14. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Lösungsbeispiele

für die Aufgaben der 2. Runde 2011/2012

Aufgabe 1

Auf einemTisch liegen zwei Haufen mit Streichhölzern, der eine mit 57, der andere mit 67 Streichhölzern. Lea und Merve ziehen abwechselnd. Wer am Zug ist, muss von einem der beiden Haufen ein, zwei oder drei Streichhölzer entfernen. Wer von einem Haufen das letzte Streichholz nimmt, hat gewonnen.

Lea beginnt. Kann sie den Sieg erzwingend?

Antwort:

Ja, Lea kann den Sieg erringen.

Lösungsmöglichkeit 1:

Wir sprechen im Folgenden genau dann von einer 4-Verteilung, wenn die Anzahl der Streichhölzer auf den beiden Haufen den gleichen Rest bei Division durch 4 besitzen.

Zwei Vorüberlegungen:
(1) Macht ein Spieler aus einer 4-Verteilung einen beliebigen regulären Zug, dann liegt danach keine 4-Verteilung mehr vor, da er entweder 1 oder 2 oder 3 Streichhölzer - und damit kein Vielfaches von 4 - von einem Haufen nehmen musste.

(2) Liegt eine Verteilung vor, die keine 4-Verteilung ist, dann sind insbesondere die Anzahl der Hölzer unterschiedlich. Hier ist es immer möglich, durch Wegnahme von 1 oder 2 oder 3 Streichhölzern vom Haufen mit der größeren Streichholzanzahl eine 4-Verteilung zu erreichen. Nach einem solchen Zug hat der Haufen, von dem Streichhölzer genommen wurden, in jedem Fall noch mindestens genauso viele Streichhölzer wie der andere Haufen.

Lea kann den Sieg nun wie folgt erzwingen: Sie zieht im ersten Zug durch Wegnahme von 2 Streichhölzern auf 57 und 65 Streichhölzer. Dies ist eine 4-Verteilung, da beide Anzahlen den Rest 1 bei Division durch 4 lassen.

Nun wollen wir zeigen, dass Lea im Folgenden immer so spielen kann, dass Sie entweder einen Gewinnzug machen kann und einen Haufen abräumt oder aber, dass sie Merve wieder eine 4-Stellung vorsetzen kann, aus der Merve nicht gewinnen kann, weil beide Haufen mehr als drei Streichhölzer besitzen.

Lea erreicht dies mit folgender Strategie:
Wenn sie nach einem Zug von Merve eine Stellung vorfindet,

(A) in der ein Haufen 3 oder weniger Streichhölzer enthält,
so hat sie gewonnen, indem sie die Streichhölzer dieses Haufens nimmt;

(B) in der beide Haufen mehr als 3 Streichhölzer enthalten und die keine 4-Stellung ist, dann nimmt Sie - wie in (2) beschrieben - vom größeren Haufen 1 oder 2 oder 3 Streichhölzer, so dass Merve danach eine 4-Verteilung vorfindet, in der auch beide Haufen mehr als 3 Streichhölzer besitzen. Merve kann in diesem Fall im nächsten Zug also sicher nicht abräumen und muss Lea nach (1) wieder eine Stellung hinterlassen, die keine 4-Stellung ist.

Die Fallunterscheidung (A) und (B) in dieser Strategie ist vollständig, denn ausgehend von der 4-Verteilung 57 und 65 muss Merve im nächsten Zug eine Verteilung hinterlassen, die keine 4-Verteilung ist. Und findet – sofern Lea noch nicht gewonnen hat –im Folgenden immer wieder nach Zügen (B) von Lea eine 4-Verteilung vor.

Spielt Lea nach dieser Strategie, so werden es bei jedem Zug weniger Streichhölzer und da das Spiel nach endlich vielen Zügen beendet sein muss, tritt der Fall (A) auf und Lea hat gewonnen.

Lösungsmöglichkeit 2:

Idee: Einteilung aller Spielstellungen in Gewinn- und Verluststellungen.

Vorbemerkung: Das Spiel endet nach einer endlichen Anzahl von Zügen, da nur eine endliche Anzahl von Spielsteinen vorhanden ist und die Anzahl in jedem Spielzug abnimmt.

Eine Spielstellung wird durch ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen (a;b) beschrieben, wobei a>0 die Anzahl der Hölzer auf dem ersten Stapel und b>0 die Anzahl der Hölzer auf dem zweiten Stapel bezeichnet.
Die Menge M aller Spielstellungen wird disjunkt zerlegt in zwei Mengen G (Gewinnstellungen, d.h. wer am Zug ist, kann mit dieser Stellung den Gewinn erzwingen) und V (Verluststellungen, d.h. wer am Zug ist, kann den Verlust nicht vermeiden), d.h.
$M = \{(a;b) \mid a,b \in N\} = G \cup V$ und $G \cap V = \emptyset$.
Es ist offensichtlich, dass man gewonnen hat, wenn man am Zug ist und auf einem der Stapel höchstens 3 Streichhölzer liegen, denn dann kann man diese 3 Streichhölzer einfach entfernen und hat gewonnen. Folglich gilt:
Wenn $0 < a \leq 3$, $0 < b$ oder $0 < b \leq 3$, $0 < a$, dann ist $(a;b) \in G$.

Wir definieren:
$V = \{(a;b) \mid a \geq 4 \text{ und } b \geq 4 \text{ und } 4 \text{ teilt } |a-b|\}$ und
G ist das Komplement von V in der Menge M.

Kann man zeigen, dass
1. für jede Spielstellung aus G ein Spielzug existiert, der diese Spielstellung in eine Spielstellung aus der Menge V überführt und
2. für jede Spielstellung aus V jeder beliebige Spielzug diese Spielstellung in eine Spielstellung aus G überführt,

dann ist bewiesen, dass die Menge G alle Gewinn- und die Menge V alle Verluststellungen umfasst.

Zu 1.:
Ist (a;b) in G, dann tritt einer der drei Fälle ein:
Fall A: $0 < a \leq 3$, $0 < b$,
Fall B: $0 < b \leq 3$, $0 < a$,
Fall C: 4 teilt nicht $|a-b|$ und $a \geq 4$ und $b \geq 4$.
In den Fällen A und B gewinnt man offensichtlich. Bleibt Fall C zu untersuchen:
Sei o.B.d.A. $a < b$ (a = b kann nicht eintreten, da die Differenz sonst von 4 geteilt wird). Die Differenz $b-a$ lässt bei Division durch 4 den Rest i ($i \in \{1;2;3\}$) und $b \geq a+i$,

d.h. man kann von dem Stapel mit b Hölzern genau i Hölzer entfernen und erhält dann eine Spielstellung bei der die Differenz $b-a$ durch 4 teilbar ist und $b \geq a \geq 4$ gilt, d.h. die entstehende Spielstellung ist aus V. w.z.b.w.

zu 2.:
Sei (a;b) in V und o.B.d.A. $b \geq a \geq 4$. Die Differenz $b-a$ ist durch 4 teilbar. Entfernt man nun von einem der Stapel ein, zwei oder drei Hölzer, dann erkennt man sofort, dass die Differenz danach nicht mehr durch 4 teilbar ist, d.h. die neue Spielstellung ist nicht in V. Da aber auch $b \geq a \geq 4$ gilt, kann nach dem Spielzug keiner der beiden Stapel leer sein, d.h. man erhält eine Spielstellung aus M, die nicht in V ist. Folglich ist die neue Spielstellung aus G. w.z.b.w.

Damit ist gezeigt, dass G alle Gewinnstellungen umfasst.

In unserer Situation ist $|a-b| = 67-57 = 10$. Da 10 von 4 nicht geteilt wird und 67>0 und 57>0 sein muss, handelt es sich um eine Spielstellung aus G. Daher kann Lea den Sieg erzwingen.

Lösungsmöglichkeit 3:

Lea kann mit folgender Strategie den Sieg erzwingen: Sie nimmt zuerst vom Haufen mit 67 Hölzer zwei Hölzer weg. Damit liegen auf dem einen Haufen 57 = 4 • 14 +1 und auf dem anderen Haufen 67 – 2 = 65= 4 • 16 + 1 Hölzer.

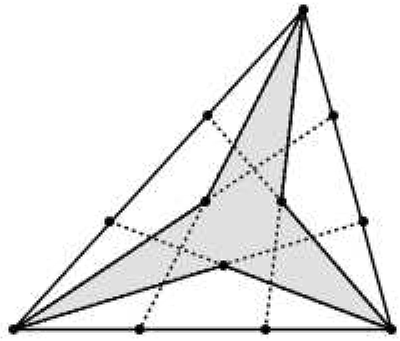
Nimmt Merve nun von einem der Haufen 1 oder 2 oder 3 Hölzer, so nimmt Lea vom selben Haufen 3 bzw. 2 bzw. 1 Hölzer. Damit wird die Anzahl um 4 reduziert. Beide Haufen bleiben also von der Form 4n +1. In den weiteren Zügen antwortet Lea genauso: Nimmt Merve h Hölzer, so nimmt Lea 4 – h Hölzer vom gleichen Haufen. Da sich die Zahl der Hölzer auf dem Tisch immer um genau 4 reduziert, tritt irgendwann sicher der Fall ein, dass nach Leas Zug auf genau einem Haufen erstmals nur noch 5 = 4 +1 Hölzer liegen.

Liegen vor Merves Zug auf einem Haufen 5 Hölzer so gibt es drei Möglichkeiten:
1. Wenn Merve von diesem Haufen 2 oder 3 Hölzer nimmt, nimmt Lea die verbleibenden 3 bzw. 2 Hölzer und hat gewonnen.
2. Wenn Merve von diesem Haufen ein Hölzchen nimmt, nimmt Lea vom anderen Haufen auch ein Hölzchen. Jeder Haufen besteht nun aus einer Anzahl von Hölzern, die durch 4 teilbar und echt größer als 0 ist. Wenn Merve nun von einem solchen Haufen h Hölzer nimmt, dann kann Lea immer ziehen, indem Sie die restlichen 4-h Hölzer zum nächst kleineren Vielfachen von 4 zieht. Merve findet so immer ein Vielfaches von 4 vor und kann für Lea niemals ein Vielfaches von 4 hinterlassen, insbesondere nicht 0. Da die Hölzer auf dem Tisch aber immer weniger werden, kann nur Lea einen Haufen leeren und den Sieg erzwingen.
3. Wenn Merve von dem anderen Haufen, der aus mehr als 5 Hölzern der Anzahl 4n+1 besteht, nimmt, so nimmt Lea von diesem Haufen 4-h Hölzer. Nun sind wieder die drei Fälle möglich, außer auf beiden Haufen sind genau 5 Hölzer. Merve muss dann ein oder mehr Hölzer von einem Haufen mit 5 Hölzern nehmen.
a) Nimmt sie 2 oder 3 Hölzer, kann Lea den Rest nehmen und hat gewonnen.
b) Nimmt Merve nur ein Hölzchen, nimmt Lea vom anderen Haufen ein Hölzchen, sodass nun beide Haufen aus 4 Hölzern bestehen. Merve kann dann durch das Ziehen von ein bis drei Hölzchen von einem Haufen mit 4 Hölzern nicht gewinnen, aber Lea nimmt im nächsten Zug das letzte Hölzchen eines Haufens und hat damit gewonnen.

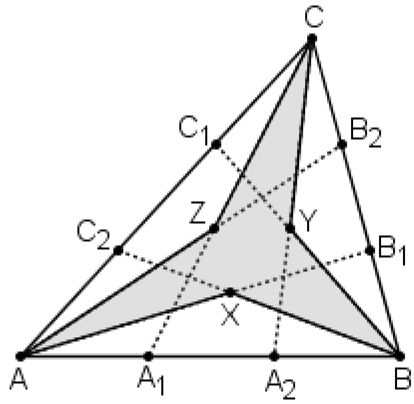
Aufgabe 2

In einem Dreieck werden die Seiten gedrittelt und von den Drittelpunkten die Strecken zu den gegenüber liegenden Ecken gezeichnet. Es entsteht der nebenstehend markierte Stern.

In welchem Verhältnis steht der Flächeninhalt dieses Sterns zu dem Flächeninhalt des Dreiecks?



Antwort: $F_{Stern} : F_{Dreieck} = 2 : 5$

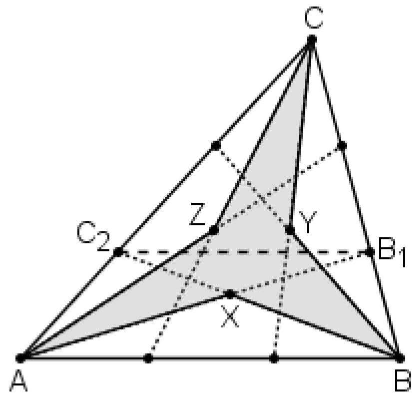


Bezeichnungen:

Die Eckpunkte des Dreiecks werden im Folgenden mit A, B und C, die Drittelpunkte Mit A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 und C_2 sowie der Schnittpunkt von AB_1 und BC_2 mit X, der Schnittpukt von BC_1 mit CA_2 mit Y und der Schnittpunkt von CA_1 mit AB_2 mit Z bezeichnet.

(Der Abstand eines Punktes P von einer Geraden g wird mit d(g;P) bezeichnet.)

Lösungsbeispiel 1 (mit Strahlensatz)



Mit Zentrum C gilt nach Angabe:

$$\overline{CC_2} : \overline{CA} = \overline{CB_1} : \overline{CB} = 2:3$$

Daraus folgt: C_2B_1 ist parallel zu AB und

$$\overline{C_2B_1} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB}, \quad d(C_2B_1;C) = \frac{2}{3} \cdot d(AB;C),$$

d.h. $d(AB;C_2B_1) = \frac{1}{3} \cdot d(AB;C)$ (*)

Demnach gilt mit Zentrum X:

$$d(AB;X) : d(C_2B_1;X) = \overline{AB} : \overline{C_2B_1} = 3:2$$

d. h. $d(AB;X) = \frac{3}{5} \cdot d(AB;C_2B_1)$

Mit (*) erhält man damit:

$$d(AB;X) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot d(AB;C) = \frac{1}{5} \cdot d(AB;C)$$

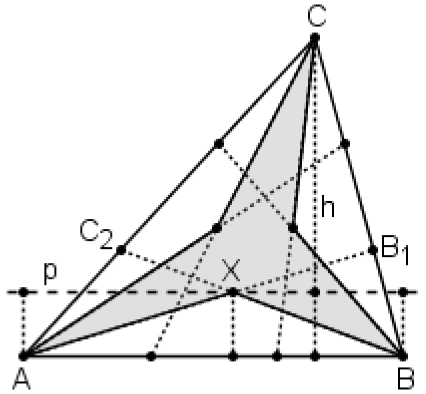
Somit gilt: $F_{\Delta ABX} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot d(AB;X) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \frac{1}{5} \cdot d(AB;C) = \frac{1}{5} \cdot F_{\Delta ABC}$

Analog: $F_{\Delta BCY} = \frac{1}{5} \cdot F_{\Delta ABC}$ und $F_{\Delta CAZ} = \frac{1}{5} \cdot F_{\Delta ABC}$

Daraus folgt: $F_{Stern} = F_{\Delta ABC} - (F_{\Delta ABX} + F_{\Delta BCY} + F_{\Delta CAZ}) = F_{\Delta ABC} - \frac{3}{5} \cdot F_{\Delta ABC} = \frac{2}{5} \cdot F_{\Delta ABC}$

Also: $F_{Stern} : F_{\Delta ABC} = 2:5$

Lösungsbeispiel 2 (mit Schwerlinien)



Wir denken uns in den Ecken A, B und C Punktmassen m_A, m_B und m_C.

Da $\overline{AC_2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CC_2}$ und $\overline{BB_1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CB_1}$, gilt:

$$d(A;BC_2) = \frac{1}{2} \cdot d(C;BC_2) \text{ und } d(B;AB_1) = \frac{1}{2} \cdot d(C;AB_1).$$

D. h. BC_2 ist Schwerlinie in Dreieck ABC

$\Leftrightarrow$ $m_A \cdot d(A;BC_2) = m_C \cdot d(C;BC_2)$

$\Leftrightarrow$ $m_A = 2 \cdot m_C$ (1)

und AB_1 ist Schwerlinie in Dreieck ABC

$\Leftrightarrow$ $m_B \cdot d(B;AB_1) = m_C \cdot d(C;AB_1)$

$\Leftrightarrow$ $m_B = 2 \cdot m_C$ (2)

Aus (1) und (2) folgt: Ist $m_A = m_B = 2 \cdot m_C$, so ist der Schnittpunkt X von BC_2 und AB_1 Schwerpunkt des Dreiecks ABC und damit jede Gerade durch X Schwerlinie des Dreiecks ABC.

Insbesondere ist die Parallele p zu AB durch X Schwerlinie des Dreiecks.

Damit gilt: $m_A \cdot d(p;A) + m_B \cdot d(p;B) = m_C \cdot d(C;p)$

Mit (1) und (2) sowie $d(A;p) = d(B;p) = d(X;AB)$ erhält man:

$$2 \cdot m_C \cdot d(X;AB) + 2 \cdot m_C \cdot d(X;AB) = m_C \cdot d(C;p) \Leftrightarrow 4 \cdot d(X;AB) = d(C;p)$$

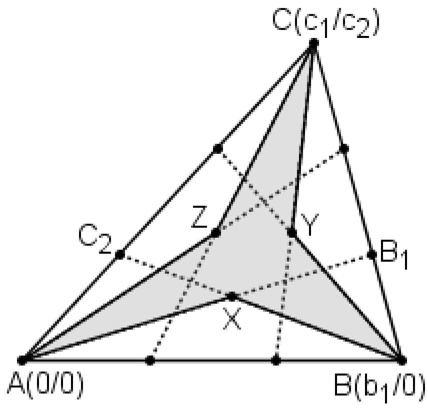
Damit ergibt sich für die Höhe h des Dreiecks ABC:

$$h = d(X;AB) + d(C;p) = d(X;AB) + 4 \cdot d(X;AB) = 5 \cdot d(X;AB)$$

Also: $F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot 5 \cdot d(X;AB) = 5 \cdot F_{\Delta ABX} \Leftrightarrow F_{\Delta ABX} = \frac{1}{5} \cdot F_{\Delta ABC}$

Analoges Vorgehen wie in Lösungsbeispiel 1 liefert: $F_{Stern} : F_{\Delta ABC} = 2 : 5$

Lösungsbeispiel 3 (mit Koordinatenrechnung)



Legt man über das Dreieck ABC ein Koordinatensystem durch $A(0|0)$, $B(b_1|0)$ und $C(c_1|c_2)$, so gilt:

$$\overrightarrow{B_1} = \vec{B} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot b_1 + \frac{1}{3} \cdot c_1 \\ \frac{1}{3} \cdot c_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{C_2} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Für X gilt : $\lambda \cdot \overrightarrow{AB_1} = \vec{B} + \mu \cdot \overrightarrow{BC_2}$

$$\Leftrightarrow \quad \text{I: } \lambda \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot b_1 + \frac{1}{3} \cdot c_1 \right) = b_1 + \mu \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot c_1 - b_1 \right) \text{ und II: } \lambda \cdot \frac{1}{3} \cdot c_2 = \mu \cdot \frac{1}{3} \cdot c_2 \Leftrightarrow \lambda = \mu$$

II in I eingesetzt: $\lambda \cdot \frac{5}{3} \cdot b_1 = b_1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{5}$ in X eingesetzt: $x_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot c_2 = \frac{1}{5} \cdot c_2$

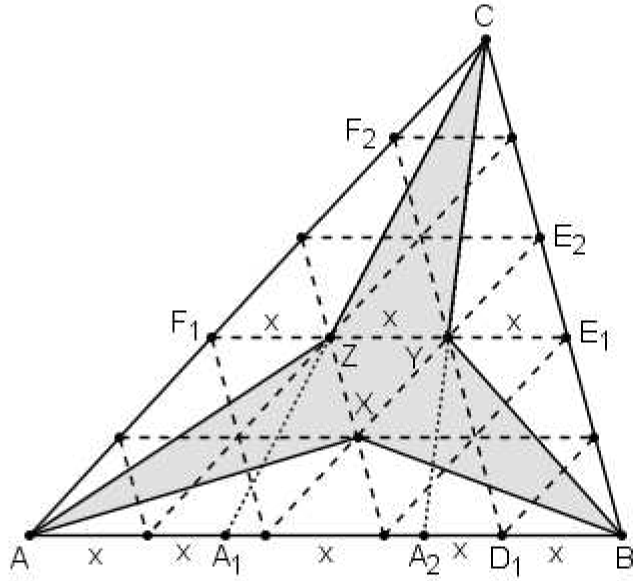
Da c_2 Höhe in Dreieck ABC und x_2 Höhe in Dreieck ABX, gilt: $F_{\Delta ABX} = \frac{1}{5} \cdot F_{\Delta ABC}$.

Analoges Vorgehen wie in Lösungsbeispiel 1 liefert: $F_{Stern} : F_{\Delta ABC} = 2 : 5$

Lösungsbeispiel 4 (mit Zerlegungen)

Jede der drei Seiten des Dreiecks ABC wird in fünf gleiche Teile geteilt. Dann werden diese Teilungspunkte durch Parallele zu den Dreiecksseiten miteinander verbunden. Das Dreieck wurde durch diese Parallelen in 25 kongruente Teildreiecke zerlegt, die ähnlich zum Ausgangsdreieck sind.

F_1 und E_1 sind die Teilungspunkte von [AC] bzw. [BC], die diese Strecken im Verhältnis 2:3 teilen; d. h. es gilt:
$\overline{CF_1} : \overline{CA} = \overline{CE_1} : \overline{CB} = 3:5$.



Da die Strecke [AB] durch die Teilungspunkte in fünf Teile der Länge x zerlegt wird, hat demnach die Stecke [F_1E_1] die Länge 3x. Sie wird durch die Parallelen in drei gleiche Teile der Länge x geteilt. Die zugehörigen Teilungspunkte heißen Z und Y.

Die Geraden CZ und CY schneiden [AB] in den Punkten A_1 und A_2.
Da die Parallele F_1E_1 zu AB durch Z und Yin drei gleiche Teile zerlegt wird, teilen A_1 und A_2 die Strecke [AB] ebenfalls in drei gleiche Teile.
Die Strecken [CA_1] und [CA_2] sind also genau die in der Aufgabenstellung gegebenen Strecken, mit denen die Seiten des Sterns gebildet werden; Z und Y sind dabei innere Eckpunkte des Sterns.

Sind F_{klein} der Flächeninhalt eines der 25 kleinen Dreiecke und $F_{groß}$ der Flächeninhalt des gesamten Dreiecks ABC, so gilt: $25 \cdot F_{klein} = F_{groß}$.

Da das Viereck CF_2YE_2 ein Parallelogramm ist, das aus vier kleinen Dreiecken zusammengesetzt ist, gilt: $F_{\Delta CYE_2} = \frac{1}{2} \cdot F_{CF_2YE_2} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot F_{klein} = 2 \cdot F_{klein}$

Somit ist $F_{\Delta CYE_1} = F_{\Delta CYE_2} + F_{\Delta E_2YE_1} = 2 \cdot F_{klein} + F_{klein} = 3 \cdot F_{klein}$

Analog zu obigen Überlegungen ist: $F_{\Delta BE_1Y} = \frac{1}{2} \cdot F_{BE_1YD_1} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot F_{klein} = 2 \cdot F_{klein}$

Damit hat das gesamte Außendreieck BCY den Flächeninhalt:

$F_{\Delta BCY} = F_{\Delta BE_1y} + F_{\Delta cYE_1} = 2 \cdot F_{klein} + 3 \cdot F_{klein} = 5 \cdot F_{klein}$

Analog haben auch die anderen beiden Dreiecke AZC und ABX außerhalb des Sterns den Flächeninhalt $5 \cdot F_{klein.}$

Insgesamt hat also die Fläche außerhalb des Sterns den Inhalt $15 \cdot F_{klein}$.
Für den Stern bleibt demnach der Inhalt $F_{groß}$ - $15 \cdot F_{klein}$ = $25 \cdot F_{klein}$ - $15 \cdot F_{klein}$ = $10 \cdot F_{klein}$.

Somit ist das gesuchte Flächenverhältnis $(10 \cdot F_{klein}) : (25 \cdot F_{klein}) = 2 : 5$.

Aufgabe 3

Bestimme alle Quadratzahlen, die um 1 größer sind als die Summe von zwei aufeinander folgenden Zweierpotenzen.

Lösung:

Die gesuchten Quadratzahlen sind:
(1) $4 = 2^2$ (2) $25 = 5^2$ (3) $49 = 7^2$

Beweis:

Sei $q = n^2$ eine Quadratzahl, deren Vorgänger eine Summe von zwei aufeinander folgenden Zweierpotenzen ist.

Dann gilt also $n^2 - 1 = 2^a + 2^{a+1}$ (*) für eine natürlich Zahl a oder für a = 0.

Da $2^{a+1} = 2{\cdot}2^a$, ist aber $2^a + 2^{a+1} = 2^a + 2{\cdot}2^a = 3{\cdot}2^a$.

Somit ist Gleichung (*) gleichwertig zu $(n - 1){\cdot}(n + 1) = 3{\cdot}2^a$, (**)

Fall 1: n ist gerade.

In diesem Fall sind n – 1 und n + 1 beide ungerade und damit ist auch die linke Seite von (**) ungerade. Somit muss auch die rechte Seite von (**) ungerade sein.
Für $a \geq 1$ ist aber 2^a gerade, somit kommt in diesem Fall nur a = 0 in Frage.
Für a = 0 ist aber $2^a + 2^{a+1} = 1 + 2 = 3$ der Vorgänger der Quadratzahl 4.
Dies ist die Lösung (1).

Fall 2: n ist ungerade.

Dann sind n – 1 und n + 1 beide gerade. Es ist aber nur genau eine dieser beiden Zahlen durch vier teilbar, da die beiden Zahlen die Differenz 2 haben.

Fall 2a: n – 1 ist durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.
Wegen $(n - 1){\cdot}(n + 1) = 3{\cdot}2^a$ kann n – 1 außer durch 2 allenfalls noch durch 3 teilbar sein; sonst wäre n – 1 durch 4 teilbar. Es bleibt also nur n – 1 = 2 oder n – 1 = 6.
Falls n – 1 = 2, so ist n + 1 = 4 nicht durch 3 teilbar. Wegen $(n - 1){\cdot}(n + 1) = 3{\cdot}2^a$ muss aber genau eine der beiden Zahlen n – 1 und n + 1 durch 3 teilbar sein, der Fall n – 1 = 2 ist also nicht möglich.
Es bleibt also nur n – 1 = 6. Dann ist n = 7 und $n^2 - 1 = 48 = 2^4 + 2^5$ ist eine Summe von zwei aufeinander folgenden Zweierpotenzen.
Somit ist die Quadratzahl 49 eine der gesuchten Zahlen (siehe die Lösung (3)).

Fall 2b: n + 1 ist durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.

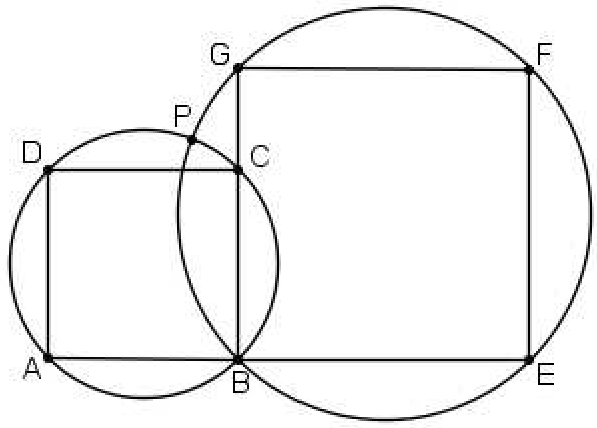
Wegen $(n - 1){\cdot}(n + 1) = 3{\cdot}2^a$ kann n + 1 außer durch 2 nur noch durch 3 teilbar sein; sonst wäre n + 1 durch 4 teilbar. Es bleibt also nur n + 1 = 2 oder n + 1 = 6.
Falls n + 1 = 2, so ist n – 1 = 0, dies ist wegen $(n - 1){\cdot}(n + 1) = 3{\cdot}2^a$ nicht möglich.
Es bleibt also nur n + 1 = 6. Dann ist n = 5 und $n^2 - 1 = 24 = 2^3 + 2^4$ ist eine Summe von zwei aufeinander folgenden Zweierpotenzen.
Somit ist die Quadratzahl 25 eine weitere der gesuchten Zahlen (siehe die Lösung (2)).

Da damit alle Fälle erfasst sind, ist nachgewiesen, dass es nur die drei genannten Lösungen 4, 25 und 49 gibt.

Aufgabe 4

Die beiden Quadrate ABCD und BEFG liegen so, dass C ein innerer Punkt der Strecke [BG] ist.
Der Punkt P ist der von B verschiedene Schnittpunkt der Umkreise dieser Quadrate.

Zeige: Die Geraden DF, CE und AG schneiden sich in P.



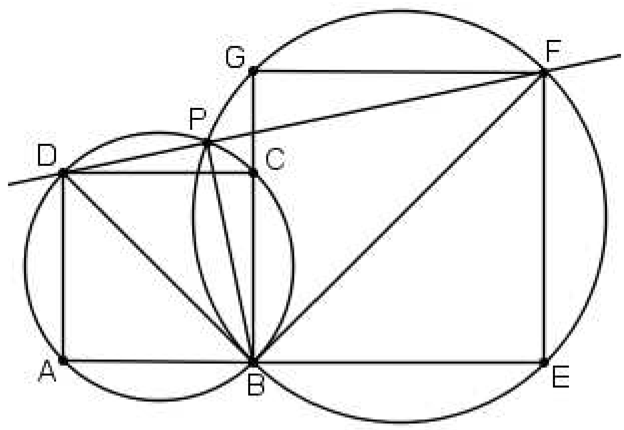
Lösungsvorschlag 1 (Anwendung des Satzes von Thales):

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten:

1) Der Punkt P liegt auf der Gerade DF.
(Dazu wird nachgewiesen wird, dass $\angle DPF = 180°$.)

Beweis:

Der Punkt P liegt auf dem Kreis mit dem Durchmesser [DB] und auf dem Kreis mit dem Durchmesser [BF]. Mit dem Satz des Thales folgt deshalb: $\angle DPB = 90°$ und $\angle BPF = 90°$.

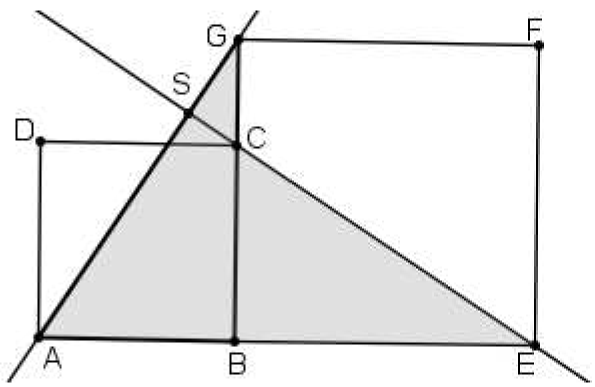


Für den Winkel $\angle DPF$ gilt dann: $\angle DPF = \angle DPB + \angle BPF = 180°$,
d.h. P liegt auf der Gerade DF.

2) Der Punkt P liegt auf den Geraden EC und AG.
Zunächst wird in a) gezeigt, dass sich die Geraden EC und AG orthogonal in einem Punkt S schneiden. In b) wird nachgewiesen, dass dieser Schnittpunkt S auf beiden Umkreisen liegt, d.h. mit dem Punkt P übereinstimmt.

Beweis:

a) Die beiden Dreiecke ABG und CBE sind kongruent, da sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (Kongruenzsatz sws: $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{BG} = \overline{BE}$, $\angle GBA = \angle EBC = 90°$). Sie stimmen deshalb auch in anderen einander entsprechenden Größen überein.



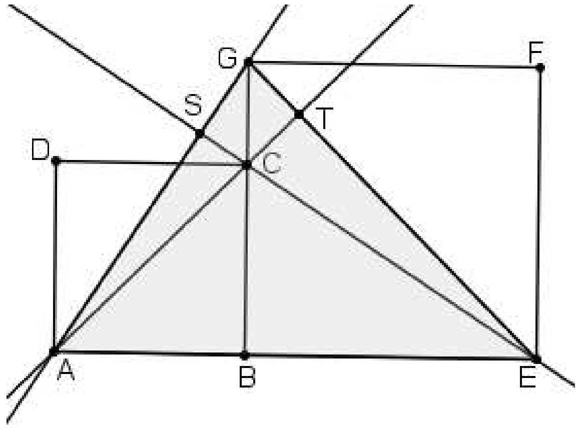
Insbesondere gilt: $\angle CEB = \angle AGB$. Bezeichnet man mit S den Schnittpunkt der Geraden AG und CE, so folgt für den Winkel $\angle ASE$ im Dreieck AES:
$\angle ASE = 180° - \angle BAG - \angle CEB = 180° - \angle BAG - \angle AGB = \angle GBA = 90°$.

Beweisvariante 1:

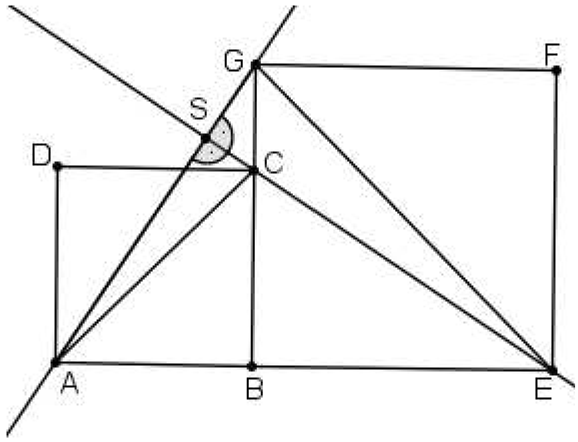
Die Gerade CE geht aus der Gerade AG durch eine Drehung um B um 90° mit dem Uhrzeigersinn hervor. Daraus folgt sofort die Behauptung.

Beweisvariante 2:

Die Diagonalen [AC] und [GE] sind orthogonal. Bezeichnet man den Schnittpunkt der Geraden AC und GE mit T, so ist [AT] eine Höhe im Dreieck AEG.
[GB] ist ebenfalls eine Höhe in diesem Dreieck mit C als Höhenschnittpunkt.
Da die dritte Höhe ebenfalls durch C geht, ist [SE] die dritte Höhe im Dreieck ABG und damit gilt:
SE ist orthogonal zu AG.



b) In a) wurde gezeigt, dass sich die Geraden EC und AG im Punkt S orthogonal schneiden. Die Dreiecke ASC und SEG sind somit rechtwinklig mit $\angle ASC = \angle ESG = 90°$.
Mit der Umkehrung des Satzes von Thales folgt daraus, dass S sowohl auf dem Kreis mit Durchmesser GE als auch auf dem Kreis mit Durchmesser AC liegt. Diese Kreise sind die Umkreise der beiden Quadrate.



S ist somit der von B verschiedene Schnittpunkt P dieser beiden Umkreise. Damit ist gezeigt, dass die beiden Geraden AG und EC durch P gehen.

Lösungsvorschlag 2 (Anwendung des Umfangswinkelsatzes bzw. des Satzes über Sehnenvierecke):

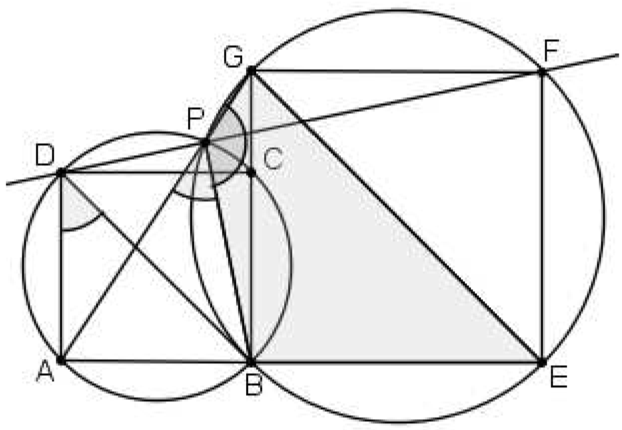
Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

1) Der Punkt P liegt auf der Gerade DF.
Beweis siehe Lösungsvorschlag 1

2) Der Punkt P liegt auf der Gerade AG.
(Dazu wird nachgewiesen wird, dass $\angle APG = 180°$.)

Beweis:

Die Winkel $\angle ADB$ und $\angle APB$ sind Umfangswinkel im Umkreis des Quadrates ABCD über der Sehne [AB].
$\angle ADB$ ist Basiswinkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABD.
Mit dem Umfangswinkelsatz folgt deshalb: $\angle APB = \angle ADB = 45°$.
$\angle GEB$ ist ein Basiswinkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck BEG.

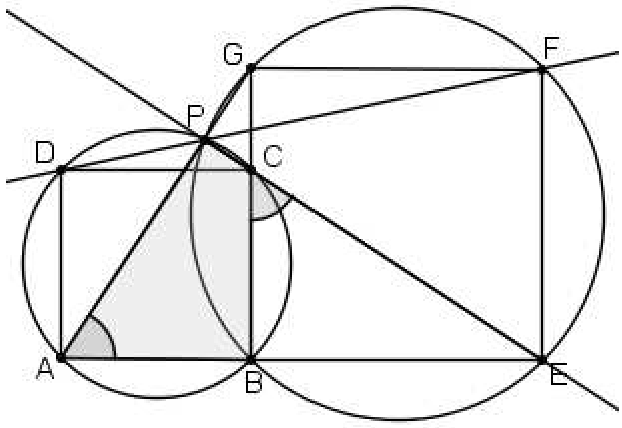


Für den Winkel $\angle BPG$ im Sehnenviereck PBEG folgt daraus:
$\angle BPG = 180° - \angle GEB = 180° - 45° = 135°$.

Für den Winkel $\angle APG$ ergibt sich daraus:
$\angle APG = \angle APB + \angle BPG = 135° + 45° = 180°$.
Der Punkt P liegt demnach auf der Gerade AG.

3) Der Punkt P liegt auf der Gerade CE.
(Das wird gezeigt, indem nachgewiesen wird, dass $\angle PCE = 180°$.)

Beweis:



Die Dreiecke ABG und BEC sind kongruent, da sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen
(Kongruenzsatz sws:
$\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{BG} = \overline{BE}$, $\angle GBA = \angle EBC = 90°$).
Sie stimmen deshalb auch in anderen einander entsprechenden Größen überein.
Insbesondere gilt: $\angle BCE = \angle BAG$.

Da P auf AG liegt (siehe 2)), gilt auch
$\angle BCE = \angle BAG = \angle BAP$. (1)

Im Sehnenviereck ABCP ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu 180°, für den Winkel $\angle PCB$ folgt deshalb:
$\angle PCB = 180° - \angle BAP$ (2)

Für den Winkel $\angle PCE$ folgt aus (1) und (2):
$\angle PCE = \angle PCB + \angle BCE = (180° - \angle BAP) + \angle BAP = 180°$.
Der Punkt P liegt demnach auf der Gerade CE.