16. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

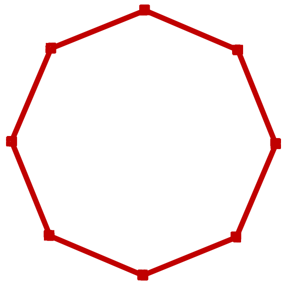
Lösungsbeispiele

für die Aufgaben der 1. Runde 2013/2014

Aufgabe 1

Wolfgang will die Zahlen 1, 2, 3, …, 8 an die Ecken eines Achtecks schreiben und jede Zahl einmal verwenden. Dabei soll die Summe von je zwei Zahlen, die an benachbarten Ecken stehen, eine Primzahl sein.

Welche Möglichkeiten hat Wolfgang, das Achteck so zu beschriften?



Lösung:

Wolfgang hat die folgenden beiden Möglichkeiten, wenn er einmal im Uhrzeigersinn das Achteck umläuft und bei 3 startet und endet: **3-8-5-6-7-4-1-2-3** oder **3-8-5-2-1-6-7-4-3**. Zusätzlich gibt es jeweils auch die umgekehrte Reihenfolge **3-2-1-4-7-6-5-8-3** bzw. **3-4-7-6-1-2-5-8-3**. Weitere Lösungen gibt es nicht.

Beweisvorschlag:

Aus einer Summentabelle kann man ablesen, welche Zahlen benachbart sein können:

+	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9
2	**3**	-	**5**	6	**7**	8	9	10
3	4	**5**	-	**7**	8	9	10	**11**
4	**5**	6	**7**	-	9	10	**11**	12
5	6	**7**	8	9	-	**11**	12	**13**
6	**7**	8	9	10	**11**	-	**13**	14
7	8	9	10	**11**	12	**13**	-	15
8	9	10	**11**	12	**13**	14	15	-

Die Primzahlen sind in der Tabelle fett markiert.
Der Zeile für 7 entnimmt man, dass nur 7+4 und 7+6 eine Primzahl ist. Also kann die 7 nur neben der 4 bzw. neben der 6 stehen. Es gilt also:
(*) Die 7 muss zwischen 4 und 6 stehen.
(**) Analog muss die 8 zwischen 3 und 5 stehen.

Wegen (**) gibt es also an den Ecken des Achtecks im Uhrzeigersinn die Abfolge 3-8-5 oder die Abfolge 5-8-3. Da wir später die umgekehrte Reihenfolge betrachten, können wir annehmen, dass die Abfolge 3-8-5 ist.

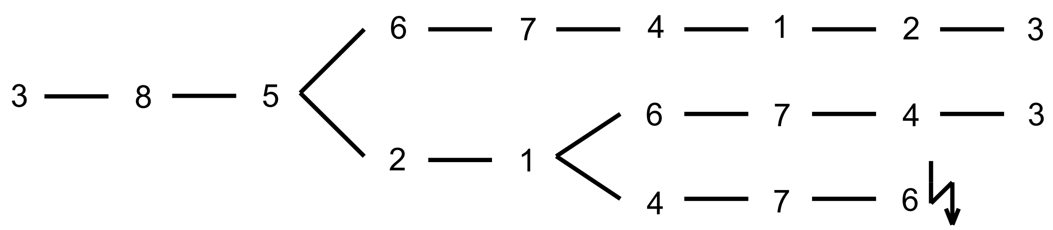
Aus der Tabelle ergibt sich, dass auf 5 nur 2, 6 oder 8 folgen kann. Da die 8 schon verwendet ist, gibt es also zwei Fälle: Entweder folgt 6 oder 2.
Fall 1: Auf 3-8-5 folgt 6, also 3-8-5-6. Da nach (*) 7 zwischen 4 und 6 stehen muss, muss nun 7 und dann 4 folgen. Wir haben also 3-8-5-6-7-4. Auf 4 kann aber nur 1, 3 oder 7 folgen, wobei 3 und 7 schon verwendet sind. Es muss also 1 folgen, wonach nur noch 2 übrig bleibt. Insgesamt ergibt sich also **3-8-5-6-7-4-1-2-3**.
Da auch die Summe am Ende (2+3=5) eine Primzahl ist, sind alle Bedingungen für die Beschriftung des Achtecks erfüllt.

Fall 2: Auf 3-8-5 folgt 2, also 3-8-5-2. Neben der 2 kann nun 1, 3 oder 5 stehen. Da 3 und 5 schon verwendet sind, muss nun 1 folgen. Nach der 1 kann man mit 2, 4 oder 6 fortfahren. Da 2 bereits verwendet ist, muss 4 oder 6 folgen.

Fall 2a: Die Abfolge ist 3-8-5-2-1-6. Da nach (*) 7 zwischen 4 und 6 stehen muss, ergibt sich die Abfolge **3-8-5-2-1-6-7-4-3**.
Auch hier sind alle Bedingungen erfüllt, es ist also eine zweite Möglichkeit.

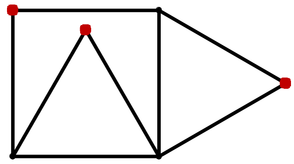
Fall 2b: Die Abfolge ist 3-8-5-2-1-4. Da nach (*) 7 zwischen 4 und 6 stehen muss, muss nun unbedingt die 7 folgen, dann die 6. Damit sind alle Zahlen verwendet. Somit ergibt sich 3-8-5-2-1-4-7-6-3. Dies ist aber keine korrekte Lösung, da 6+3=9 keine Primzahl ist. Somit tritt dieser Fall nicht ein.

Den Lösungsweg kann man kurz in einem Baumdiagramm veranschaulichen:



Beginnt die Abfolge mit 5-8-3 beim Umlauf im Uhrzeigersinn, so entsteht daraus die Abfolge 3-8-5 beim Umlauf entgegen dem Uhrzeigersinn. Nach dem obenstehenden Beweis muss die Abfolge entgegen dem Uhrzeigersinn also 3-8-5-6-7-4-1-2-3 oder 3-8-5-2-1-6-7-4-3 sein. Im Uhrzeigersinn ergibt sich also die umgekehrte Abfolge 3-4-7-6-1-2-5-8-3 bzw. 3-2-1-4-7-6-5-8-3.

Aufgabe 2



Die nebenstehende Figur besteht aus einem Quadrat und zwei gleichseitigen Dreiecken.
Liegen die drei fett markierten Punkte auf einer Geraden?

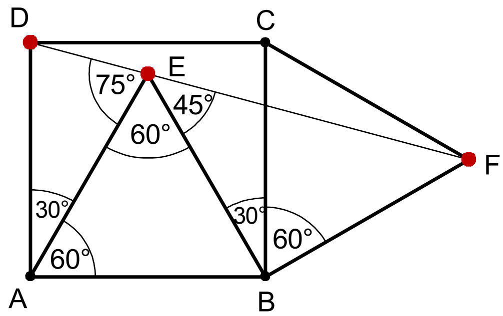
Lösung:

Die drei fett markierten Punkte liegen auf einer Geraden.

Vorbemerkung:

Zur Formulierung der Beweise bezeichnen wir die Ecken des Quadrates mit A, B, C und D, die dritte Ecke des gleichseitigen Dreiecks im Innern des Quadrates mit E und die dritte Ecke des gleichseitigen Dreiecks außerhalb des Quadrats mit F.

1. Beweisvorschlag (Winkel DEF ist ein gestreckter Winkel):



Weil die Dreiecke ABE und CBF gleichseitig sind, haben alle ihre Innenwinkel die Größe 60°.

Da die Innenwinkel im Quadrat alle 90° groß sind, ergibt sich $\sphericalangle EAD = 90° - 60° = 30°$

Da alle gegebenen Strecken gleich lang sind, ist insbesondere das Dreieck AED gleichschenklig mit Basis [DE].

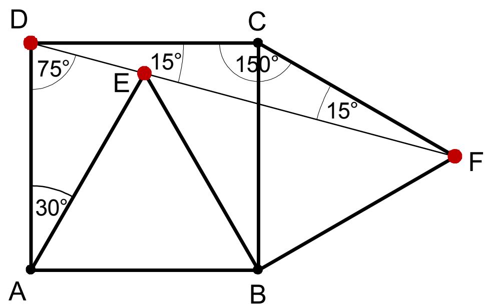
Aus dem Spitzenwinkel $\sphericalangle EAD = 30°$ berechnet man die Größe des Basiswinkels DEA zu $\sphericalangle DEA = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$.

Auch das Dreieck BFE ist gleichschenklig mit Basis [EF]. Die Größe seines Spitzenwinkels ist $\sphericalangle FBE = (90° - 60°) + 60° = 90°$. Die Größe des Basiswinkels BEF ist also $\sphericalangle BEF = 45°$.

Somit ergibt sich $\sphericalangle DEF = \sphericalangle DEA + \sphericalangle AEB + \sphericalangle BEF = 75° + 60° + 45° = 180°$.

Somit ist der Winkel DEF ein gestreckter Winkel und die Punkte D, E und F liegen auf einer Geraden.

2. Beweisvorschlag (die Winkel EDC und FDC sind gleich groß):



Nach Konstruktion ist das Dreieck CDF gleichschenklig mit Spitzenwinkel $\sphericalangle DCF = \sphericalangle DCB + \sphericalangle CBF = 90° + 60° = 150°$.

Also gilt für den Basiswinkel FDC:

$\sphericalangle FDC = \dfrac{180° - 150°}{2} = 15°$.

Das Dreieck AED ist gleichschenklig mit Basis [DE] und Spitzenwinkel $\sphericalangle EAD = 90° - 60° = 30°$.

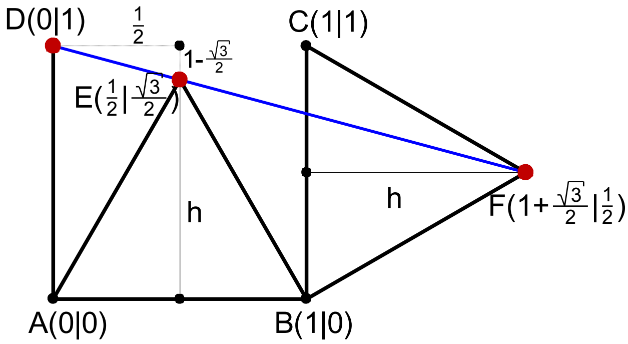
Hieraus berechnet man den Basiswinkel im Dreieck AED zu $\sphericalangle ADE=\frac{180°-30°}{2}=75°$.

Es folgt $\sphericalangle EDC=\sphericalangle ADC-\sphericalangle ADE=90°-75°=15°$.
Es ist also tatsächlich $\sphericalangle EDC=\sphericalangle FDC$. Somit liegen die Punkte D, E und F auf einer Geraden.

3. Beweisvorschlag (mit Koordinatensystem):

Wir legen die Figur so in ein Koordinatensystem, dass die Ecken des Quadrates die Koordinaten A(0|0), B(1|0), C(1|1) und D(0|1) haben.
Im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a hat die Höhe die Länge $\frac{\sqrt{3}}{2}$a, denn

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a .$$



Somit haben die Punkte E und F die Koordinaten $E(\frac{1}{2}|\frac{\sqrt{3}}{2})$ und $F(1+\frac{\sqrt{3}}{2}|\frac{1}{2})$.

Die Gerade DE hat die Steigung $-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right):\frac{1}{2}=-(2-\sqrt{3})=\sqrt{3}-2$, somit die Gleichung

$y=(\sqrt{3}-2)\cdot x+1$. Der Punkt $F(x_F|y_F) = F(1+\frac{\sqrt{3}}{2}|\frac{1}{2})$ liegt auf dieser Geraden, denn

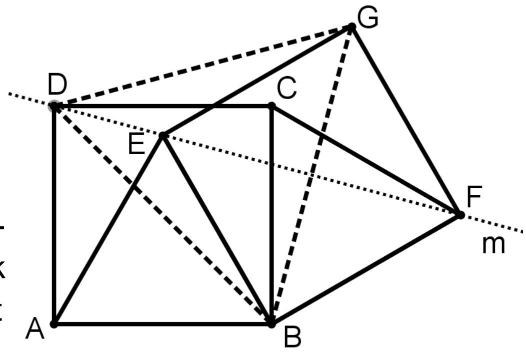
$$(\sqrt{3}-2)\cdot x_F+1=(\sqrt{3}-2)\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1=\sqrt{3}-2+\frac{3}{2}-\sqrt{3}+1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}=y_F .$$

Somit liegen die drei Punkte auf einer Geraden.

Bemerkung: *Es genügt bei dieser Vorgehensweise auch, die Gleichheit der Steigungen der beiden Geraden DE und DF nachzuweisen.*

4. Beweisvorschlag (mit Abbildungsgeometrie):

Bei der Drehung um 60° im Uhrzeigersinn um den Punkt B werden die Punkte A, C und D in dieser Reihenfolge auf die Punkte E, F bzw. G abgebildet. Das Dreieck DBG ist demnach gleichschenklig mit einem 60° Winkel bei B; es ist also sogar gleichseitig. Aus Symmetriegründen liegt D damit auf der Mittelsenkrechten m der Strecke [BG]. Weil das Viereck EBFG bei der genannten Drehung aus dem Quadrat ABCD hervorgeht, handelt es sich auch bei ihm um ein Quadrat. Die Diagonale [EF] dieses Quadrats steht senkrecht auf der zweiten Diagonale [BG] und halbiert diese. Also liegen auch E und F auf der Mittelsenkrechten m der Strecke [BG]. Damit liegen D, E und F auf der Geraden m.



Aufgabe 3

Josef addiert zwei zufällig ausgewählte dreistellige Zahlen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es dabei mindestens einen Übertrag?

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Übertrag ist $\frac{779}{900} \approx 86{,}6\%$.

1. Beweisvorschlag (Abzählen der Möglichkeiten):

Wir stellen uns dazu vor, dass Josef die beiden dreistelligen Zahlen übereinander schreibt, es gibt also eine obere Zahl (OZ) und eine untere Zahl (UZ).
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p kann man berechnen, indem man

- die Gesamtzahl G aller Möglichkeiten für die beiden Zahlen berechnet,
- die Anzahl A derjenigen Möglichkeiten für die beiden Zahlen bestimmt, bei denen ein Übertrag entsteht und
- den Quotienten $\frac{A}{G}$ berechnet.

Jede der beiden Zahlen kann eine der 900 Zahlen von 100 bis 999 sein. Deshalb ist $G = 900 \cdot 900 = 810000$.
Die Möglichkeiten, bei denen es einen Übertrag gibt, unterteilen sich in folgende drei Gruppen:

- ***1. Gruppe:*** *Es gibt einen Übertrag von der Einerstelle auf die Zehnerstelle.*
  Die Möglichkeiten für die Einerstellen der beiden Zahlen sind in folgender Tabelle zusammengefasst, wobei „Ü" für „Übertrag entsteht" steht, also für eine Summe größer oder gleich 10.

OZ / UZ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										Ü
2									Ü	Ü
3								Ü	Ü	Ü
4							Ü	Ü	Ü	Ü
5						Ü	Ü	Ü	Ü	Ü
6					Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü
7				Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü
8			Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü
9		Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü

  In genau 45 der insgesamt $10 \cdot 10 = 100$ Fälle für die beiden Einerziffern entsteht also ein Übertrag. Da es für die beiden Zehnerziffern ebenso insgesamt 100 Fälle gibt und für die beiden Hunderterziffern, weil führende Nullen nicht erlaubt sind, nur $9 \cdot 9 = 81$ Fälle, finden sich in dieser Gruppe also $45 \cdot 100 \cdot 81 =$ **364 500 Möglichkeiten** für Zahlenpaare aus oberer und unterer Zahl.

- ***2. Gruppe:*** *Es gibt keinen Übertrag von der Einerstelle zur Zehnerstelle, aber einen Übertrag von der Zehnerstelle zur Hunderterstelle.*
  Entsprechend obiger Tabelle gibt es in dieser Gruppe 100-45 = 55 Fälle für die Einerziffern der beiden Zahlen, bei denen kein Übertrag entsteht. Wegen des nicht vorhandenen Übertrags, beschreibt die gleiche Tabelle auch die Situation bei den Zehnerziffern, so dass es hier in 45 der 100 möglichen Fälle zu einem Übertrag kommt. Für die Hunderterziffern gibt es wieder 81 Fälle, was zu $55 \cdot 45 \cdot 81 =$ **200 475 Möglichkeiten** für Zahlenpaare aus oberer und unterer Zahl in dieser Gruppe führt.
- ***3. Gruppe:*** *Es gibt keinen Übertrag von der Einerstelle zur Zehnerstelle, keinen Übertrag von der Zehnerstelle zur Hunderterstelle, aber einen Übertrag von der Hunderterstelle auf die Tausenderstelle.*
  Genau wie oben gibt es dann 55 Fälle für die Einerziffern der beiden Zahlen, bei denen kein Übertrag entsteht und ebenso 55 Fälle für die Zehnerziffern der beiden Zahlen, bei denen kein Übertrag entsteht. Wie untenstehende Tabelle zeigt, gibt es dann in genau 45 der 81 möglichen Fälle für die Hunderterziffern der beiden Zahlen einen Übertrag.

OZ / UZ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									Ü
2								Ü	Ü
3							Ü	Ü	Ü
4						Ü	Ü	Ü	Ü
5					Ü	Ü	Ü	Ü	Ü
6				Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü
7			Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü
8		Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü
9	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü	Ü

Somit besteht diese Gruppe aus $55 \cdot 55 \cdot 45 =$ **136 125 Zahlenpaaren**.

Insgesamt erhält man damit A = 364 500 + 200 475 + 136 125 = 701 100.

Schließlich kann man nun die gesuchte Wahrscheinlichkeit p berechnen:

$$p = \frac{A}{G} = \frac{701100}{810000} = \frac{779}{900}.$$

2. Beweisvorschlag (über Gegenereignis und Baumdiagramm):

Wenn es **nicht** mindestens einen Übertrag gibt, so gibt es keinen einzigen Übertrag – weder an der Einerstelle, noch an der Zehnerstelle oder der Hunderterstelle.

Wahrscheinlichkeit für keinen Übertrag bei der Einerziffer

Entsprechend der Tabelle aus dem ersten Beweis gibt es in 55 der 100 möglichen Fälle für die beiden Einerziffern keinen Übertrag.

Die Wahrscheinlichkeit für keinen Übertrag ist hier also $\frac{55}{100} = \frac{11}{20}$.

Wahrscheinlichkeit für keinen Übertrag bei der Zehnerziffer unter der Voraussetzung, dass es keinen Übertrag bei der Einerziffer gibt

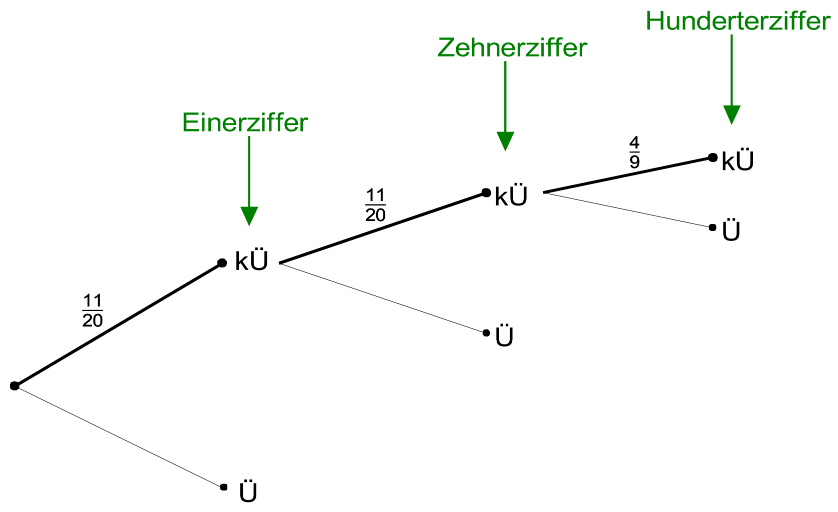
Wenn es keinen Übertrag bei der Einerziffer gibt, so ist die Situation bei der Zehnerziffer völlig analog wie bei der Einerziffer. Es gibt also 100 Möglichkeiten für die beiden Zehnerziffern, in 55 dieser 100 Möglichkeiten gibt es keinen Übertrag bei der Zehnerziffer. Die Wahrscheinlichkeit für keinen Übertrag ist also wieder $\frac{55}{100} = \frac{11}{20}$.

Wahrscheinlichkeit für keinen Übertrag bei der Hunderterziffer unter der Voraussetzung, dass es keinen Übertrag bei der Zehnerziffer gibt

Wie der Tabelle für die Hunderterziffern aus dem 1. Beweisvorschlag zu entnehmen ist, gibt es in diesem Fall in 81- 45 = 36 von 81 Fällen keinen Übertrag.

Die Wahrscheinlichkeit für keinen Übertrag ist also hier $\frac{36}{81} = \frac{4}{9}$.

Das Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten hat somit folgende Gestalt:



Die Wahrscheinlichkeit für keinen einzigen Übertrag ist also nach 1. Pfadregel $\frac{11}{20}\cdot\frac{11}{20}\cdot\frac{4}{9}=\frac{121}{900}$.

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Übertrag ist demnach $1-\frac{121}{900}=\frac{779}{900}\approx 86{,}6\%$.

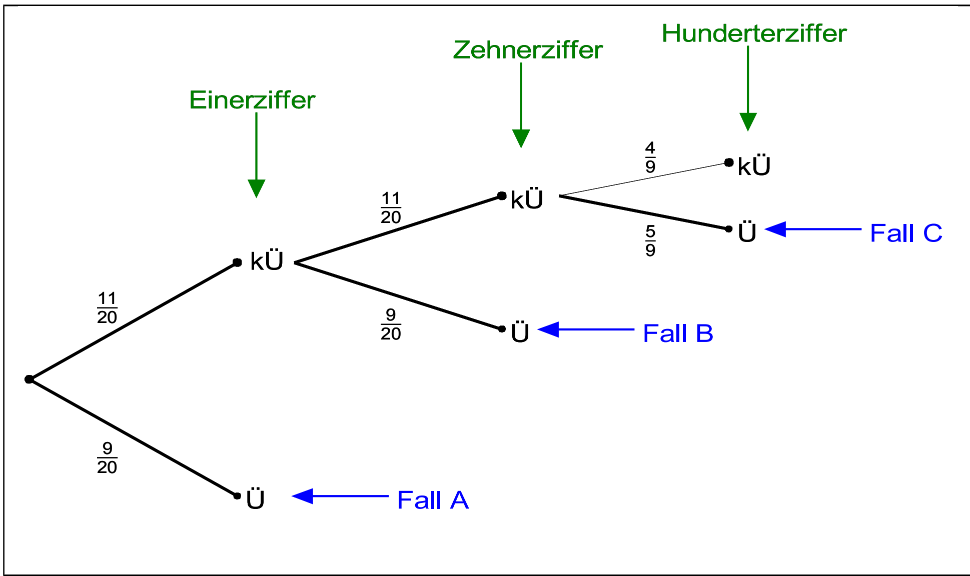
3. Beweisvorschlag (mit verkürztem Baumdiagramm):

Wenn es mindestens einen Übertrag gibt, so gibt es die folgenden drei Fälle:
Fall A: Es gibt einen Übertrag bei den Einerziffern.

Fall B: Es gibt keinen Übertrag bei den Einerziffern, aber einen Übertrag bei den Zehnerziffern.

Fall C: Es gibt keinen Übertrag bei den Einerziffern und den Zehnerziffern, aber einen Übertrag bei den Hunderterziffern.

Das zugehörige Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten wie im 2. Beweisvorschlag hat folgende Gestalt:



Fall A hat die Wahrscheinlichkeit

$1-\frac{11}{20}=\frac{9}{20}$,

Fall B hat nach Pfadregel die Wahrscheinlichkeit

$\frac{11}{20}\cdot\frac{9}{20}=\frac{99}{400}$,

Fall C die Wahrscheinlichkeit

$\frac{11}{20}\cdot\frac{11}{20}\cdot\frac{5}{9}=\frac{121}{720}$.

Die Fälle A, B und C schließen sich gegenseitig aus, die Gesamtwahrscheinlichkeit für mindestens einen Übertrag ist also nach der 2. Pfadregel die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die drei Fälle: $\frac{9}{20}+\frac{99}{400}+\frac{121}{720}=\frac{779}{900}$.

Bemerkung: Grundsätzlich ist die Wahrscheinlichkeit für einen Übertrag bei der Einerstelle nicht gleich der Wahrscheinlichkeit für einen Übertrag bei der Zehnerstelle.

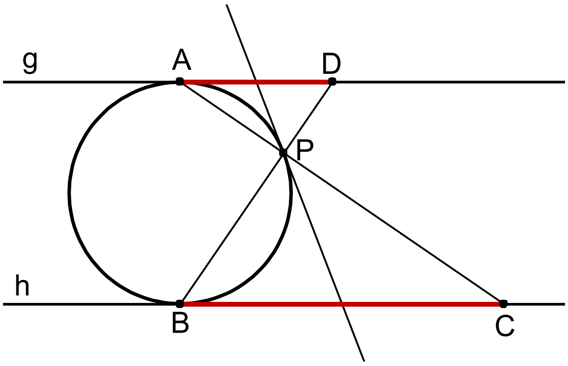
Erstere ist, wie im 3. Beweisvorschlag gezeigt, gleich $\frac{9}{20}$.

Ein Übertrag bei der Zehnerstelle entsteht, wie im 3. Beweisvorschlag gesehen, in $\frac{9}{20}$ der Fälle, in denen kein Übertrag an der Einerstelle entsteht (Wahrscheinlichkeit: $\frac{11}{20}$), aber eventuell auch, wenn ein Übertrag bei der Einerstelle (dieser muss 1 sein) vorhanden ist. Hier muss die Summe der beiden Zehnerziffern dann nur noch mindestens gleich 9 sein, damit ein Übertrag entsteht und das geschieht in 55 der 100 Fälle, also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{11}{20}$. Nach den Pfadregeln ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für einen Übertrag an der Zehnerstelle also zu $\frac{11}{20}\cdot\frac{9}{20}+\frac{9}{20}\cdot\frac{11}{20}=\frac{99}{200}$ und dies ist größer als die Wahrscheinlichkeit eines Übertrags bei der Einerstelle.

Bezeichnen E und Z die Ereignisse eines Übertrags bei der Einer- bzw. Zehnerstelle, so gilt also nicht P(E) = P(Z), wohl aber $P(E) = P_{\bar{E}}(Z)$ mit der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_{\bar{E}}(Z)$ eines Übertrages bei der Zehnerstelle voraussetzt, es gibt keinen Übertrag bei der Einerstelle.

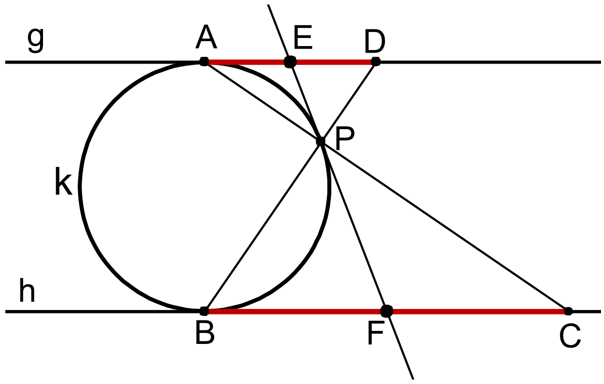
Aufgabe 4

Ein Kreis berührt die Parallelen g und h in den Punkten A und B. Zwei Verbindungsstrecken [AC] und [BD] der Parallelen schneiden sich auf dem Kreis im Punkt P.
Zeige: Die Kreistangente durch P halbiert die Strecken [AD] und [BC].



1. Beweisvorschlag (mit Tangentenabschnitten):

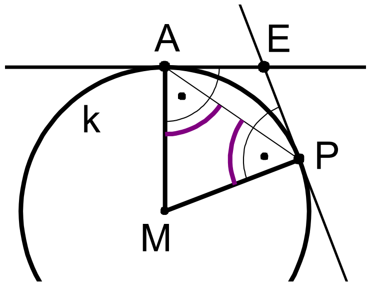
Sei E der Schnittpunkt der Tangente mit g,
F der Schnittpunkt der Tangente mit h.
Die Gerade g ist vom Punkt E aus eine Tangente an den Kreis k, der Punkt A ist der Berührpunkt dieser Tangente. Man nennt daher [EA] bekanntlich einen *Tangentenabschnitt*. Ebenso sind [EP], [FP] und [FB] Tangentenabschnitte.



Da Tangentenabschnitte von einem äußeren Punkt an einen Kreis k gleich lang sind (ein Beweis dieser Aussage ist zwar nicht erforderlich, wird der Vollständigkeit halber aber am Ende dieses Beweisvorschlages angefügt), gelten:
$\overline{EA}=\overline{EP}$ (1) und
$\overline{FB}=\overline{FP}$ (2).
Nach (2) ist das Dreieck FPB gleichschenklig. Folglich ist $\sphericalangle FBP=\sphericalangle BPF$.
Nun ist aber $\sphericalangle FBP=\sphericalangle EDP$ (Wechselwinkel an den Parallelen g und h) und
$\sphericalangle BPF=\sphericalangle DPE$ (Scheitelwinkel bei P).
Damit hat das Dreieck PDE gleich große Winkel bei D und P, ist also gleichschenklig mit Basis [PD]. Hieraus folgt $\overline{EP}=\overline{ED}$ (3).
Aus (1) und (3) folgt nun sofort $\overline{EA}=\overline{ED}$, d.h. E halbiert die Strecke [AD].

Nach (1) ist das Dreieck PEA gleichschenklig. Folglich ist $\sphericalangle EPA=\sphericalangle PAE$.
Nun ist aber $\sphericalangle PAE=\sphericalangle PCF$ (Wechselwinkel an den Parallelen g und h) und
$\sphericalangle EPA=\sphericalangle FPC$ (Scheitelwinkel bei P).
Damit hat das Dreieck PFC gleich große Winkel bei C und P, ist also gleichschenklig mit Basis [PC]. Hieraus folgt $\overline{FP}=\overline{FC}$ (4).
Aus (2) und (4) folgt nun sofort $\overline{FB}=\overline{FC}$, d.h. F halbiert die Strecke [BC].

Beweis der Gleichheit von Tangentenabschnitten:

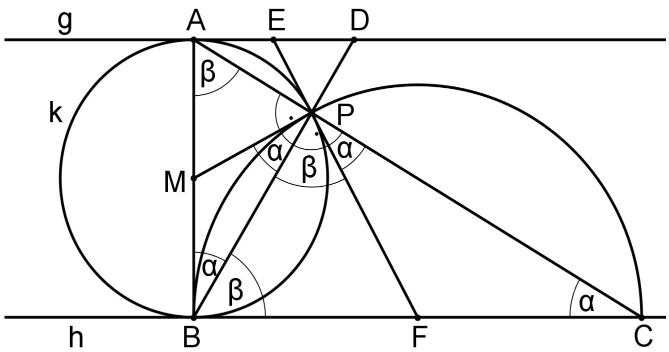


Wir beweisen die Behauptung für die beiden Tangentenabschnitte [EA] und [EP].
Da A und P auf dem Kreis k um den Mittelpunkt M liegen, ist das Dreieck MPA gleichschenklig. Somit sind die Basiswinkel $\sphericalangle APM$ und $\sphericalangle MAP$ gleich groß. Da [MA] ein Radius des Kreises ist und [EA] ein Tangentenabschnitt, stehen [EA] und [MA] senkrecht aufeinander.
Folglich ist $\sphericalangle EPA = 90° - \sphericalangle APM$. Analog ist $\sphericalangle PAE = 90° - \sphericalangle MAP$. Somit gilt $\sphericalangle EPA = \sphericalangle PAE$. Daher ist das Dreieck PEA gleichschenklig. Folglich sind die beiden Schenkel [EA] und [EP] gleich lang und die Behauptung ist bewiesen.

Variante des 1. Beweisvorschlags (mit Strahlensatz):

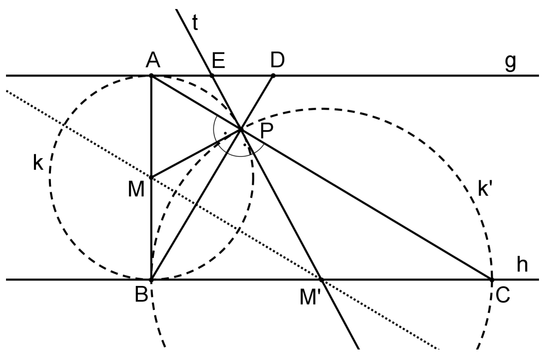
Genau wie im 1. Beweis folgen die Gleichheiten der Tangentenabschnitte $\overline{EA} = \overline{EP}$ und $\overline{FB} = \overline{FP}$. Aus dem Strahlensatz mit Zentrum P und den beiden parallelen Geraden g und h folgt dann weiter $\frac{\overline{ED}}{\overline{EP}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FP}} = 1$, also $\overline{ED} = \overline{EP}$ und ebenso $\frac{\overline{FC}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EP}} = 1$, also $\overline{FC} = \overline{FP}$. Insgesamt ist deswegen $\overline{EA} = \overline{ED}$ und $\overline{FB} = \overline{FC}$, was zu zeigen war.

2. Beweisvorschlag (mit Satz des Thales):



Da g und h parallele Tangenten an den Kreis k sind und A, B die zugehörigen Berührpunkte, ist [AB] ein Durchmesser des Kreises k. Nach dem Satz des Thales ist $\sphericalangle APB = 90°$. Somit ist auch $\sphericalangle BPC = 90°$, denn C liegt auf AP. Also liegt auch P auf dem Thaleskreis über [BC].
Da EF als Tangente senkrecht auf dem Radius [MP] steht, ist auch $\sphericalangle MPF = 90°$.
Das Dreieck MBP ist gleichschenklig, also $\alpha = \sphericalangle PBM = \sphericalangle MPB$.
Es folgt $\beta = 90° - \alpha = \sphericalangle BPF = \sphericalangle FBP$. Somit ist auch Dreieck BFP gleichschenklig.
Ebenso $\alpha = 90° - \beta = \sphericalangle FPC = \sphericalangle PCF$. Also ist auch Dreieck PFC gleichschenklig.
Somit $\overline{FC} = \overline{FP} = \overline{FB}$ und F halbiert [BC]. Analog halbiert E die Strecke [AD].

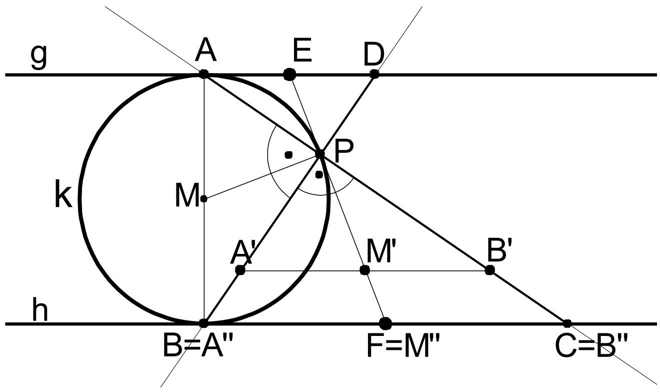
3. Beweisvorschlag (mit Symmetrie):



Wie im 2. Beweisvorschlag gezeigt liegt P auf dem Thaleskreis k über [AB] und auf dem Thaleskreis k‘ über [BC].
Die Kreise k und k‘ und ihre Schnittpunkte B und P sind bezüglich der Geraden MM‘ durch die beiden Kreismittelpunkte M und M‘ symmetrisch. Deshalb

sind auch die beiden Tangenten h und t, die k in B bzw. P berühren, bezüglich dieser Symmetrieachse symmetrisch. Sie schneiden sich folglich auf dieser Symmetrieachse. Der Schnittpunkt von h und MM‘ ist aber M‘.
Deshalb verläuft auch die Tangente t durch M‘, den Mittelpunkt der Strecke [BC].
Analog zeigt man, dass t auch die Strecke [AD] halbiert.

4. Beweisvorschlag (mit Drehstreckung):



Da [AB] ein Durchmesser des Kreises k ist, ist [AP] nach dem Satz des Thales senkrecht zu [BP].
Dreht man das Dreieck ABP gegen den Uhrzeigersinn um P um 90°, so liegt also der Bildpunkt A‘ von A auf der Geraden BP, ebenso liegt B‘ auf AP = PC.
Da [MP] ein Radius ist, ist die Tangente EF senkrecht zu [MP]. Also liegt der Bildpunkt M‘ von M auf EF.
Da AB senkrecht zu BC ist, ist A‘B‘ parallel zu BC. Durch eine zentrische Streckung mit Zentrum P geht [A‘B‘] in [BC] über, d.h. A‘‘ = B, B‘‘ = C. Die Gerade EF durch P geht durch diese Streckung in sich über, der Punkt M‘ auf A‘B‘ wird also auf F abgebildet, d.h. M‘‘ = F.
Da M der Mittelpunkt von [AB] ist, ist M‘ der Mittelpunkt von [A‘B‘] und nach der zentrischen Streckung M‘‘ der Mittelpunkt auf [A‘‘B‘‘]. Also ist F der Mittelpunkt von [BC].
Analog ist E der Mittelpunkt von [AD].

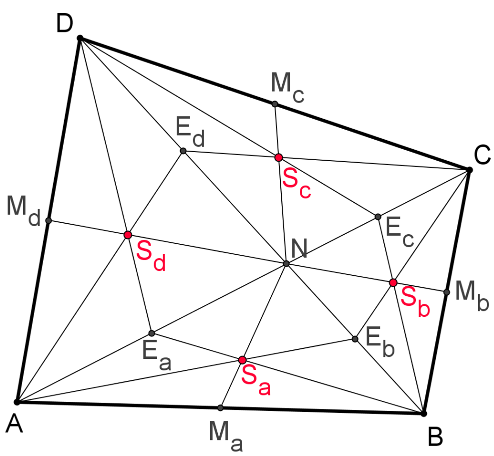
Aufgabe 5

Die Diagonalen eines konvexen Vierecks zerlegen dieses in vier Teildreiecke. Die Schwerpunkte dieser Teildreiecke bilden ein neues Viereck.

Welcher Anteil der ursprünglichen Vierecksfläche wird durch das neue Viereck überdeckt?

Lösung:

Der Flächeninhalt des neuen Vierecks beträgt $\frac{2}{9}$ des Flächeninhalts des ursprünglichen Vierecks.

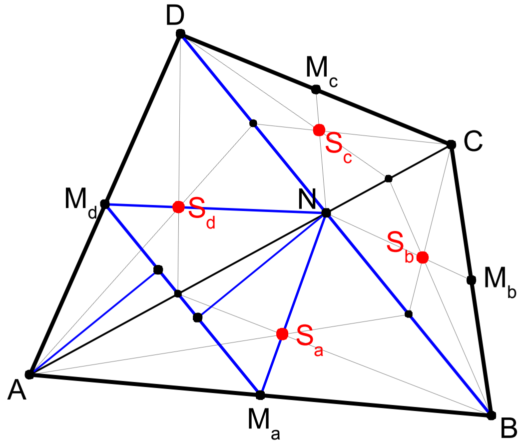


Beweisvorschlag 1:

Wir bezeichnen

- die Eckpunkte des Ausgangsvierecks mit A, B, C, D,
- die Mittelpunkte seiner Seiten mit M_a, M_b, M_c, M_d,
- den Diagonalenschnittpunkt mit N,

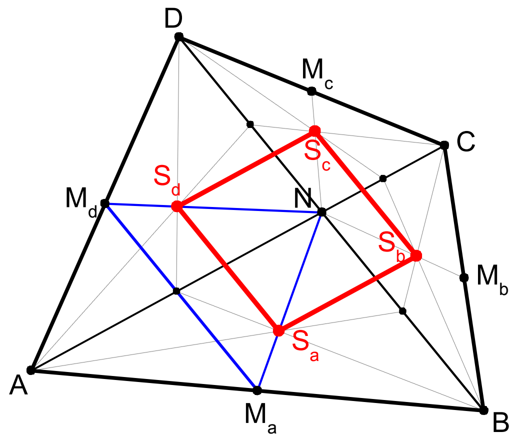
- die Mittelpunkte der Diagonalenabschnitte mit E_a, E_b, E_c, E_d,
- die Schwerpunkte der Dreiecke mit
  S_a, S_b, S_c, S_d.
  Diese Schwerpunkte sind bekanntlich die Schnittpunkte der Seitenhalbierenden der jeweiligen Dreiecke. Diese Seitenhalbierenden sind in der nebenstehenden Abbildung dünn eingezeichnet.



M_a und M_d sind die Mittelpunkte der Seiten [AB] bzw. [AD]. Deshalb ist $[M_aM_d]$ die Mittelparallele im Dreieck ABD. Da N auf der Diagonalen [BD] liegt, haben A und N von M_aM_d den gleichen Abstand. Insbesondere sind also die jeweiligen Höhen zur Grundseite $[M_aM_d]$ in den Dreiecken AM_aM_d und NM_dM_a gleich lang.

Daraus folgt für die Flächeninhalte:

$$F_{AM_aM_d} = F_{NM_dM_a} = \frac{1}{2} \cdot F_{AM_aNM_d} \quad (*).$$



S_a und S_d sind die Schwerpunkte der Dreiecke ABN bzw. AND.
Bekanntlich teilen die Schwerpunkte die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2.
Das bedeutet: $\overline{NS_a} = \frac{2}{3} \cdot \overline{NM_a}$ und $\overline{NS_d} = \frac{2}{3} \cdot \overline{NM_d}$.

Nach der Umkehrung des Strahlensatzes ist demnach $[S_aS_d]$ parallel zu $[M_aM_d]$.
Somit ist nach dem Strahlensatz $\overline{S_aS_d} = \frac{2}{3} \cdot \overline{M_aM_d}$. Das Dreieck S_aNS_d entsteht also aus dem Dreieck M_aNM_d durch eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $k = \frac{2}{3}$.

Folglich ist $F_{S_aNS_d} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot F_{M_aNM_d}$.

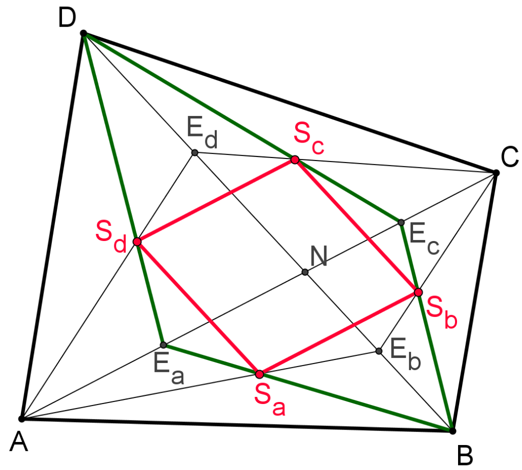
Mit (*) erhält man damit: $F_{S_aNS_d} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot F_{AM_aNM_d} = \frac{2}{9} \cdot F_{AM_aNM_d}$.

Analog ergibt sich für die drei anderen Teilvierecke des Ausgangsvierecks:

$$F_{S_bNS_a} = \frac{2}{9} \cdot F_{BM_bNM_a} \text{ , } F_{S_cNS_b} = \frac{2}{9} \cdot F_{CM_cNM_b} \text{ und } F_{S_dNS_c} = \frac{2}{9} \cdot F_{DM_dNM_c} \text{ .}$$

Da $F_{S_aS_bS_cS_d} = F_{S_aNS_d} + F_{S_bNS_a} + F_{S_cNS_b} + F_{S_dNS_c}$ und $F_{ABCD} = F_{AM_aNM_d} + F_{BM_bNM_a} + F_{CM_cNM_b} + F_{DM_dNM_c}$ folgt: $F_{S_aS_bS_cS_d} : F_{ABCD} = 2:9$. Dies war zu zeigen.

Beweisvorschlag 2:



Wie im ersten Beweisvorschlag folgt, da $\overline{DS_d}=\frac{2}{3}\overline{DE_a}$, $\overline{DS_c}=\frac{2}{3}\overline{DE_c}$, $\overline{BS_a}=\frac{2}{3}\overline{BE_a}$ und $\overline{BS_b}=\frac{2}{3}\overline{BE_c}$ ist, dass der Flächeninhalt des Dreiecks S_dS_cD genau $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ des Flächeninhalts des Dreiecks E_aE_cD und der Flächeninhalt des Dreiecks S_bS_aB genau $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ des Flächeninhalts des Dreiecks E_cE_aB betragen. Die Flächeninhalte der beiden Dreiecke S_dS_cD und S_bS_aB betragen zusammen also $\frac{4}{9}$ des Flächeninhalts des Vierecks E_aBE_cD.

Analog folgt, da $\overline{E_aS_d}=\frac{1}{3}\overline{E_aD}$, $\overline{E_aS_a}=\frac{1}{3}\overline{E_aB}$, $\overline{E_cS_b}=\frac{1}{3}\overline{E_cB}$ und $\overline{E_cS_c}=\frac{1}{3}\overline{E_cD}$ ist, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $S_aS_dE_a$ genau $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ des Flächeninhalts des Dreiecks BDE_a und der Flächeninhalt des Dreiecks $S_cS_bE_c$ genau $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ des Flächeninhalts des Dreiecks DBE_c betragen. Die Flächeninhalte der beiden Dreiecke $S_aS_dE_a$ und $S_cS_bE_c$ betragen zusammen also $\frac{1}{9}$ des Flächeninhalts des Vierecks E_aBE_cD.

Für den Flächeninhalt des Vierecks $S_aS_bS_cS_d$ verbleiben deshalb $1-\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$ des Flächeninhalts des Vierecks E_aBE_cD.

Da E_a und E_c Mittelpunkte der Diagonalenabschnitte [AN] und [CN] des Vierecks ABCD sind, ist $[E_aE_c]$ halb so lang wie [AC]. Somit sind die Flächeninhalte der Dreiecke E_aE_cD und E_cE_aB jeweils genau halb so groß, wie die Flächeninhalte der beiden Dreiecke ACD bzw. CAB, da sie jeweils zwar dieselbe Höhe, aber nur halb so große Grundseite $[E_aE_c]$ haben. Somit ist auch der Flächeninhalt des Vierecks E_aBE_cD halb so groß wie der des Vierecks ABCD.

Deshalb beträgt der Flächeninhalt des Vierecks $S_aS_bS_cS_d$ genau $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$ des Flächeninhalts des Vierecks ABCD.

Aufgabe 6

Zeige: Bildet man von fünf verschiedenen natürlichen Zahlen alle möglichen positiven Differenzen je zweier dieser Zahlen, so ist das Produkt aller Differenzen durch 288 teilbar.

Vorbemerkung:

Angenommen zwei natürliche Zahlen a und b lassen bei der Division durch 4 den gleichen Rest. Dann ist die Differenz a – b durch 4 teilbar.
Genauso ist a – b durch 3 teilbar, wenn a und b bei Division durch 3 den gleichen Rest lassen.

Beweis der Vorbemerkung:

Angenommen a und b lassen bei der Division durch 4 den Rest r (als Rest ist hier 0, 1, 2 oder 3 möglich). Dann ist $a = 4\cdot m+r$ und $b = 4\cdot n+r$ mit nicht negativen ganzen Zahlen m und r. Somit ist $a - b = (4m+r) - (4n+r) = 4\cdot(m-n)$.
Also ist a – b durch 4 teilbar. Analog ist der Beweis für 3.

1. Beweisvorschlag:

Es ist $288 = 2^5 \cdot 3^2 = 32 \cdot 9$. Da 32 und 9 teilerfremd sind, genügt es zu zeigen, dass das Produkt der positiven Differenzen der fünf Zahlen durch 32 und durch 9 teilbar ist.

Schritt 1: ***Das Produkt ist durch 32 teilbar.***

Fall 1: *Mindestens vier der fünf gegebenen Zahlen sind ungerade.*
Diese vier ungeraden Zahlen seien a,b,c,d mit $a<b<c<d$. Da die Differenz zwischen zwei ungeraden Zahlen gerade ist, sind alle Differenzen zwischen diesen vier ungeraden Zahlen gerade. Die positiven Differenzen sind die folgenden sechs Differenzen:

$$d-a,\ d-b,\ d-c,\ c-a,\ c-b,\ b-a.$$

Da sie alle gerade sind ist ihr Produkt sogar durch $2^6 = 64$ teilbar und damit auch das Produkt aller positiven Differenzen der fünf Zahlen.

Fall 2: *Drei der fünf gegebenen Zahlen sind ungerade, die beiden anderen Zahlen sind gerade.*
Die drei ungeraden Zahlen seien a,b,c mit $a<b<c$. Die beiden geraden Zahlen seien d und e mit $d<e$. Die positiven Differenzen c–b, c–a, b–a sowie e–d sind wie in Fall 1 alle gerade.
Da a, b und c ungerade sind, lassen sie bei der Division durch 4 entweder den Rest 1 oder den Rest 3. Da es also für a,b,c nur zwei mögliche Reste gibt, kommt ein Rest doppelt vor, d.h. zwei der drei Zahlen lassen beim Teilen durch 4 denselben Rest. Die Differenz dieser beiden Zahlen ist dann nach Vorbemerkung durch 4 teilbar.

Die vier Differenzen c–b, c–a, b–a, e–d sind also alle gerade, zusätzlich ist mindestens eine der Differenzen sogar durch 4 teilbar. Somit ist das Produkt $(c-b)\cdot(c-a)\cdot(b-a)\cdot(e-d)$ durch $4\cdot2\cdot2\cdot2 = 32$ teilbar.

Fall 3: *Drei der fünf gegebenen Zahlen sind gerade, die beiden anderen Zahlen sind ungerade.*
Auch in diesem Fall ist das Produkt der Differenzen analog zu Fall 2 durch 32 teilbar, die Rolle der geraden und ungeraden Zahlen wird nur vertauscht, was für die Differenzen keine Rolle spielt.

Fall 4: *Mindestens vier der fünf gegebenen Zahlen sind gerade.*
Auch in diesem Fall ist das Produkt der Differenzen analog zu Fall 1 durch $2^6 = 64$ teilbar, da auch die Differenz zwischen zwei geraden Zahlen gerade ist.

Da offenbar alle möglichen Fälle erfasst wurden, ist damit Schritt 1 bewiesen.

Schritt 2: ***Das Produkt ist durch 9 teilbar.***

Als Reste bei der Division einer Zahl durch 3 sind 0, 1 oder 2 möglich. Bei fünf gegebenen Zahlen gibt es also für die Reste bei ihrer Division durch 3 zwei Möglichkeiten: Entweder haben mindestens drei der fünf Zahlen bei Division durch 3 denselben Rest. Oder bei Division durch 3 kommen zwei Reste doppelt vor, der dritte Rest kommt noch einmal vor.

Fall 1: *Bei Division der fünf gegebenen Zahlen durch 3 kommt ein Rest mindestens dreimal vor.*
Seien a,b,c drei der gegebenen Zahlen ($a<b<c$), die bei Division durch 3 denselben Rest lassen. Dann sind nach Vorbemerkung alle Differenzen dieser drei Zahlen durch 3 teilbar. Somit ist das Produkt $(c-b)\cdot(c-a)\cdot(b-a)$ sogar durch $3\cdot3\cdot3=27$ teilbar.

Fall 2: *Bei Division der fünf gegebenen Zahlen durch 3 kommen zwei Reste doppelt vor, der dritte Rest kommt einmal vor.*
Die Zahlen a und b ($a<b$) lassen bei Division durch 3 denselben Rest, ebenso die Zahlen c und d ($c<d$). Dann sind nach Vorbemerkung die Differenzen b–a und d–c durch 3 teilbar. Somit ist das Produkt $(b-a)\cdot(d-c)$ durch $3\cdot3=9$ teilbar.

In jedem Fall ist das Produkt der positiven Differenzen der fünf gegebenen Zahlen also durch 9 teilbar.

Damit ist auch Schritt 2 bewiesen und der gesamte Beweis abgeschlossen.

2. Beweisvorschlag:

Ohne Einschränkung sind die fünf Zahlen mit a_1, a_2, a_3, a_4 und a_5 bezeichnet und der Größe nach geordnet: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$.

Als positive Differenzen ergeben sich die folgenden 10 Zahlen:
$a_5–a_1$, $a_5–a_2$, $a_5–a_3$, $a_5–a_4$, $a_4–a_1$, $a_4–a_2$, $a_4–a_3$, $a_3–a_1$, $a_3–a_2$, $a_2–a_1$.
Es soll nun gezeigt werden, dass ihr Produkt durch $288 = 2^5 \cdot 3^2$ teilbar ist.

Behauptung 1: Zwei der 10 Differenzen sind durch 3 teilbar.

Bei der Division durch 3 gibt es drei verschiedene Reste: 0, 1 und 2.

1. Fall: Drei der fünf Zahlen haben den gleichen Rest.
Diese drei Zahlen seien a_i, a_j und a_k mit $i < j < k$. Somit sind nach Vorbemerkung $a_k–a_j$, $a_k–a_i$ und $a_j–a_i$ durch 3 teilbar.

2. Fall: Keine drei Zahlen haben den gleichen Rest. Also haben maximal zwei Zahlen den gleichen Rest.
Da es 5 Zahlen gibt, die auf 3 Reste verteilt werden müssen, gibt es zwei Paare von Zahlen (etwa a_i, a_j und a_k, a_l mit $i < j$ und $k < l$) mit jeweils gleichem Rest.
Somit sind nach Vorbemerkung $a_j–a_i$ und $a_l–a_k$ beide durch 3 teilbar.

Also sind mindestens zwei Differenzen durch 3 teilbar und Behauptung 1 ist bewiesen.

Behauptung 2: Eine der 10 Differenzen ist durch 4 teilbar.

Bei der Division durch 4 gibt es vier verschiedene Reste: 0, 1, 2 und 3.
Da es 5 Zahlen gibt, die auf diese 4 Reste verteilt werden müssen, gibt es ein Paar von Zahlen (etwa a_i, a_j mit $i <j$) mit gleichem Rest. Somit ist nach Vorbemerkung $a_j–a_i$ durch 4 teilbar.

Behauptung 3: Mindestens vier der 10 Differenzen sind durch 2 teilbar.

Bei der Division durch 2 gibt es zwei verschiedene Reste: 0 und 1.

1. Fall: Mindestens vier Zahlen der fünf Zahlen haben den gleichen Rest.
Diese vier Zahlen seien a_i, a_j, a_k, und a_l mit $i<j<k<l$. Somit sind $a_l–a_k$, $a_l–a_j$, $a_l–a_i$, $a_k–a_i$, $a_k–a_j$ und $a_j–a_i$ durch 2 teilbar.

2. Fall: Keine vier Zahlen haben den gleichen Rest.
Da es 5 Zahlen gibt, die auf 2 Reste verteilt werden müssen, gibt es drei Zahlen (etwa a_i, a_j, a_k mit $i <j<k$) mit gleichem Rest. Aber auch die beiden anderen Zahlen (a_l, a_m mit mit $l <m$) haben einen gemeinsamen Rest.
Somit sind $a_k–a_j$, $a_k–a_i$ und $a_i–a_j$, aber auch $a_m–a_l$ durch 2 teilbar.
Also sind in jedem Fall mindestens vier Differenzen durch 2 teilbar.
Aus den Behauptungen 1 und 3 folgt sofort, dass das Produkt der 10 Differenzen durch $2^4 \cdot 3^2$ teilbar ist. Berücksichtigt man, dass eine Differenz nach Behauptung 2 sogar durch 4 teilbar ist, ist das Produkt noch durch einen weiteren Faktor 2 teilbar.
Somit ist das Produkt der 10 Differenzen durch $2^4 \cdot 3^2 \cdot 2 = 288$ teilbar.