19. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

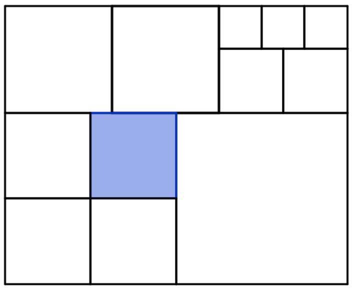
Lösungsbeispiele

für die Aufgaben der 1. Runde 2016/2017

Aufgabe 1

Das abgebildete Rechteck ist in zwölf Quadrate zerlegt. Das gefärbte Quadrat hat einen Flächeninhalt von einem Quadratmeter.

Wie groß ist der Flächeninhalt des ganzen Rechtecks?

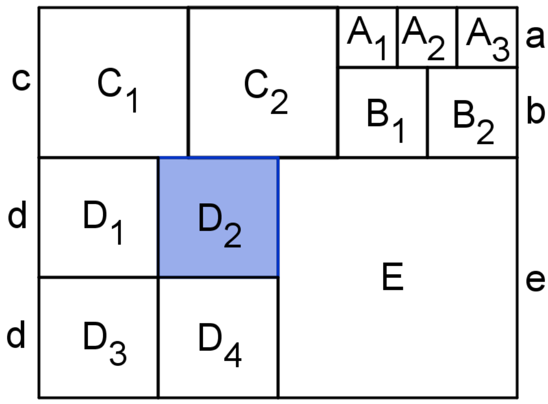


Lösung:

Das ganze Rechteck hat den Flächeninhalt 13 Quadratmeter.

1. Beweisvorschlag:

Die zwölf Quadrate werden wie in der Abbildung mit A_1, A_2, A_3, B_1, …, E bezeichnet. Weil die Quadrate A_1 und A_2 bzw. A_2 und A_3 jeweils eine Seite gemeinsam haben, haben sie alle drei die gleiche Seitenlänge *a*.
Gleiches gilt für die Quadrate B_1 und B_2 mit Seitenlänge *b*, C_1 und C_2 mit Seitenlänge *c* und D_1, D_2, D_3 und D_4 mit Seitenlänge *d*.
Das Quadrat E hat die Seitenlänge *e*.



Im Folgenden werden alle Längenangaben in Metern angegeben.

Weil der Flächeninhalt von D_2 ein Quadratmeter ist, ist $d = 1$. Die zwei im Bild rechten Seiten der Quadrate D_2 und D_4 bilden zusammen eine Seite von E, weswegen $e=2\cdot d=2$ ist.

Weiter bilden die drei in der Abbildung unteren Seiten der Quadrate A_1, A_2 und A_3 zusammen eine Strecke, die genauso lang ist wie die zwei in der Abbildung oberen Seiten der Quadrate B_1 und B_2 zusammen. Daher gilt $3\cdot a=2\cdot b$ (1).

Weil außerdem eine Seite des Quadrats C_2 den zwei im Bild linken Seiten der Quadrate A_1 und B_1 zusammen entspricht, gilt auch $c=a+b$ (2).

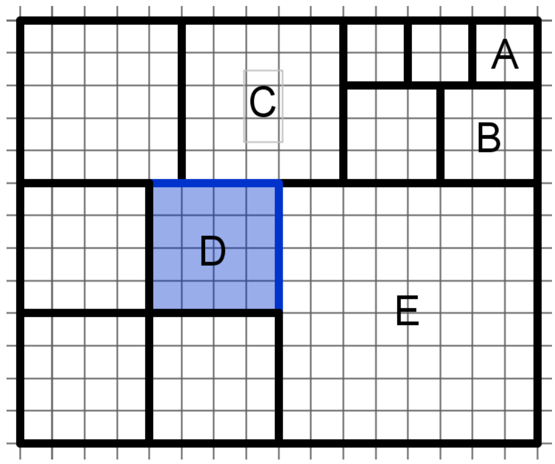
Schließlich bilden die drei oberen Seiten der Quadrate D_1, D_2 und E zusammen eine Strecke derselben Länge wie die vier unteren Seiten der Quadrate C_1, C_2, B_1 und B_2 zusammen. Somit gilt $2\cdot c+2\cdot b=2\cdot d+e=2\cdot 1+2=4$. Setzt man in die letzte Gleichung zunächst (2) und dann (1) ein, so ergibt sich:

$$4=2\cdot c+2\cdot b=2\cdot(a+b)+2\cdot b=2\cdot a+2\cdot 2\cdot b=2\cdot a+2\cdot 3\cdot a=8\cdot a.$$

Das bedeutet, dass $a=\frac{4}{8}=0{,}5$ ist und mit (1) erhält man $b=3\cdot a:2=0{,}75$.

Das gesamte Rechteck hat daher die Seitenlängen $d+d+e=4$ und $a+b+e=0{,}5+0{,}75+2=3{,}25$. Es hat daher den Flächeninhalt $4\text{ m}\cdot 3{,}25\text{ m}=13\text{ m}^2$.

2. Beweisvorschlag:



Auf kariertem Papier kann man die Anordnung der Quadrate und damit das Rechteck maßstäblich zeichnen (s. Abbildung).
Im Folgenden werden alle Seitenlängen in Kästchenlängen angegeben.
Man beginnt mit Quadrat A mit einer Seitenlänge von 2; damit sind die beiden offenbar gleichgroßen Quadrate links neben A auch eindeutig festgelegt. Da das mit B bezeichnete Quadrat genauso groß ist wie sein linkes Nachbarquadrat, ergibt sich für diese beiden Quadrate notwendigerweise eine Seitenlänge von 6 : 2 = 3.

Ebenso ist damit die Seitenlänge des Quadrats C und seines linken Nachbarn mit 2 + 3 = 5 festgelegt.
Das gefärbte Quadrat D und die drei ebenso großen Quadrate links, links-unten und unterhalb von D bilden offenbar ein Quadrat, das genauso groß ist wie E. Demnach muss die Seitenlänge von E genau der halben gesamten Rechtecksbreite,
also (3 + 3 + 5 + 5) : 2 = 8 entsprechen. Für das Quadrat D ergibt sich dann die Seitenlänge 8 : 2 = 4.
Im gewählten Maßstab hat das Rechteck somit die Seitenlängen 16 und 13 und das gefärbte Quadrat hat die Seitenlänge 4.
Das Verhältnis der gesamten Rechteckfläche zur gefärbten Quadratfläche ist in diesem Fall $(16\cdot 13\text{ Kästchen}):(16\text{ Kästchen})=13.$ Dieses Verhältnis bleibt bei jeder maßstäblichen Darstellung gleich. Da in dem in der Aufgabe beschriebenen Rechteck das gefärbte Quadrat den Flächeninhalt 1 Quadratmeter hat, hat das gesamte Rechteck den Flächeninhalt 13 Quadratmeter.

Aufgabe 2

Luisa wirft gleichzeitig vier Spielwürfel. Sie will mit den vier gewürfelten Augenzahlen als Ziffern eine vierstellige Zahl bilden, die keine Primzahl ist.
Ist dies immer möglich?

Antwort:

Ja, Luisa kann stets eine vierstellige Zahl bilden, die keine Primzahl ist.

Beweisvorschlag:

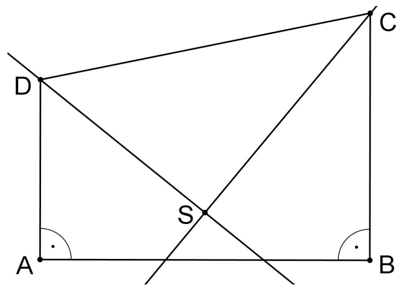
Falls eine der vier gewürfelten Augenzahlen eine 2, 4 oder 6 ist, kann Luisa eine vierstellige Zahl mit dieser Ziffer als Einerziffer bilden. Diese Zahl ist dann gerade und größer als 2 und damit keine Primzahl.
Falls eine der vier gewürfelten Augenzahlen eine 5 ist, kann Luisa diese Ziffer als Einerziffer der vierstelligen Zahl wählen. Die Zahl ist dann durch 5 teilbar und größer als 5 und deswegen keine Primzahl.
Damit bleiben nur die Fälle zu untersuchen, bei denen Luisa nur die Augenzahlen 1 oder 3 würfelt. Diese sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Anzahl 1er	Anzahl 3er	Luisa kann folgende Zahlen bilden, die keine Primzahl sind:
4	0	$1111 = 11 \cdot 101$
3	1	Die Quersumme der Zahlen, die Luisa bilden kann, ist in jedem Fall 6. Jede der vierstelligen Zahlen ist daher durch 3 teilbar: $1113 = 3 \cdot 371$, $1131 = 3 \cdot 377$, $1311 = 3 \cdot 437$, $3111 = 3 \cdot 1037$
2	2	$1133 = 11 \cdot 103$, $1313 = 13 \cdot 101$, $3113 = 11 \cdot 283$, $1331 = 11 \cdot 121$, $3131 = 31 \cdot 101$, $3311 = 11 \cdot 301$
1	3	$1333 = 31 \cdot 43$, $3133 = 13 \cdot 241$
0	4	$3333 = 3 \cdot 1111$

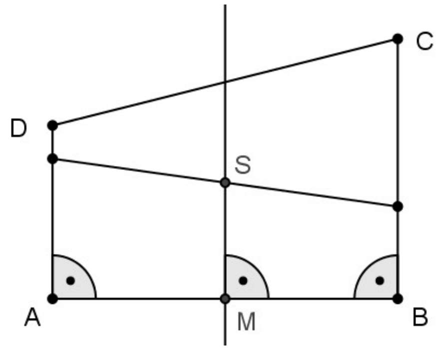
Damit kann Luisa in jedem Fall eine Zahl bilden, die keine Primzahl ist.

Aufgabe 3

Im nebenstehenden Trapez ABCD schneiden sich die Winkelhalbierenden der Winkel $\sphericalangle ADC$ und $\sphericalangle DCB$ im Punkt S.
Zeige, dass S auf der Mittelsenkrechten der Strecke [AB] liegt.



Vorbemerkung:



Nach Aufgabenstellung ist die Seite [AB] gemeinsames Lot der parallelen Seiten [AD] und [BC] des gegebenen Trapezes. Deshalb ist die Mittelsenkrechte von [AB] zugleich die Mittelparallele von AD und BC.
Es genügt also zu zeigen, dass S auf dieser Mittelparallelen liegt.

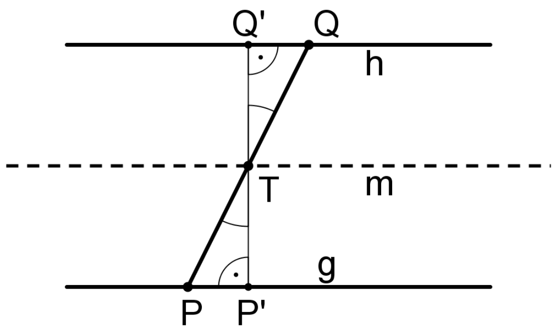
Hierzu kann folgende Aussage benutzt werden:

Hilfsaussage: *Ist T der Mittelpunkt einer Strecke [PQ], wobei P und Q Punkte auf den parallelen Geraden g bzw. h sind, dann liegt T auf der Mittelparallelen m von g und h.*

Diese Aussage darf ohne Beweis verwendet werden. Der Vollständigkeit halber soll hier ein Beweis angegeben werden:

Beweis der Hilfsaussage:

Die Senkrechte zu g bzw. h durch T schneide g und h in P' bzw. Q'. Falls P'=P (und damit auch Q'=Q) ist, hat T gleichen Abstand von g und h, liegt also auf m. Andernfalls sind in den beiden Dreiecken PP'T und QQ'T die Winkel $\sphericalangle TP'P = \sphericalangle TQ'Q = 90°$ und $\sphericalangle PTP' = \sphericalangle QTQ'$ (Scheitelwinkel) sowie nach Voraussetzung die Längen der Strecken [TP] und [TQ] jeweils gleich groß. Daher sind die Dreiecke PP'T und QQ'T kongruent. Also sind auch die Strecken [TP'] und [TQ'] gleich lang; T hat gleichen Abstand von g und h. T liegt also auf m.

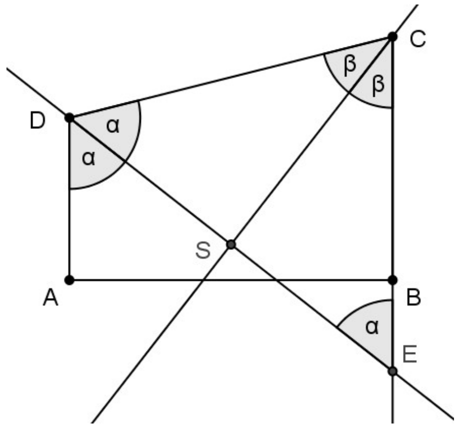


Es genügt demnach zu zeigen, dass S Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke zweier Punkte auf AD bzw. BC ist.

Bezeichnungen:

Mit α werden die beiden gleich großen Winkel $\sphericalangle ADS$ und $\sphericalangle SDC$ bezeichnet, in die der Winkel $\sphericalangle ADC$ durch seine Winkelhalbierende zerlegt wird.
Mit β werden die beiden gleich großen Winkel $\sphericalangle DCS$ und $\sphericalangle SCB$ bezeichnet, in die der Winkel $\sphericalangle DCB$ durch seine Winkelhalbierende zerlegt wird.

1. Beweisvorschlag (mit einem gleichschenkligen Dreieck):

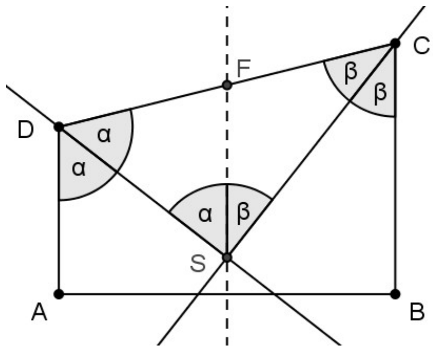


Der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle ADC$ mit der Geraden CB wird mit E bezeichnet.
Da die Winkel $\sphericalangle ADE$ und $\sphericalangle CED$ Wechselwinkel an den parallelen Seiten [AD] und [BC] des gegebenen Trapezes sind, gilt $\sphericalangle CED = \sphericalangle ADE = \alpha$.

Also stimmen die Winkel $\sphericalangle EDC$ und $\sphericalangle CED$ überein und deshalb ist das Dreieck DEC gleichschenklig mit der Basis [DE] und der Spitze C.

Wie in jedem gleichschenkligen Dreieck schneidet im Dreieck DEC die Halbierende CS des Winkels an der Spitze die Basis [DE] in deren Mittelpunkt. Deshalb ist S der Mittelpunkt von [DE]. Nach der Vorbemerkung liegt S also auf der Mittelparallelen von AD und BC und damit auch auf der Mittelsenkrechten von [AB].

2. Beweisvorschlag (mit zwei gleichschenkligen Dreiecken):

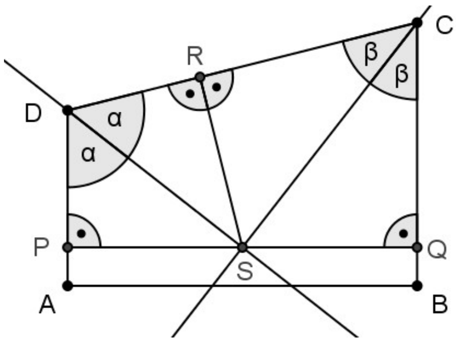


Auf der Strecke [DC] wird der Punkt F so gewählt, dass SF parallel zu den parallelen Seiten [AD] und [BC] des Trapezes ist.
Da die Winkel $\sphericalangle ADS$ und $\sphericalangle FSD$ Wechselwinkel an den parallelen Geraden AD und SF sind, gilt $\sphericalangle ADS = \sphericalangle FSD = \alpha$.
Also stimmen die Winkel $\sphericalangle SDF$ und $\sphericalangle FSD$ überein.
Deshalb ist das Dreieck DSF gleichschenklig mit den gleich langen Schenkeln [DF] und [SF].

Genauso zeigt man, dass das Dreieck SCF gleichschenklig mit den gleich langen Schenkeln [SF] und [FC] ist.

Da die Strecken [DF] und [FC] jeweils genau so lang sind wie [SF], sind sie gleich lang. Deshalb ist F der Mittelpunkt von [DC] und nach der Vorbemerkung ist FS somit die Mittelparallele der Geraden AD und BC. S liegt daher auf der Mittelsenkrechten von [AB].

3. Beweisvorschlag (mit kongruenten Dreiecken):



Die Fußpunkte der Lote von S auf die Seiten [AD], [BC] und [CD] werden mit P, Q und R bezeichnet.

Wegen der Übereinstimmung in der gemeinsamen Seite [SD], in den rechten Winkeln bei P und R und den beiden Winkeln α bei D sind die Dreiecke SPD und SRD kongruent. Also sind die Seiten [PS] und [RS] gleich lang.

Genauso zeigt man, dass die Seiten [RS] und [QS] gleich lang sind.

Da die Strecken [PS] und [QS] jeweils genau so lang sind wie [RS], sind sie gleich lang. Deshalb ist S der Mittelpunkt von [PQ]. Nach der Vorbemerkung liegt S somit auf der Mittelparallelen von AD und BC, also auf der Mittelsenkrechte von [AB].

4. Beweisvorschlag (mit „Geometrischen Örtern“)

Vorbemerkung:

Sehr hilfreich bei vielen geometrischen Beweisen ist der Begriff des geometrischen Ortes. So wird die Menge aller Punkte der Ebene bezeichnet, welche eine gewisse Eigenschaft besitzen.

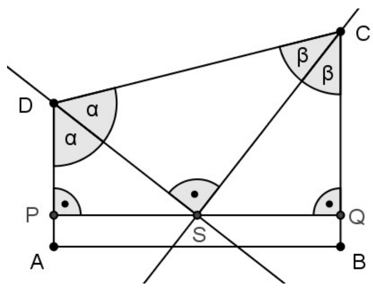
(1) Die Winkelhalbierende eines Winkels ist der geometrische Ort aller Punkte im Winkelfeld, die von den beiden Schenkeln des Winkels den gleichen Abstand haben.

(2) Die Mittelparallele von zwei parallelen Geraden ist der geometrische Ort aller Punkte, die von den beiden Parallelen den gleichen Abstand haben.

Mit Hilfe dieser beiden Aussagen kann man nun folgendermaßen argumentieren:

Da der Punkt S auf der Winkelhalbierenden des Winkels DCB liegt, hat er nach (1) von CB den gleichen Abstand wie von CD.
Weil der Punkt S auch auf der Winkelhalbierenden des Winkels ADC liegt, hat er von CD ebenfalls den gleichen Abstand wie von AD.
Somit hat der Punkt S von CB und AD den gleichen Abstand.
Da CB und AD nach Voraussetzung parallel sind, liegt S also nach (2) auf der Mittelparallelen dieser Geraden und nach der Vorbemerkung somit auch auf der Mittelsenkrechten von [AB].

5. Beweisvorschlag (mit ähnlichen Dreiecken):



Die Fußpunkte der Lote von S auf die Seiten [AD] und [BC] werden mit P und Q bezeichnet. [PQ] ist dann gemeinsames Lot der parallelen AD und BC. Im Viereck PQCD erhält man mit Hilfe der Innenwinkelsumme: $\sphericalangle ADC + \sphericalangle DCB + 90° + 90° = 360°$.
Also gilt: $\sphericalangle ADC + \sphericalangle DCB = 2\alpha + 2\beta = 180°$, also α + β = 90°.

Da die Winkelsumme im Dreieck DSC 180° beträgt, folgt daraus $\sphericalangle CSD = 90°$.

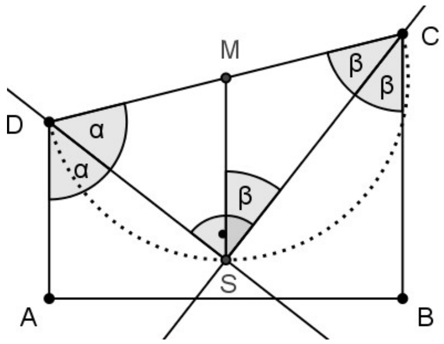
Die Dreiecke PSD und SCD sind ähnlich, da sie in dem rechten Winkel und in α übereinstimmen. Folglich stehen entsprechende Seiten im gleichen Verhältnis: $\frac{\overline{PS}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$. Daraus folgt: $\overline{PS} = \frac{\overline{SD} \cdot \overline{SC}}{\overline{CD}}$.

Die Dreiecke QCS und SCD sind ähnlich, da sie in dem rechten Winkel und in β übereinstimmen. Folglich stehen entsprechende Seiten im gleichen Verhältnis: $\frac{\overline{QS}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{SD}}{\overline{CD}}$.

Daraus folgt $\overline{QS}=\frac{\overline{SD}\cdot\overline{SC}}{\overline{CD}}$.

Da [PS] und [QS] somit gleich lang sind, ist S der Mittelpunkt von [PQ]. Nach der Vorbemerkung liegt S also auf der Mittelparallelen von AD und BC, also auf der Mittelsenkrechten von [AB].

6. Beweisvorschlag (mit der Umkehrung des Satzes von Thales):



Wie im 5. Beweisvorschlag wird gezeigt, dass das Dreieck CDS bei S einen rechten Winkel besitzt.

Aus der Umkehrung des Satzes des Thales folgt daher, dass S auf einem Halbkreis über dem Durchmesser [CD] mit Mittelpunkt M liegt.
Die Strecken [MS] und [MC] sind demnach Radien dieses Thaleskreises und als solche gleich lang.
Somit ist das Dreieck MSC gleichschenklig mit den gleich großen Basiswinkeln $\sphericalangle CSM=\sphericalangle MCS=\beta$.

Die Winkel $\sphericalangle CSM$ und $\sphericalangle SCB$ sind deshalb Wechselwinkel gleicher Größe β. Aus der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes folgt daraus, dass die Geraden SM und BC parallel sind.

Da M der Mittelpunkt der Strecke [CD] ist, ist MS Mittelparallele der Geraden AD und BC. S liegt demnach auf dieser Mittelparallelen, also auch auf der Mittelsenkrechten von [AB].

Aufgabe 4

Maximilian bastelt für seine Schwester Theresa aus roten und schwarzen Perlen eine geschlossene Kette. Zwischen zwei gleichfarbigen Perlen fügt er ein goldenes Zwischenstück ein, zwischen zwei verschiedenfarbigen Perlen ein silbernes Zwischenstück. Theresa stellt fest, dass ihre Kette gleich viele goldene wie silberne Zwischenstücke hat.
Zeige, dass die Anzahl der Perlen ein Vielfaches von 4 ist.

1. Beweisvorschlag:

Da die Kette geschlossen ist, ist die Anzahl aller Perlen gleich der Anzahl aller Zwischenstücke.
Die Anzahl der silbernen Zwischenstücke wird mit s bezeichnet. Da zwischen zwei Perlen stets ein Zwischenstück eingefügt wird und genau so viele silberne wie goldene Zwischenstücke benutzt werden, insgesamt also $2s$ Zwischenstücke, muss es insgesamt $2s$ Perlen geben.

Geht man beginnend bei einer beliebigen Perle, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit rot gefärbt sei, einmal entlang der Kette alle Perlen durch, so erreicht man die erste schwarze Perle nach dem ersten silbernen Zwischenstück, das man passiert. Danach erreicht man erst wieder eine rote Perle, wenn das zweite silberne Zwischenstück passiert wird usw.
Im Allgemeinen ist die Farbe einer Perle bei dem Weg um die Kette dabei genau dann rot, wenn man bisher eine gerade Anzahl an silbernen Zwischenstücken passiert hat, bei einer ungeraden Anzahl ist die Perle schwarz.
Da man nach einer vollständigen Umrundung der Kette wieder bei der roten Startperle ankommt, muss eine gerade Anzahl an silbernen Zwischenstücken passiert worden sein. Somit ist s gerade: $s = 2m$ mit einer natürlichen Zahl m. Die Anzahl der Perlen der Kette ist daher $2s = 4m$, also ein Vielfaches von 4.

2. Beweisvorschlag:

Da die Kette geschlossen ist, ist die Anzahl aller Perlen gleich der Anzahl aller Zwischenstücke. Die Anzahl der goldenen Zwischenstücke wird mit g bezeichnet.
Da zwischen zwei Perlen stets ein Zwischenstück eingefügt wird und genau so viele silberne wie goldene Zwischenstücke benutzt werden, insgesamt also $2g$ Zwischenstücke, muss es insgesamt $2g$ Perlen geben.

Ersetzt man nun jedes goldene Zwischenstück, das zwischen zwei roten Perlen ist, durch eine schwarze Perle und jedes goldene Zwischenstück, das zwischen zwei schwarzen Perlen ist, durch eine rote Perle und entfernt zusätzlich alle silbernen Zwischenstücke, so erhält man eine neue Kette, in der sich schwarze und rote Perlen abwechseln. Die Anzahl der Perlen dieser neuen Kette muss also gerade sein und ist gleich $2g + g = 3g$.

Das bedeutet, dass g selbst gerade sein muss: $g = 2m$ mit einer natürlichen Zahl m. Die Anzahl der Perlen der ursprünglichen Kette ist daher $2g = 4m$, also ein Vielfaches von 4.

3. Beweisvorschlag:

Die Anzahl aller Perlen ist gleich der Anzahl aller Zwischenstücke, weil die Kette geschlossen ist.
Die Anzahl der goldenen Zwischenstücke der Kette wird mit g bezeichnet. Daher gibt es $2g$ Perlen. Schrittweise wird nun jede rote Perle der Kette zu einer schwarzen gemacht und die an die jeweilige Perle angrenzenden Zwischenstücke so angepasst, dass wieder zwischen verschiedenfarbigen Perlen ein silbernes Zwischenstück und zwischen gleichfarbigen Perlen ein goldenes ist.
Die Anzahl der goldenen Zwischenstücke ändert sich bei jedem solchen Schritt je nach Farbe der benachbarten Perlen.
Die folgende Tabelle fasst alle Möglichkeiten hierbei zusammen:

Situation vor der Änderung	Situation nach der Änderung	Die Anzahl der goldenen Zwischenstücke ...
schwarz –s– rot –s– schwarz	schwarz –g– schwarz –g– schwarz	… erhöht sich um 2.
rot –g– rot –s– schwarz	rot –s– schwarz –g– schwarz	… bleibt gleich.
schwarz –s– rot –g– rot	schwarz –g– schwarz –s– rot	… bleibt gleich.
rot –g– rot –g– rot	rot –s– schwarz –s– rot	… verringert sich um 2.

Am Ende besteht die Kette aus $2g$ schwarzen Perlen und $2g$ goldenen Zwischenstücken. Die Anzahl der goldenen Zwischenstücke hat sich also durch die Änderungen aller roten zu schwarzen Perlen um $2g - g = g$ geändert. Da sich die Anzahl der goldenen Zwischenstücke bei jeder solchen Änderung gar nicht oder aber um 2 ändert, muss die Gesamtänderung g gerade sein: $g = 2m$ mit einer natürlichen Zahl m. Deswegen ist die Anzahl der Perlen $2g = 4m$ ein Vielfaches von 4.

Aufgabe 5

Bestimme alle Jahreszahlen N, für die gilt:
N – 2000 ist eine Zweierpotenz und N ist die Differenz zweier Zweierpotenzen.

Lösung:

Die einzigen Jahreszahlen, die beide Bedingungen erfüllen, sind 2016 und 2032.

1. Beweisvorschlag:

Sei N eine Jahreszahl mit den genannten Eigenschaften. Dann gibt es also nicht negative ganze Zahlen k, m und n so, dass

(1) $N-2000=2^k$ und
(2) $N=2^m-2^n$ gilt.

Setzt man (2) in (1) ein, so folgt $2^m-2^n-2000=2^k$, bzw.

(3) $2000 = 2^m - 2^n - 2^k$.

Offenbar muss dabei $m > n$ und $m > k$ sein. Bezüglich der Größe von n und k werden nun drei Fälle unterschieden:

1. Fall: *n > k*

In diesem Fall ist $n = k + i$ mit einer natürlichen Zahl i. Wegen $m > n$ ist $m = n + j$ mit einer natürlichen Zahl j, und daher ist $m = k + i + j$.
Zerlegt man 2000 in Primfaktoren, so erhält man $2000 = 2^4 \cdot 5^3$.
Aus (3) ergibt sich demnach: $2^4 \cdot 5^3 = 2^{k+i+j} - 2^{k+i} - 2^k = 2^k \cdot \left(2^{i+j} - 2^i - 1\right)$.
Da der Term in den Klammern ungerade ist, enthält er keinen Primfaktor 2, also muss wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung $2^k = 2^4$ sein, also $k = 4$ sein.
Für den Term in der Klammer gilt also: $5^3 = 125 = 2^{i+j} - 2^i - 1$. Deswegen muss $126 = 2^i \cdot (2^j - 1)$ sein. Weil die Primfaktorzerlegung für $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ ist und $2^j - 1$ ungerade ist, folgt weiter $2^i = 2$, also $i = 1$ und somit $n = 5$. Weiter ist dann $2^j - 1 = 3^2 \cdot 7 = 63$, also $2^j = 64$ bzw. $j = 6$. Daher gilt $m = n + j = 5 + 6 = 11$.
So erhält man die mögliche Jahreszahl $N = 2000 + 2^k = 2000 + 2^4 = 2016$. Tatsächlich gilt für dieses N auch: $N = 2^m - 2^n = 2^{11} - 2^5 = 2048 - 32 = 2016$.

2. Fall: *k > n*

In diesem Fall tauschen k und n in Gleichung (3) ihre Rollen. Es ist $k = n + i$ und $m = n + i + j$ mit natürlichen Zahlen i und j.
Aus (3) ergibt sich, analog zum ersten Fall: $2^4 \cdot 5^3 = 2^n \cdot \left(2^{i+j} - 1 - 2^i\right)$, woraus $n = 4$ und $5^3 = 2^{i+j} - 2^i - 1$ folgt.
Mit der letzten Gleichung ergibt sich: $126 = 2^{i+j} - 2^i = 2^i \cdot \left(2^j - 1\right)$. Weil die Primfaktorzerlegung für $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ ist und $2^j - 1$ ungerade ist, folgt weiter $2^i = 2$, also $i = 1$ und somit $k = 5$. Weiter ist dann $2^j - 1 = 3^2 \cdot 7 = 63$, also $2^j = 64$ bzw. $j = 6$. Daher gilt $m = n + i + j = 4 + 1 + 6 = 11$.
So erhält man die mögliche Jahreszahl $N = 2000 + 2^k = 2000 + 2^5 = 2032$. Tatsächlich gilt für dieses N auch: $N = 2^m - 2^n = 2^{11} - 2^4 = 2048 - 16 = 2032$.

3. Fall: *k = n*

In diesem Fall ist $k = n$ und $m = k + j$ mit einer natürlichen Zahl j.
Aus (3) ergibt sich $2^4 \cdot 5^3 = 2^k \cdot \left(2^j - 1 - 1\right) = 2^k \cdot \left(2^j - 2\right)$.
Der Term $2^j - 2$ kann offenbar nicht den Wert 0 haben, also ist $j > 1$ und man kann einen weiteren Faktor ausklammern: $2^4 \cdot 5^3 = 2^{k+1} \cdot \left(2^{j-1} - 1\right)$.
Hieraus folgen $n = k = 3$ und $5^3 = 2^{j-1} - 1$. Die letzte Gleichung lässt sich zu $126 = 2^{j-1}$ umformen und besitzt offenbar keine ganzzahlige Lösung. Somit ergibt sich keine weitere Jahreszahl.

Damit sind alle möglichen Fälle betrachtet worden und nur $N = 2016$ und $N = 2032$ sind Lösungen.

2. Beweisvorschlag:

Wie im 1. Beweisvorschlag wird aus den Bedingungsgleichungen (1) und (2) mit nicht negativen ganzen Zahlen k,m und n die Gleichung

(3) $\quad 2000=2^m-2^n-2^k$.

gefolgert. Hier muss wieder $m > n$ und $m > k$ sein. Zusätzlich wird aufgrund der Symmetrie der Gleichung (3) zunächst $n\geq k$ angenommen. Wegen $2^{10}=1024$ muss $m\geq 11$ sein.

1. Fall: $m=11$

Setzt man dies in (3) ein, so ergibt sich $2000=2048-2^n-2^k$ bzw. $48=2^n+2^k$. Weil $2^6=64>48$ ist, muss $n\leq 5$ sein. Wäre $n\leq 4$, dann wäre auch $k\leq 4$ und damit $2^n+2^k\leq 2^4+2^4=32<48$. Ein Widerspruch.
Also muss $n=5$ sein und man erhält: $48=2^5+2^k=32+2^k$, also $16=2^k$ bzw. $k = 4$.
Aufgrund der Symmetrie der Gleichung (3) in den Variablen n und k ergeben sich für k die beiden möglichen Werte $k_1=4$ und $k_2=5$ und damit die beiden möglichen Jahreszahlen $N_1=2000+2^{k_1}=2000+2^4=2016$ und $N_2=2000+2^{k_2}=2000+2^5=2032$. Tatsächlich gilt für diese Jahreszahlen auch: $2^{11}-2^5=2048-32=2016$ bzw. $2^{11}-2^4=2048-16=2032$, womit diese beiden Zahlen als Lösungen nachgewiesen sind.

2. Fall: $m=12$

Setzt man dies in (3) ein, so ergibt sich: $2000=2^{12}-2^n-2^k=4096-2^n-2^k$ bzw. $2096=2^n+2^k$. Zunächst muss $n\leq m-1=11$ sein. Wäre $n\leq 10$, dann wäre auch $k\leq 10$ und damit $2^n+2^k\leq 2^{10}+2^{10}=2048<2096$. Ein Widerspruch.
Also muss $n=11$ sein und man erhält: $2096=2^{11}+2^k=2048+2^k$ bzw. $2^k=48$. Diese Gleichung hat aber keine ganzzahlige Lösung.
In diesem Fall hat die Gleichung (3) also keine Lösung.

3. Fall: $m\geq 13$

Falls $n=m-1$ ist, dann kann nicht auch $k=m-1$ sein, weil sonst $2^m-2^n-2^k=2^m-2^{m-1}-2^{m-1}=0$ wäre. Demnach muss $k\leq m-2$ gelten und es folgt: $2^m-2^n-2^k\geq 2^m-2^{m-1}-2^{m-2}=2^{m-2}\geq 2^{11}=2048>2000$. Das ist ein Widerspruch zu (3).

Falls aber $n\leq m-2$ ist, dann folgt: $2^m-2^n-2^k\geq 2^m-2^{m-2}-2^{m-2}=2^{m-1}\geq 2^{12}=4096>2000$. Auch dies ist ein Widerspruch zu (3).

In diesem Fall gibt es also auch keine Lösung der Gleichung (3).

Damit sind alle möglichen Fälle behandelt.

3. Beweisvorschlag (mit Dualzahldarstellung):

Vorbemerkung:

In unserem gewöhnlichen Dezimalsystem ist das Rechnen mit Zehnerpotenzen besonders einfach. Bei Überlegungen zu Zweierpotenzen bietet sich aus entsprechendem Grund das Dualsystem an, denn Zweierpotenzen sind die Stufenzahlen des Dualsystems. Die Zweierpotenz 2^n schreibt sich im Dualsystem, welches nur die Ziffern 0 und 1 benötigt, dann wie folgt: $2^n=(100\ldots0000)_2$ mit n Ziffern 0.
Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Summe von verschiedenen Zweierpotenzen schreiben. So schreibt sich etwa die Zahl 2000 im Dualsystem:

$$\begin{aligned} 2000 &= 1\cdot1024+1\cdot512+1\cdot256+1\cdot128+1\cdot64+0\cdot32+1\cdot16+0\cdot8+0\cdot4+0\cdot2+0\cdot1 \\ &= 1\cdot2^{10}+1\cdot2^9+1\cdot2^8+1\cdot2^7+1\cdot2^6+0\cdot2^5+1\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0 \\ &= (11111010000)_2 \end{aligned}$$

Auch die Differenz von zwei Zweierpotenzen besitzt eine einfache Dualzahldarstellung, wie zunächst das folgende Beispiel zeigt:
$2^7 - 2^3 = (10000000)_2 - (1000)_2 = (1111000)_2 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3.$
Die Richtigkeit dieser Rechnung ist einfach aus der Probe ablesbar:
$(1111000)_2 + (1000)_2 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^3 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^4 = 2^6 + 2^5 + 2^5 = 2^6 + 2^6 = 2^7 = (10000000)_2$
Hilfreich für die Lösung der Aufgabe ist folgende Verallgemeinerung des Beispiels:

Hilfssatz:

Eine natürliche Zahl *N* ist genau dann Differenz von zwei verschiedenen Zweierpotenzen, wenn sich in ihrer Dualzahldarstellung einer Folge von ausschließlich Ziffer 1 eine Folge von ausschließlich Ziffer 0 (oder auch gar keine 0) anschließt: $(11\ldots1100\ldots00)_2$ oder auch $(11\ldots11)_2$.

Beweis des Hilfssatzes:

Mit $m>k\geq0$ ist $N=2^m-2^k=2^{m-1}+2^{m-2}+\ldots+2^{k+1}+2^k=(11\ldots11100\ldots00)_2$ mit *m-k* Ziffern 1 und *k* Ziffern 0. Auch hier ergibt sich die Richtigkeit aus einer entsprechenden Rechnung:
$2^{m-1} + 2^{m-2} + \ldots + 2^{k+1} + 2^k + 2^k = 2^{m-1} + 2^{m-2} + \quad + 2^{k+1} + 2^{k+1} = \ldots\ldots = 2^{m-1} + 2^{m-1} = 2^m$.

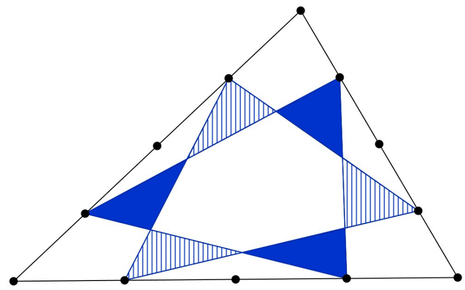
Lösung der Aufgabe:

Zur Lösung der Aufgabe genügt es, alle Zweierpotenzen $(10\ldots0)_2$ zu finden, die zur Zahl $(11111010000)_2$ addiert eine Zahl ergeben, die eine Differenz von zwei Zweierpotenzen ist, die also eine Dualzahldarstellung besitzt, bei der sich einer Folge von ausschließlich Ziffern 1 eine Folge von ausschließlich Ziffern 0 anschließt (siehe Hilfssatz).
$(11111010000)_2 + (10\ldots0)_2 = (11\ldots1100\ldots00)_2$ oder im Dezimalsystem:
$2000 + 2^n = 2^m - 2^k$.
Die besondere Dualzahldarstellung der Zahl $2000 = (11111010000)_2$ lässt sofort die beiden einzigen Lösungen erkennen:
$2000 + 16 = (11111010000)_2 + (10000)_2 = (11111100000)_2 = 2016$
$2000 + 32 = (11111010000)_2 + (100000)_2 = (11111110000)_2 = 2032$

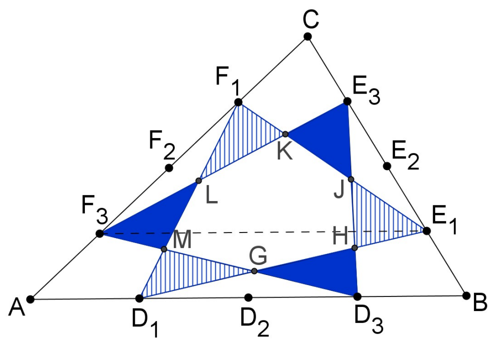
Werden kleinere Zweierpotenzen als 16 oder größere Zweierpotenzen als 32 addiert, so bleibt in der Dualzahldarstellung der Summe an der 6. Stelle von links die 0 vom Summanden 2000 stehen und es ergibt sich keine Differenz von Zweierpotenzen.

Aufgabe 6

Die Seiten eines Dreiecks sind jeweils in vier gleich lange Teilstrecken geteilt. Einige Teilpunkte sind wie in der Abbildung durch Strecken verbunden. Zeige: Die Summe der Flächeninhalte der drei blau gefärbten Dreiecke ist genauso groß wie die Summe der Flächeninhalte der drei schraffierten Dreiecke.



1. Beweisvorschlag (mit Strahlensatz):



Die markierten Teilpunkte, die Eckpunkte des Dreiecks und die Schnittpunkte der gezeichneten Strecken seien wie in der Abbildung bezeichnet.

Dann gilt zunächst $\frac{\overline{CF_3}}{\overline{CA}} = \frac{3}{4} = \frac{\overline{CE_1}}{\overline{CB}}$. Mit der Umkehrung des Strahlensatzes folgt damit, dass [AB] parallel zu $[F_3E_1]$ ist. Deswegen haben die beiden Dreiecke AD_3F_3 und D_1BE_1 dieselbe Höhe auf den jeweiligen Grundseiten $[AD_3]$ bzw. $[D_1B]$.

Da außerdem diesen beiden Grundseiten gleiche Länge haben, nämlich $\frac{3}{4} \cdot \overline{AB}$, haben die beiden Dreiecke AD_3F_3 und D_1BE_1 gleichen Flächeninhalt:

(1) $A(AD_3F_3) = A(D_1BE_1)$. Genauso folgert man:

(2) $A(BE_3D_3) = A(E_1CF_1)$ und

(3) $A(CF_3E_3) = A(F_1AD_1)$.

Also kann man für die Gesamtflächen A(blau) und A(schraffiert) der blauen bzw. schraffierten Dreiecke kann man schließen:

$$\begin{aligned} A(\text{blau}) &= A(ABC) - A(AD_3F_3) - A(BE_3D_3) - A(CF_3E_3) - A(GHJKLM) \\ &= A(ABC) - A(D_1BE_1) - A(E_1CF_1) - A(F_1AD_1) - A(GHJKLM) \\ &= A(\text{schraffiert}) \end{aligned}$$

1. Bemerkung:

Tatsächlich haben die sechs in den Gleichungen (1), (2) und (3) betrachteten Dreiecke alle denselben Flächeninhalt, nämlich $\frac{3}{16} \cdot A(ABC)$. Dies folgt beispielsweise für das Dreieck AD_3F_3 folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
A(AD_3F_3) &= \frac{1}{2}\cdot\overline{AD_3}\cdot\overline{AF_3}\cdot\sin(\sphericalangle D_3AF_3)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\overline{AB}\cdot\frac{1}{4}\overline{AC}\cdot\sin(\sphericalangle D_3AF_3)\\
&= \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin(\sphericalangle BAC)=\frac{3}{16}\cdot A(ABC)
\end{aligned}
$$

2. Bemerkung bzw. Beweisvorschlag:

Das gegebene Dreieck ABC kann durch eine affine Abbildung auf ein gleichseitiges Dreieck A'B'C' abgebildet werden. Bei einer solchen Abbildung bleiben Teilverhältnisse und Flächenverhältnisse erhalten. In einem gleichseitigen Dreieck A'B'C' sind sämtliche sechs blauen bzw. schraffierten Dreiecke aber aus Symmetriegründen sogar kongruent und damit flächengleich. Hieraus folgt, dass auch im Dreieck ABC die betrachteten sechs Dreiecke flächengleich sind, und daher natürlich auch die Summe der drei blauen Dreiecksflächen gleich der Summe der drei schraffierten Dreiecksflächen ist.