# 17. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

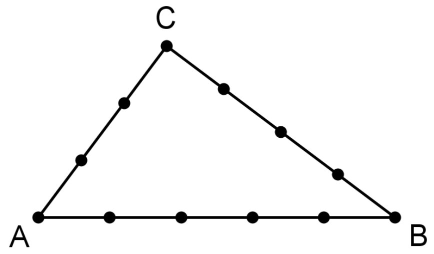
Lösungsbeispiele

für die Aufgaben der 1. Runde 2014/2015

## Aufgabe 1

*Die Zahlen 1, 2, 3, …, 12 werden auf die markierten Punkte des nebenstehenden Dreiecks verteilt. Dabei hat die Summe der Zahlen jeder Seite den Wert 28.*

*Bestimme alle möglichen Zahlen, die am Eckpunkt A stehen können.*

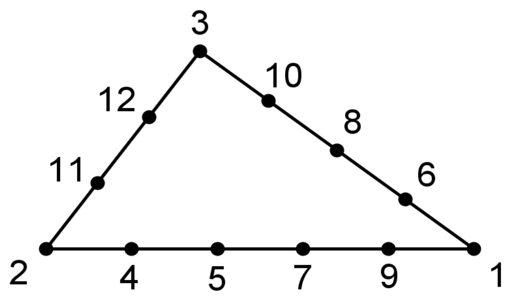


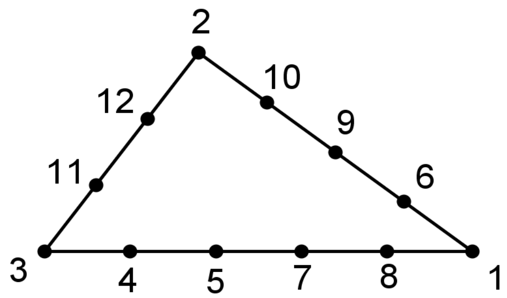

## Ergebnis:

Am Eckpunkt A können nur die beiden Zahlen 2 oder 3 stehen.

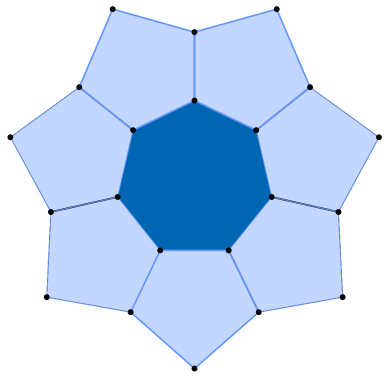
## Beweisvorschlag :

Die Zahlen an den Ecken A, B und C seien mit a, b und c bezeichnet.
Addiert man die Summen der Zahlen der drei Seiten, so erhält man als Wert $3 \cdot 28 = 84$.
Dabei hat man die Zahlen a, b und c genau zweimal gezählt, da die Eckpunkte A, B und C zu jeweils zwei Seiten gehören. Alle anderen Zahlen von 1 bis 12 wurden genau einmal gezählt.
Deswegen gilt: $84 = 1+2+3+...+12+a+b+c = 78+a+b+c$.
Das bedeutet, dass $a+b+c = 6$ sein muss. Der Summenwert 6 wird aber mit drei verschiedenen der vorgegebenen Zahlen nur in der Summe 1+2+3 (in beliebiger Reihenfolge) angenommen. Deswegen muss a (und ebenso b bzw. c) eine der Zahlen 1, 2 oder 3 sein.
Wäre a = 1, dann hätte die Summe der vier Zahlen der Seite [AC] höchstens den Wert 1+11+12+3 = 27. Das ist also nicht möglich.
Dass a = 2 und a = 3 jeweils möglich sind, zeigen die folgenden beiden Beispiele.



## Aufgabe 2

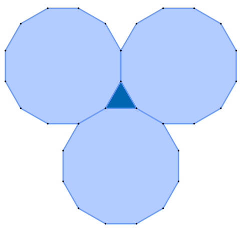
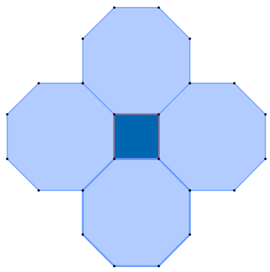
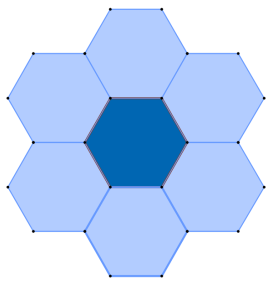
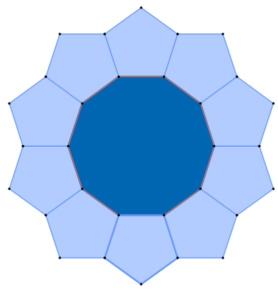


*Jedes regelmäßige n-Eck kann von n kongruenten Platten fugenlos umrahmt werden, wie es die nebenstehende Zeichnung am Beispiel n = 7 mit fünfeckigen Platten zeigt.*
*Für welche Werte von n können diese Platten regelmäßige Vielecke sein? Wie viele Ecken haben diese Platten dann?*

Bemerkung: Ein Vieleck heißt regelmäßig, wenn alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß sind.

## Lösung:

Die gesuchten Werte für n und die zugehörigen Eckenzahlen m der umrahmenden Platten sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

| n | 3 | 4 | 6 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| m | 12 | 8 | 6 | 5 |
| Skizze |  |  |  |  |

## 1. Beweisvorschlag:

Für den Innenwinkel $\alpha$ des regelmäßigen n-Ecks gilt bekanntlich $\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$ (1).
Sind die umrahmenden Platten ebenfalls regelmäßig, so sind ihre Innenwinkel $\beta$ alle gleich groß und da an jedem Eckpunkt des n-Ecks zwei Platten zusammenstoßen, gilt $\alpha + 2\cdot\beta = 360°$ bzw. $\beta = 180° - \frac{\alpha}{2}$ (2).
Mit den beiden Gleichungen (1) und (2) kann man nun folgende Tabelle für die ersten möglichen Werte für n erstellen:

| n | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $60°$ | $90°$ | $108°$ | $120°$ | $128\frac{4}{7}°$ | $135°$ | $140°$ | $144°$ | $147\frac{3}{11}°$ | $150°$ |
| $\beta$ | $150°$ | $135°$ | $126°$ | $120°$ | $115\frac{5}{7}°$ | $112\frac{1}{2}°$ | $110°$ | $108°$ | $106\frac{4}{11}°$ | $105°$ |

Weil $\alpha < 180°$ ist, folgt aus Gleichung (2), dass $\beta > 90°$ sein muss. Sind die umrahmenden Platten regelmäßige Vielecke, so kommen für $\beta$ ebenfalls nur Werte der (eventuell nach rechts erweiterten) zweiten Zeile der Tabelle in Frage. Es muss also sogar $\beta \geq 108°$ sein.

Da mit wachsendem n der Wert von $\alpha$ steigt und entsprechend der von $\beta$ fällt, kann man der dritten Zeile der Tabelle entnehmen, dass $\beta \geq 108°$ nur für $n \leq 10$ gelten kann.
Für den nun noch möglichen Bereich $3 \leq n \leq 10$ kann man wiederum der Tabelle entnehmen, dass genau für die vier in der Lösung genannten und in der Tabelle markierten n-Werte $\beta$ eine Innenwinkelgröße eines regelmäßigen Vielecks ist, dass also bei den n-Werten 5, 7, 8 und 9 die Größe von $\beta$ keinem Wert der zweiten Tabellenzeile entspricht, dies für die vier markierten n-Werte aber der Fall ist. Die entsprechenden Eckenzahlen dieser Vielecke liest man schließlich ebenfalls mithilfe der zweiten und ersten Zeile der Tabelle ab.
Aufgrund der Gültigkeit von (2) kann man nun in diesen vier Fällen ein regelmäßiges n-Eck mit regelmäßigen Vielecksplatten fugenlos umrahmen.

### 2. Beweisvorschlag:

Es gelten die Gleichungen (1) und (2) wie im 1. Beweisvorschlag.
Entsprechend gilt für den Innenwinkel der m-eckigen Platten: $\beta = \frac{(m-2) \cdot 180°}{m}$ (3).
Setzt man (1) und (3) in (2) ein, so erhält man: $\frac{(m-2) \cdot 180°}{m} = 180° - \frac{(n-2) \cdot 180°}{2n}$ (4).
Dividiert man diese Gleichung durch 180° und multipliziert man mit $2 \cdot m \cdot n$, so ergibt sich daraus: $(m-2) \cdot 2n = 2 \cdot m \cdot n - (n-2) \cdot m$ bzw. nach Klammernauflösen und Umformen nach m ergibt sich schließlich

$$m = \frac{4n}{n-2} = \frac{4n-8+8}{n-2} = \frac{4(n-2)}{n-2} + \frac{8}{n-2} = 4 + \frac{8}{n-2} \quad (5),$$

wobei m ganzzahlig und $n-2>0$ ist. Also muss $n-2$ ein positiver Teiler von 8 sein. Es ist also $n-2$ eine der Zahlen 1, 2, 4 oder 8, das heißt n muss gleich 3, 4, 6 oder 10 sein. Setzt man dies in (5) ein, so ergeben sich entsprechend m = 12, m = 8, m = 6 bzw. m = 5, also die in der Lösung angegebenen Werte.
Da zwischen den Gleichungen (4) und (5) nur Äquivalenzumformungen gemacht wurden, erfüllen die gefundenen Lösungspaare für n und m auch die Gleichung (4). Die zugehörigen Winkel $\alpha$ und $\beta$ erfüllen demnach die Gleichung $\alpha + 2 \cdot \beta = 360°$, so dass sich mit dem n-Eck und den m-eckigen Platten auch tatsächlich die Muster wie in obigen Skizzen legen lassen.

## Aufgabe 3

*Das Produkt von vier nicht unbedingt verschiedenen Primzahlen ist das Zehnfache ihrer Summe. Bestimme alle Möglichkeiten für diese vier Primzahlen.*

**Lösung:**

Die einzige Möglichkeit für die vier Primzahlen ist 2, 3, 5, 5.

### 1. Beweisvorschlag:

Die vier Primzahlen seien mit a, b, c und d bezeichnet. Dann soll folgende Gleichung gelten: $a \cdot b \cdot c \cdot d = 10 \cdot (a+b+c+d)$ (1).

Weil $10 = 2 \cdot 5$ ist, müssen die Primzahlen 2 und 5 unter den vier gesuchten sein; o.B.d.A. sei also a = 2 und b = 5. Setzt man dies in (1) ein, so folgt: $c \cdot d = 2 + 5 + c + d$ (2).
Von hier aus kann man verschiedenartig weiter argumentieren:

***Variante 1:***

Diese Gleichung kann man umformen zu $c \cdot d - c - d + 1 = 8$ bzw. $(c-1)(d-1) = 8$ (3). Weil c>1 und d>1 ist, sind auf der linken Seite von (3) beide Faktoren positiv und ganzzahlig. Setzt man o.B.d.A. $c \leq d$ voraus, so gibt es hierfür nur die beiden Möglichkeiten $c - 1 = 1$ und $d - 1 = 8$ bzw. $c - 1 = 2$ und $d - 1 = 4$. Ersteres liefert d = 9, was keine Primzahl ist. Deswegen bleibt nur die zweite Möglichkeit mit c = 3 und d = 5.

***Variante 2:***

Die Gleichung (2) kann man nach c auflösen. Zusammenfassen liefert zunächst $c \cdot (d-1) = d + 7$. Hierbei kann d nicht gleich 1 sein (sonst würde die Gleichung nicht gelten), sodass man durch d – 1 teilen kann und erhält: $c = \frac{d+7}{d-1} = \frac{d-1+8}{d-1} = 1 + \frac{8}{d-1}$.
Da c und d positive ganze Zahlen sind, muss d – 1 ein Teiler von 8, also eine der Zahlen 1, 2, 4 bzw. 8 sein. Für d selbst kommen somit nur die Zahlen 2, 3, 5 bzw. 9 in Frage und für c ergeben sich durch Einsetzen der d-Werte die Zahlen 9, 5, 3 bzw. 2. Da 9 keine Primzahl ist, bleiben nur die beiden Fälle c = 3 und d = 5 bzw. c = 5 und d = 3.

Die vier Primzahlen können also nur 2, 3, 5 und 5 sein und tatsächlich gilt $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150 = 10 \cdot (2 + 3 + 5 + 5)$.

***2. Beweisvorschlag:***

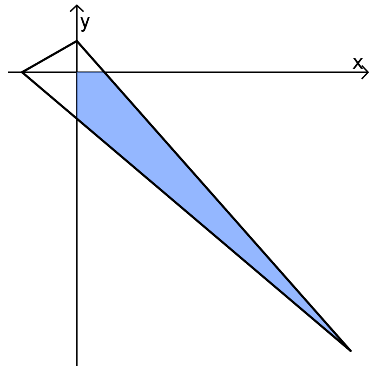
Wie im 1. Beweisvorschlag folgt mit Gleichung (1) o.B.d.A. a = 2 und b=5 und damit $c \cdot d = 2 + 5 + c + d$ (2). Wieder nehmen wir an, dass $c \leq d$ gilt.

Wir wollen zeigen, dass dann $c < 5$ sein muss. Wäre nämlich $c \geq 5$, dann würde aus (2) folgen: $5 \cdot d \leq c \cdot d = 2 + 5 + c + d \leq 7 + d + d = 7 + 2 \cdot d$ bzw. $3 \cdot d \leq 7$. Wegen $d \geq c \geq 5$ kann dass aber nicht sein.

Also ist $c < 5$ und es bleiben nur die Möglichkeiten $c = 2$ oder $c = 3$. Mit der Gleichung (2) ergibt sich daraus im ersten Fall $d = 9$, was keine Primzahl ist, und im zweiten Fall $d = 5$, was zur angegebenen Lösung führt.

## Aufgabe 4

*Zwei Eckpunkte eines Dreiecks liegen auf den Achsen eines Koordinatensystems, sein dritter Eckpunkt liegt im 4. Quadranten. Die Inhalte der auf den 1., 2. und 3. Quadranten entfallenden Teilflächen des Dreiecks verhalten sich wie 1:2:3.*
*Welcher Anteil der Dreiecksfläche liegt im 4. Quadranten?*

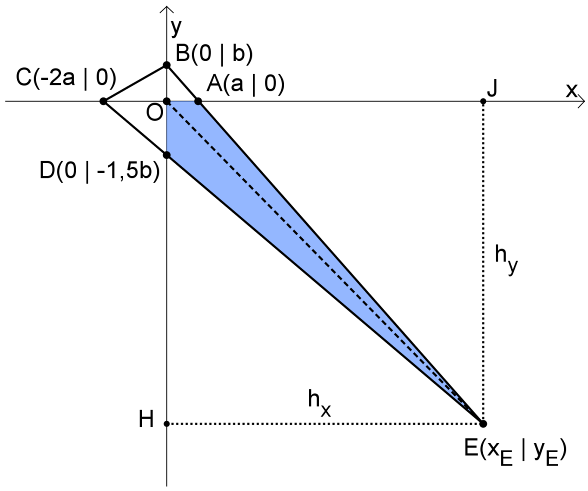



**Lösung:**

Im 4. Quadranten liegen 80% der Dreiecksfläche.

### 1. Beweisvorschlag:

Der Eckpunkt des Dreiecks im 4. Quadranten wird mit E bezeichnet, seine Koordinaten mit $x_E$ bzw. $y_E$. Es sind $x_E > 0$ und $y_E < 0$. Zusätzlich seien die Lotfußpunkte von E auf die x- und y-Achse mit J bzw. H bezeichnet. Die Längen der Lote sind dann $h_y = -y_E$ und $h_x = x_E$.




Der Eckpunkt des Dreiecks auf der y-Achse wird mit B bezeichnet, seine y-Koordinate mit b. Da das Dreieck Anteile in jedem der vier Quadranten besitzt, ist b > 0.
Der Schnittpunkt der Seite [BE] mit der x-Achse wird mit A bezeichnet, die x-Koordinate von A mit a. Aus $x_E > 0$ folgt a > 0.
Der Eckpunkt des Dreiecks auf der x-Achse wird mit C bezeichnet.
Da das Dreieck Anteile in jedem der vier Quadranten besitzt, ist die x-Koordinate von C kleiner als 0.
Der Schnittpunkt der Seite [CE] mit der y-Achse wird mit D bezeichnet. Aus $y_E < 0$ folgt, dass die y-Koordinate von D kleiner als 0 ist.
Da sich die Inhalte der Teildreiecke OAB und OBC wie 1 : 2 und die der Teildreiecke OBC und OCD wie 2 : 3 verhalten, verhalten sich die Längen der jeweiligen Grundlinien bei jeweils gleicher Höhe ebenfalls wie 1 : 2 bzw. 2 : 3. Deshalb hat C die Koordinaten (-2a | 0) und D hat die Koordinaten (0 | -1,5b).

Die Gerade BA hat dann die Gleichung $y = -\frac{b}{a} \cdot x + b$, die Gerade CD hat die Gleichung $y = -\frac{1{,}5\,b}{2a} \cdot x - 1{,}5\,b$.
Die x-Koordinate des Schnittpunkts E dieser beiden Geraden ergibt sich als Lösung der Gleichung $-\frac{b}{a} \cdot x_E + b = -\frac{1{,}5\,b}{2a} \cdot x_E - 1{,}5\,b$. Nach Multiplikation mit 2a und Division durch

b > 0 ergibt sich hieraus $-2 \cdot x_E + 2a = -1{,}5 \cdot x_E - 3a$ und nach weiterem Auflösen dann $x_E = 10a$. Setzt man dies in eine der beiden Geradengleichungen ein, so erhält man die y-Koordinate von E zu $y_E = -9b$.

Der Inhalt der im 4. Quadranten liegenden Teilfläche des Dreiecks CEB ergibt sich jetzt als Summe der Inhalte der Dreiecksflächen ODE und OEA zu

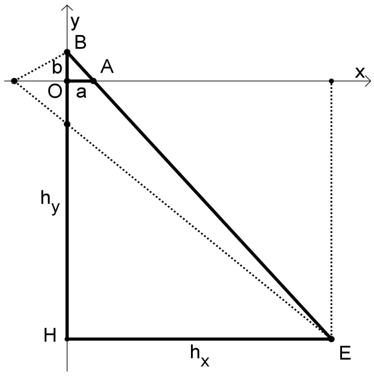
$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OD} \cdot h_x + \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot h_y = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5b \cdot 10a + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 9b = 12ab.$$

Der Gesamtflächeninhalt des Dreiecks BCE ist dann

$12ab + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 1{,}5b = 15ab$. Somit entfallen auf den 4. Quadranten

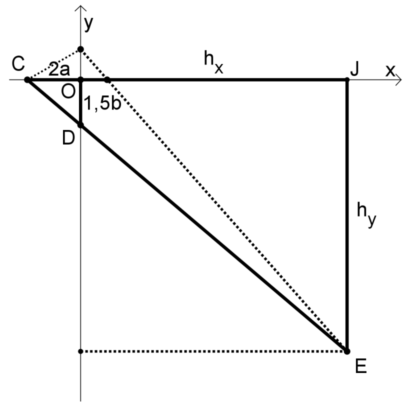
$\frac{12ab}{15ab} = 80\,\%$ der Dreiecksfläche von BCE.

### *2. Beweisvorschlag:*




Wie im 1. Beweisvorschlag werden die in der Zeichnung angegebenen Punkte mit ihren Koordinaten eingeführt.

Wendet man in der aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken BOA und BHE bestehenden Figur den Strahlensatz mit Zentrum B an, so ergibt sich $\frac{a}{b} = \frac{h_x}{b + h_y}$ (1).




Wendet man in der aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken CDO und CEJ bestehenden Figur den Strahlensatz mit Zentrum C an, so ergibt sich $\frac{1{,}5b}{2a} = \frac{h_y}{2a + h_x}$ (2).

Aus (1) folgt $h_x = \frac{a}{b} \cdot (b + h_y)$ (3). Setzt man dies in (2) ein und formt nach $h_y$ um, so erhält man zunächst

$\frac{1{,}5b}{2a} = \frac{h_y}{2a + \frac{a}{b} \cdot (b + h_y)} = \frac{h_y}{3a + \frac{a}{b} \cdot h_y}$ und daraus dann $1{,}5b \cdot \left(3a + \frac{a}{b} \cdot h_y\right) = 2a \cdot h_y$ bzw.

$4{,}5ab + 1{,}5a \cdot h_y = 2a \cdot h_y$ und schließlich $h_y = 9b$. Einsetzen in (3) liefert $h_x = 10a$. Also ist E(10a | -9b).

Wie im 1. Beweisvorschlag berechnet man hiermit den Anteil der Fläche des Dreiecks im 4. Quadranten zu 80%.

## Aufgabe 5

*Zwischen die Zahlen 4, 5, 6, …, n werden Plus- und Minuszeichen geschrieben. So entsteht ein Term.*
*Für welche Werte von n kann dieser Term den Wert 0 annehmen?*

**Lösung:**

Der Term kann den Wert 0 genau dann annehmen, wenn $n \geq 7$ ist und n durch 4 teilbar ist oder aber beim Teilen durch 4 den Rest 3 lässt, also Vorgänger einer durch 4 teilbaren Zahl ist.

### 1. Beweisvorschlag:

Für n = 4 lässt sich allein mit der Zahl 4 der Termwert 0 nicht erreichen. Sei also im Folgenden n > 4.

Lässt die Zahl n beim Teilen durch 4 den Rest 3, ist also n eine Zahl der Folge 7, 11, 15, …, dann ist die Anzahl der Zahlen in der Reihe 4, 5, 6, …, n durch 4 teilbar. Man kann dann die vorgegebenen Zahlen der Reihe nach in Vierergruppen zusammenfassen: {4, 5, 6, 7}, {8, 9, 10, 11}, …, {n-3, n-2, n-1, n}. Da von vier aufeinanderfolgenden Zahlen die beiden mittleren stets dieselbe Summe haben wie die erste und die letzte, kann man durch Setzen der Plus- und Minuszeichen innerhalb der Vierergruppen nach dem Muster „+ - - +“ in jeder Vierergruppe die Summe 0 erreichen und damit auch insgesamt:
$4-5-6+7+8-9-10+11+...+(n-3)-(n-2)-(n-1)+n=0$ .

Ist n durch 4 teilbar, ist n also ein Zahl der Folge 8, 12, 16, …, dann kann man die vorgegebenen Zahlen in eine Fünfergruppe und danach der Reihe nach in Vierergruppen aufeinanderfolgender Zahlen zusammenfassen: {4, 5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}, …, {n-3, n-2, n-1, n}. In der ersten Gruppe erreicht man die Summe 0 durch $4+5+6-7-8$ , innerhalb der Vierergruppen ergibt sich die Summe 0 wieder wie im vorherigen Fall. Insgesamt ist also auch in diesem Fall der Summenwert 0 möglich:
$4+5+6-7-8+9-10-11+12+...+(n-3)-(n-2)-(n-1)+n=0$

Ist umgekehrt ein Termwert 0 durch geeignetes Setzen der Plus- und Minuszeichen möglich, so kann man schrittweise jedes Minuszeichen vor einer Zahl k in ein Pluszeichen verwandeln, wodurch sich der Termwert um $2k$ , also eine gerade Zahl, erhöht. Nachdem man alle Minus- in Pluszeichen geändert hat, erhält man also die gerade Summe $4+5+6+...+(n-1)+n$. Die doppelte Summe der n – 3 Zahlen von 4 bis n

$$\begin{aligned} 2\cdot(4+5+...+(n-1)+n) &= \begin{array}{ccccccccc} 4+ & 5 & + & ... & + & (n-1) & + & n & + \\ n+ & (n-1) & + & ... & + & 5 & + & 4 & \end{array} \\ &= \underbrace{(4+n)+(5+(n-1))+...+(n-1+5)+(n+4)}_{n-3\ \text{Summanden}} \\ &= (n-3)\cdot(n+4) \end{aligned}$$

ist also durch 4 teilbar. Weil genau eine der beiden sich um 7 unterscheidenden Zahlen n-3 und n+4 gerade ist, kann das nur der Fall sein, wenn entweder n-3 oder n+4 durch 4 teilbar sind. Das entspricht genau den beiden schon behandelten Fällen.

In allen anderen Fällen, wenn also n beim Teilen durch 4 den Rest 1 oder 2 lässt, ist der Summenwert 0 nicht möglich.

### *2. Beweisvorschlag:*

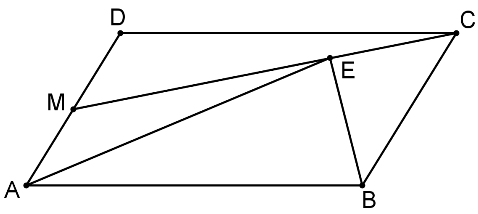
Wenn man den Summenwert 0 durch Setzen geeigneter Plus- und Minuszeichen erreichen kann, dann muss die Summe aller Zahlen, vor denen ein Minuszeichen steht gleich der Summe aller anderen Zahlen sein. Dann ist aber die Gesamtsumme $4+5+6+...+(n-1)+n$ eine gerade Zahl. Mit der Gaußschen Summenformel ist diese Gesamtsumme aber gleich $1+2+3+4+5+6+...+(n-1)+n-6=\frac{n\cdot(n+1)}{2}-6$. Somit muss auch $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ gerade sein, also $n\cdot(n+1)$ durch 4 teilbar sein. Weil genau eine der beiden aufeinanderfolgenden Zahlen n und n+1 gerade ist, muss also entweder n oder n+1 durch 4 teilbar sein.

Ist nun n+1 durch 4 teilbar, so ist die Anzahl n-3 der Zahlen in der Folge 4, 5, 6, …, n durch 4 teilbar. Dann kann man diese Zahlen zu einer geraden Anzahl an Paaren (nämlich $\frac{n-3}{2}$) mit gleicher Summe n + 4 zusammenfassen: {4, n}, {5, n-1}, {6,n-2}, {7, n-3}, ...
Setzt man nun vor die Zahlen der ersten Hälfte der Paare Pluszeichen und vor die übrigen Zahlen Minuszeichen, so erhält man als Wert des entstehenden Terms $\frac{n-3}{4}\cdot(n+4)-\frac{n-3}{4}\cdot(n+4)=0$.

Ist n durch 4 teilbar, dann kann man wie im 1. Beweisvorschlag zunächst mit den Zahlen der Gruppe {4,5,6,7,8} durch $4+5+6-7-8$ den Termwert 0 erreichen. Die Anzahl der übrigen aufeinanderfolgenden Zahlen 9, 10, …, n ist dann durch 4 teilbar und man kann wie im vorherigen Fall durch geeignetes Setzen von Plus- und Minuszeichen den Termwert 0 erreichen.

## *Aufgabe 6*

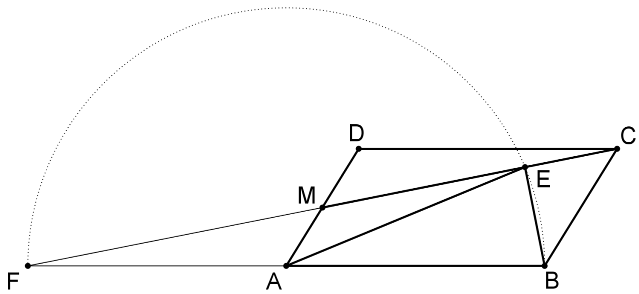
*Im Parallelogramm ABCD ist M der Mittelpunkt der Seite [DA] und E ein Punkt auf der Strecke [MC]. Beweise: Das Dreieck ABE ist genau dann gleichschenklig mit Basis [BE], wenn [BE] das Lot von B auf [MC] ist.*




### *1. Beweisvorschlag:*

Es sind zwei Beweisrichtungen zu zeigen.

Sei zunächst vorausgesetzt, dass [BE] das Lot von B auf [MC] ist.
Durch Verlängern der Strecke [CM] über M hinaus entsteht der Schnittpunkt F der beiden Geraden MC und AB.
Wir beweisen nun, dass $\overline{FA} = \overline{AB}$ gilt.




**Variante 1:** Aufgrund des Strahlensatzes mit Zentrum F ist

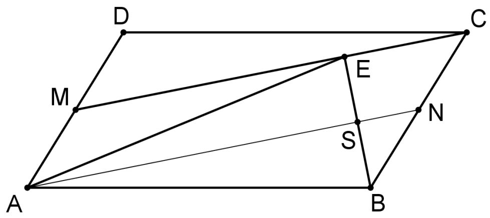
$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$, also $2 \cdot \overline{FA} = \overline{FB}$. Das bedeutet, dass $\overline{FA} = \overline{AB}$ gilt.

**Variante 2:** Die Dreiecke FAM und CDM sind kongruent, denn sie stimmen in der Seitenlänge $\overline{AM} = \overline{DM}$ sowie in den zwei anliegenden Winkeln $\sphericalangle FMA = \sphericalangle CMD$ (Scheitelwinkel) und $\sphericalangle MAF = \sphericalangle MDC$ (Wechselwinkel) überein (Kongruenzsatz wsw). Also gilt $\overline{FA} = \overline{DC} = \overline{AB}$.

Der Thaleskreis über der Strecke [FB] hat also den Mittelpunkt A und geht, weil $\sphericalangle FEB = 90°$ ist, nach Umkehrung des Satzes des Thales durch den Punkt E. Das bedeutet aber, dass $\overline{AE} = \overline{AB}$ ist. Das Dreieck ABE ist also gleichschenklig mit Basis [BE].

Sei jetzt vorausgesetzt, dass das Dreieck ABE gleichschenklig mit Basis [BE] ist.
Wie oben zeigt man, dass für den Schnittpunkt F der Geraden MC und AB gilt: $\overline{FA} = \overline{AB}$.
Zusammen mit der Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABE gilt dann sogar $\overline{AF} = \overline{AB} = \overline{AE}$.
Der Halbkreis über der Strecke [FB] hat also A als Mittelpunkt und geht durch den Punkt E. Nach Satz des Thales muss dann der Winkel $\sphericalangle FEB$ ein rechter Winkel sein. Das bedeutet aber, dass die Strecke [BE] Lot von B auf die Strecke [MC] ist.

## *2. Beweisvorschlag:*




Sei N der Mittelpunkt der Strecke [BC] und S der Schnittpunkt der Strecken [AN] und [BE].
Weil die beiden Strecken [AM] und [NC] parallel und gleich lang sind, ist das Viereck ANCM ein Parallelogramm. Daher ist [AN] parallel zu [MC], also auch [SN] parallel zu [EC]. Aufgrund des Strahlensatzes mit Zentrum B ist $\frac{\overline{BE}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BN}} = 2$ , also ist S der Mittelpunkt der Strecke [EB].
Das Dreieck ABE ist nun genau dann gleichschenklig mit Basis [BE], wenn die Seitenhalbierende [AS] Symmetrieachse des Dreiecks ist, also genau dann, wenn [AS] senkrecht auf [EB] steht. Dies wiederum ist aufgrund der Parallelität von [AS] und [MC] genau dann der Fall, wenn [EB] senkrecht auf [MC] steht, also das Lot von B auf [MC] ist.