weitere Möglichkeiten gibt es im Fall 2.2 nicht.

Im **Fall 3** erhält man durch Vertauschung der Bezeichnungen von B und C den Fall 2. Dabei tauschen auch die Innenwinkel β und γ die Rollen. Umgekehrt erhält man aus jeder Lösung der Aufgabe im Fall 2 durch diese Vertauschung eine Lösung im Fall 3. Aus der Lösung (3) ergibt sich so die Lösung (2) und aus der Lösung (5) die Lösung (4). Damit sind alle Fälle untersucht und es ergeben sich genau die zu Beginn genannten Lösungen für die Innenwinkel des Dreiecks ABC.