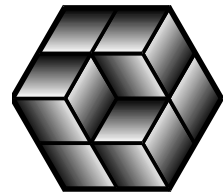


14. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

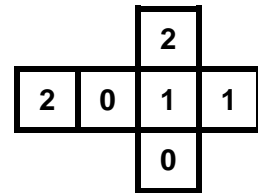


Lösungsbeispiele

für die Aufgaben der 1. Runde 2011/2012

Aufgabe 1

David wirft einen besonderen Würfel und schreibt jeweils die oben liegende Zahl auf. Die Abbildung zeigt ein Netz seines Würfels.



Wie oft muss David mindestens würfeln, damit unter den aufgeschriebenen Zahlen ganz sicher drei Zahlen sind, deren Summe durch 3 teilbar ist?

Lösung:

David muss mindestens **fünf** Mal würfeln.

1. Beweisvorschlag:

1. Behauptung: Wenn David fünf Mal würfelt, dann befinden sich unter seinen aufgeschriebenen Zahlen immer drei Zahlen, deren Summe durch 3 teilbar ist.

Beweis der 1. Behauptung:

Es kann nur eine der beiden folgenden Situationen eintreten:

Situation A: Unter Davids aufgeschriebenen Zahlen kommt eine Zahl dreimal vor. Wir können dann die Summe dieser drei Zahlen bilden, also eine der folgenden Summen: $0 + 0 + 0 = 0$ oder $1 + 1 + 1 = 3$ oder $2 + 2 + 2 = 6$. Diese Summen sind alle durch 3 teilbar.

Situation B: Unter Davids aufgeschriebenen Zahlen kommt keine Zahl dreimal vor. Dann kommt jede Zahl höchstens zwei Mal vor.

Da genau fünf Zahlen aufgeschrieben werden muss folglich jede der Zahlen 0, 1 und 2 mindestens einmal unter diesen Zahlen vertreten sein. Wir können daher die Summe $0 + 1 + 2 = 3$ bilden, die durch 3 teilbar ist.

Die 1. Behauptung ist also in beiden Situationen bewiesen.

2. Behauptung: Bei weniger als 5 Würfeln kann es vorkommen, dass unter den gewürfelten Zahlen keine drei sind, deren Summe durch 3 teilbar ist.

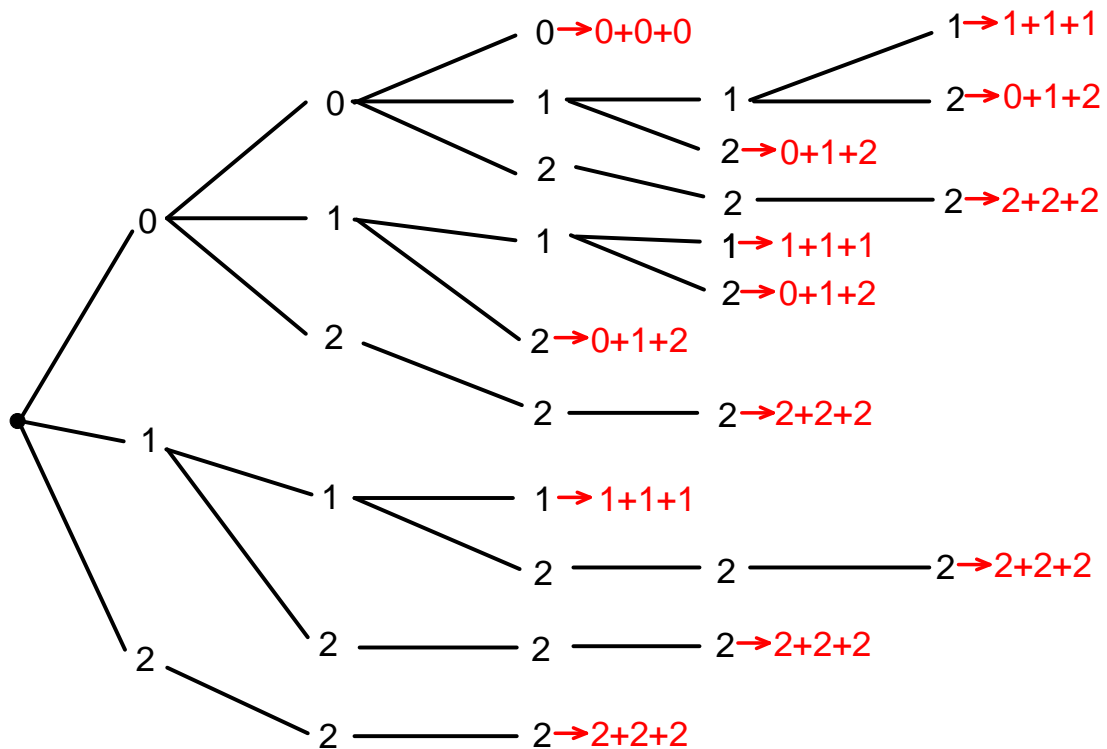
Beweis der 2. Behauptung:

Angenommen David hat die vier Zahlen 1, 1, 2, 2 gewürfelt.

Die möglichen Summen von drei der vier Zahlen sind $1 + 1 + 2 = 4$ oder $1 + 2 + 2 = 5$. Keine dieser Summen ist durch 3 teilbar.

2. Beweismvorschlag:

Es kommt nicht auf die Reihenfolge der gewürfelten Zahlen an: Für die Teilbarkeit durch 3 ist es ja unerheblich, ob die Augenzahlen 2,1,0,1 (in dieser Reihenfolge) oder 0,1,1,2 gewürfelt wurden. Wir nehmen also an, dass David seine Zahlen in aufsteigender Reihenfolge anordnet.



Der obige Baum enthält alle möglichen aufsteigenden Würfelergebnisse von David. Sobald in einem Ast drei Zahlen mit durch 3 teilbarer Summe vorliegen, wird der Ast mit dieser Summe beendet.

Man erkennt, dass alle Äste spätestens nach fünfmaligem Würfeln beendet sind, während es Äste gibt, die nach viermaligem Würfeln noch nicht beendet sind.

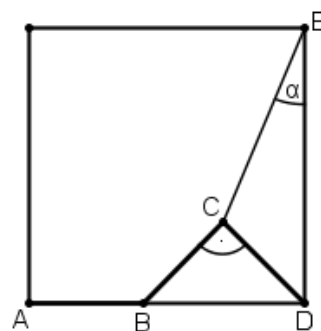
Das ist genau die behauptete Lösung.

Aufgabe 2

In dem nebenstehenden Quadrat gilt:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} \text{ und } \angle BCD = 90^\circ.$$

Bestimme die Größe des Winkels α .



Lösung:

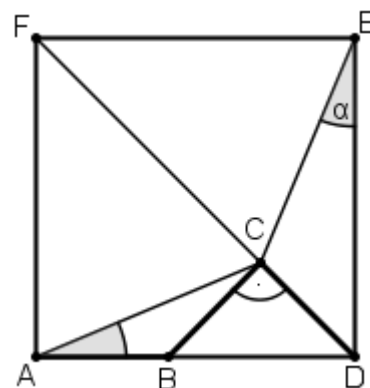
Es gilt $\alpha = 22,5^\circ$.

1. Beweisvorschlag:

Das Dreieck BDC ist gleichschenkelig, da $\overline{BC} = \overline{CD}$.

Nach Voraussetzung ist $\angle BCD = 90^\circ$. Für die Größe des Basiswinkels $\angle CDB$ folgt deshalb aus dem Winkelsummensatz für Dreiecke:

$$\angle CDB = \angle DBC = 45^\circ. \quad (1)$$



Der Punkt C liegt somit auf der Diagonalen [DF] des Quadrates ADEF.

Die Gerade DF ist eine Symmetrieachse des Quadrates ADEF. Spiegelt man das Quadrat an dieser Symmetrieachse, so ist der Winkel $\angle DAC$ das Spiegelbild des Winkels $\angle CED$ und es gilt:

$$\alpha = \angle CED = \angle DAC.$$

Der Winkel $\angle DAC$ ist Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ABC. Mit dem Winkelsummensatz für Dreiecke folgt:

$$\alpha = \angle CED = \angle DAC = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \angle CBA) \quad (2)$$

$\angle CBA$ ist ein Nebenwinkel des Basiswinkels $\angle DBC$ im Dreieck BDC. Die Basiswinkel in diesem Dreieck haben nach (1) die Größe 45° . Für $\angle CBA$ gilt somit:

$$\angle CBA = 180^\circ - \angle DBC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) ergibt sich für α :

$$\alpha = \angle CED = \angle DAC = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \angle CBA) = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 135^\circ) = 22,5^\circ.$$

Dies war zu zeigen.

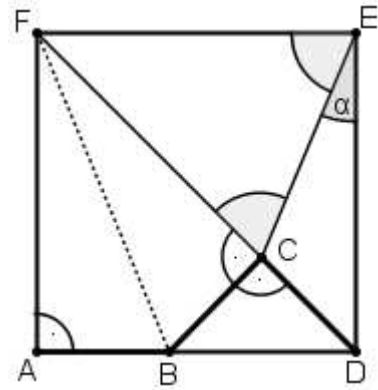
2. Beweisvorschlag:

Das Dreieck BDC ist gleichschenkelig, da $\overline{BC} = \overline{CD}$.

Nach Voraussetzung ist $\angle BCD = 90^\circ$. Für die Größe des Winkels $\angle CDB$ folgt deshalb aus dem Winkelsummensatz für Dreiecke: $\angle CDB = 45^\circ$.

Der Punkt C liegt somit auf der Diagonale [DF] des Quadrates ADEF.

$\angle FCB$ ist ein Nebenwinkel von $\angle BCD$ und hat deshalb die Größe $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.



Die beiden Dreiecke ABF und BCF sind nach dem Kongruenzsatz Ssw kongruent ($\overline{AB} = \overline{BC}$ nach Voraussetzung, [BF] ist gemeinsame Seite beider Dreiecke, $\angle BAF = \angle FCB = 90^\circ$). Sie stimmen deshalb auch in anderen einander entsprechenden Größen überein.

Insbesondere gilt: $\overline{AF} = \overline{FC}$.

Da alle Quadratseiten gleich lang sind, folgt daraus: $\overline{FE} = \overline{AF} = \overline{FC}$.
Somit ist das Dreieck FCE gleichschenkelig.

Da [DF] Diagonale des Quadrates ADEF ist, gilt für den Winkel $\angle CFE$ im gleichschenkeligen Dreieck FCE:

$$\angle CFE = 45^\circ.$$

Für die Größen der Basiswinkel in diesem gleichschenkeligen Dreieck FCE gilt:

$$\angle ECF = \angle FEC = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 45^\circ) = 67,5^\circ.$$

Damit ergibt sich für den gesuchten Winkel α :

$$\alpha = \angle CED = 90^\circ - \angle FEC = 22,5^\circ.$$

3. Beweisvorschlag:

Da Dreieck BDC rechtwinklig und gleichschenkelig ist, gilt:

$$\angle DBC = \angle CDB = 45^\circ.$$

Ist P der Schnittpunkt von BC mit DE, so gilt:

$$- \angle DCP = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ = \angle BCD$$

$$- \angle PDC = 90^\circ - \angle CDB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle CDB$$

$$- \overline{DC} = \overline{DC}$$

Nach dem wsw-Satz sind die Dreiecke BDC und DPC also kongruent.

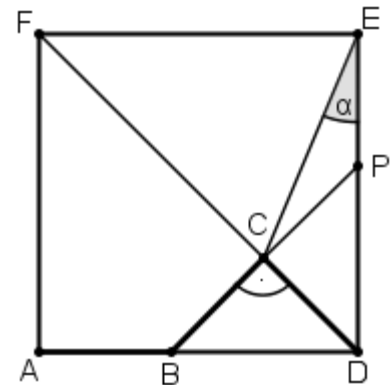
Daraus folgt:

$$- \overline{DP} = \overline{BD} \Rightarrow \overline{PE} = \overline{DE} - \overline{DP} = \overline{AD} - \overline{BD} = \overline{AB} \text{ und } \overline{CP} = \overline{BC}$$

Da nach Voraussetzung $\overline{AB} = \overline{BC}$ ist, gilt $\overline{CP} = \overline{PE}$, d.h. Dreieck CPE ist gleichschenkelig mit Basis [CE].

$$- \angle CPD = \angle DBC = 45^\circ \Rightarrow \angle EPC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$\text{Daraus folgt: } \alpha = (180^\circ - 135^\circ) : 2 = 22,5^\circ.$$



Aufgabe 3

Robert addiert zuerst sieben aufeinander folgende, danach acht aufeinander folgende und schließlich neun aufeinander folgende positive ganze Zahlen. Er erzielt dabei dreimal das gleiche Ergebnis. Christina stellt fest: „Das ist der kleinste Wert, den man so erhalten kann!“

Welchen Wert hat Robert berechnet?

Lösung:

Robert hat den Wert **252** berechnet.

1. Beweisvorschlag:

Für eine natürliche Zahl n sei $S(n)$ die Summe der sieben aufeinanderfolgenden Zahlen, die mit n beginnen. Also $S(n) = n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) + (n+6)$.

So ist z.B. $S(9) = 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 84$.

Ebenso ist $A(n)$ die Summe der acht aufeinanderfolgenden Zahlen, die mit n beginnen und $N(n)$ ist die Summe der neun aufeinanderfolgenden Zahlen, die mit n beginnen.

In folgender Tabelle wurden für die ersten 33 Zahlen die Summen $S(n)$, $A(n)$ und $N(n)$ berechnet.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
S(n)	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
A(n)	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164
N(n)	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189

n	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
S(n)	147	154	161	168	175	182	189	196	203	210	217	224	231	238	245	252
A(n)	172	180	188	196	204	212	220	228	236	244	252	260	268	276	284	292
N(n)	198	207	216	225	234	243	252	261	270	279	288	297	306	315	324	333

Laut Aufgabenstellung ist der kleinste Wert gesucht, der in allen drei Zeilen der Tabelle auftaucht. Durch Vergleich der Zahlen in den drei Zeilen erkennt man, dass 252 die kleinste Zahl ist, die in allen drei Zeilen vorkommt.

Somit hat Robert den Wert **252** berechnet.

2. Beweisvorschlag:

Sieben aufeinanderfolgende Zahlen, die bei a beginnen, haben die Summe

$$S(a) = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4) + (a+5) + (a+6) = 7 \cdot a + 21 = 7 \cdot (a+3). \quad (1)$$

Acht aufeinanderfolgende Zahlen, die bei b beginnen, haben die Summe

$$A(b) = b + (b+1) + (b+2) + (b+3) + (b+4) + (b+5) + (b+6) + (b+7) = 8 \cdot b + 28 = 4 \cdot (2b+7) \quad (2)$$

Neun aufeinanderfolgende Zahlen, die bei c beginnen, haben die Summe

$$N(c) = c + (c+1) + (c+2) + (c+3) + (c+4) + (c+5) + (c+6) + (c+7) + (c+8) = 9 \cdot c + 36 = 9 \cdot (c+4) \quad (3)$$

Wenn die gesuchte Zahl die Summe von sieben aufeinander folgenden Zahlen ist, ist sie nach (1) Vielfaches von 7. Ist sie zugleich Summe von acht aufeinander folgenden Zahlen, so ist sie nach (2) auch Vielfaches von 4. Ist diese Zahl auch noch Summe von neun aufeinander folgenden Zahlen, so ist sie nach (3) ebenfalls Vielfaches von 9.

Da die Zahlen 7, 4 und 9 keine gemeinsamen Teiler haben, ist die gesuchte Zahl sogar durch das Produkt $7 \cdot 4 \cdot 9 = 252$ teilbar. Der kleinstmögliche Wert für die gesuchte Zahl ist also 252.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } 252 &= 7 \cdot 36 = 7 \cdot (33+3) = 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 \\ 252 &= 4 \cdot 63 = 8 \cdot 31,5 = 8 \cdot (28+3,5) = 28 + 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 \\ 252 &= 9 \cdot 28 = 9 \cdot (24+4) = 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32 \end{aligned}$$

Somit ist 252 tatsächlich eine Zahl, die Summe von sieben, acht bzw. neun aufeinanderfolgenden Zahlen ist.

Robert hat also den Wert **252** berechnet.

3. Beweisvorschlag:

Wie im zweiten Beweisvorschlag werden die Terme (1) bis (3) definiert.

Gleichsetzen von (3) und (2) liefert $9 \cdot c + 36 = 8 \cdot b + 28$; $9 \cdot c = 8 \cdot b - 8$ und damit

$$9 \cdot c = 8 \cdot (b-1) \quad (4)$$

Da 9 und 8 keine gemeinsamen Teiler haben, ist c ein Vielfaches von 8, also $c = 8 \cdot n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Offensichtlich ergibt sich der kleinste Summenwert für die kleinstmögliche Ausgangszahl c .

Für $n = 1$ ist $c = 8$ und $S(a) = N(c) = N(8) = 9 \cdot 8 + 36 = 108 = 7 \cdot a + 21$.

Da kein natürliches a diese Gleichung löst, ist $n > 1$.

Für $n = 2$ ist $c = 16$ und $S(a) = N(c) = N(16) = 9 \cdot 16 + 36 = 180 = 7 \cdot a + 21$.

Da kein natürliches a diese Gleichung löst, ist $n > 2$.

Für $n = 3$ ist $c = 24$ und $S(a) = N(c) = N(24) = 9 \cdot 24 + 36 = 252 = 7 \cdot a + 21$.

Diese Gleichung wird von $a = 33$ gelöst.

Da $8 \cdot b + 28 = A(b) = N(24) = S(33) = 252$ die Lösung $b = 28$ besitzt, ist gezeigt, dass Robert den Wert 252 berechnet hat.

Alternative zur letzten Überlegung:

Gleichsetzen von (1) und (3) liefert mit $c = 8 \cdot n$:

$$7 \cdot (a+3) = 9 \cdot (c+4) = 9 \cdot (8 \cdot n+4) = 36 \cdot (2 \cdot n+1)$$

Da 7 und 36 teilerfremd sind, muss $a+3$ ein Vielfaches vom 36 sein.

Der kleinste a -Wert, für den dies eintritt, ist $a=33$.

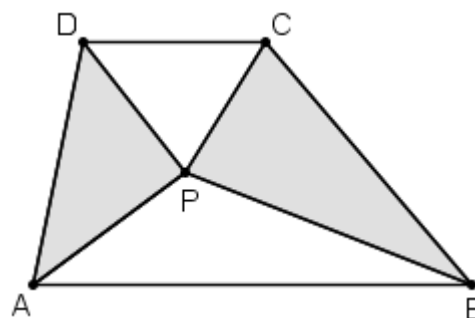
In diesem Fall ist $2 \cdot n+1 = 7$, d. h. $n=3$.

Damit erhält man $c = 8 \cdot 3 = 24$. Dies in (4) eingesetzt, ergibt $b=28$.

Aufgabe 4

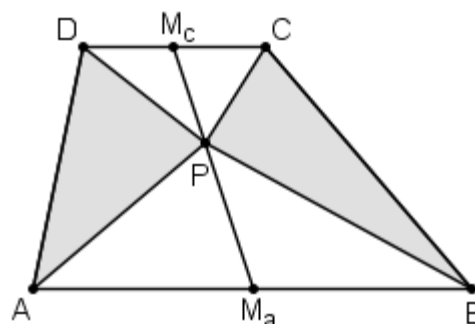
Gegeben ist ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $[AB]$ und $[CD]$.

Bestimme die Lage aller Punkte P im Inneren dieses Trapezes, für die die Dreiecke APD und CPB den gleichen Flächeninhalt haben.



Lösung:

Genau dann, wenn P auf der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte M_a und M_c der Seiten $[AB]$ und $[CD]$ des Trapezes liegt, haben die markierten Dreiecke den gleichen Flächeninhalt.



1. Beweisvorschlag:

Vorüberlegungen:

(*) Da M_a und M_c die Mittelpunkte der Seiten $[AB]$ und $[CD]$ sind, sind die Grundseiten der Teiltrapeze AM_aM_cD und M_aBCM_c gleich lang. Beide Trapeze haben außerdem dieselbe Höhe (Abstand der Parallelen AB und CD). Daher haben die Teiltrapeze den gleichen Flächeninhalt $A_{\text{TeilTrapez}}$.

$A_{\text{TeilTrapez}}$ ist die Hälfte des Flächeninhalts des Trapezes $ABCD$.

(**) Die Dreiecke AM_aP und M_aBP stimmen in der Grundseitenlänge $\overline{AM_a}$ und $\overline{M_aB}$ sowie der zugehörigen Höhe überein und haben damit den gleichen Flächeninhalt. Das Gleiche gilt analog für die Dreiecke DPM_c und CM_cP .

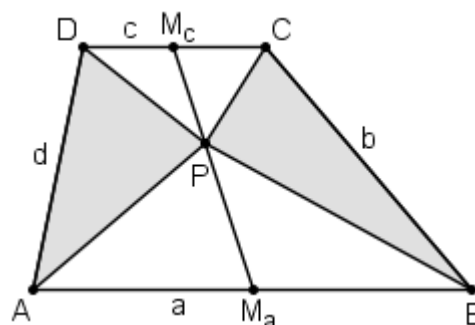
1. Behauptung:

Wenn P auf $[M_aM_c]$ liegt, dann sind die Flächeninhalte der Dreiecke APD und BCP gleich groß.

Beweis der 1. Behauptung:

Aus den Vorüberlegungen (*) und (**) folgt

$$\begin{aligned} A_{\Delta APD} &= A_{\text{TeilTrapez}} - A_{\Delta AM_aP} - A_{\Delta DPM_c} \\ &= A_{\text{TeilTrapez}} - A_{\Delta M_aBP} - A_{\Delta CM_cP} = A_{\Delta BCP}. \end{aligned}$$



2. Behauptung:

Wenn die Flächeninhalte der Dreiecke APD und BCP gleich groß sind, dann liegt P auf $[M_aM_c]$.

Beweis der 2. Behauptung:

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und zeigen, dass wenn P nicht auf $[M_aM_c]$ liegt, dann die Flächeninhalte der Dreiecke APD und BCP nicht gleich groß sind.

Sei also angenommen der Punkt P liegt im Inneren des Trapezes ABCD, aber nicht auf der Strecke $[M_aM_c]$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass P im „rechten“ Teiltrapez M_aBCM_c liegt.

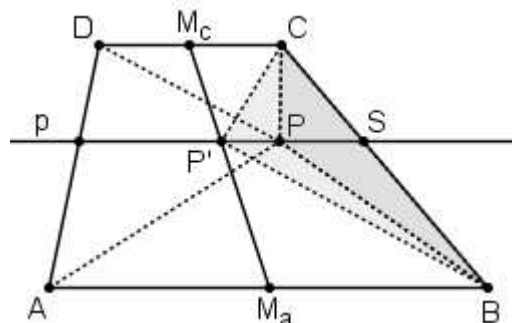
Die Parallele p zu AB durch P schneidet M_aM_c in P'. Dann liegt P im Inneren des Dreiecks BCP'. Somit ist der Flächeninhalt des Dreiecks BCP kleiner als der Flächeninhalt des Dreiecks BCP'.

Analog ist der Flächeninhalt von APD größer als der Flächeninhalt von AP'D.

Nach der 1. Behauptung sind aber die Flächeninhalte von AP'D und BCP' gleich groß. Zusammenfassend gilt also:

$$A_{\Delta APD} > A_{\Delta AP'D} = A_{\Delta BCP'} > A_{\Delta BCP}.$$

Somit sind die Flächeninhalte der Dreiecke APD und BCP nicht gleich groß und die 2. Behauptung ist bewiesen.

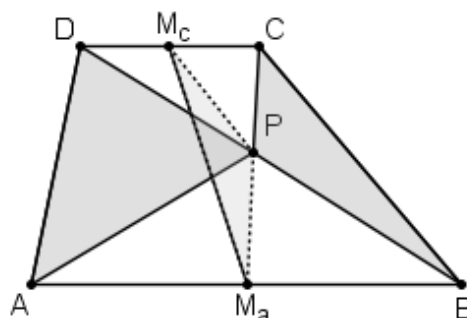


Variante zum Beweis der 2. Behauptung:

Sei P ein Punkt im Trapez mit $A_{\Delta APD} = A_{\Delta BCP}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass P in der rechten Hälfte des Trapezes liegt, ansonsten schließen wir analog.

Der Flächeninhalt des Fünfecks AM_aPM_cD lässt sich dann auf zwei Arten zerlegen (s. Abb.):

- (1) $A_{AM_aPM_cD} = A_{\Delta APD} + A_{\Delta AM_aP} + A_{\Delta DPM_c}$ und
- (2) $A_{AM_aPM_cD} = A_{AM_aM_cD} + A_{MaPM_c} = A_{TeilTrapez} + A_{MaPM_c}$



Analog gilt für das Fünfeck M_aBCM_cP :

- (1*) $A_{M_aBCM_cP} = A_{\Delta BCP} + A_{\Delta MaBP} + A_{\Delta CM_cP}$ und
- (2*) $A_{M_aBCM_cP} = A_{AM_aM_cD} - A_{MaPM_c} = A_{TeilTrapez} - A_{MaPM_c}$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(3) A_{\Delta APD} + A_{\Delta AM_aP} + A_{\Delta DPM_c} = A_{TeilTrapez} + A_{MaPM_c},$$

ebenso folgt aus (1*) und (2*):

$$(3*) A_{\Delta BCP} + A_{\Delta MaBP} + A_{\Delta CM_cP} = A_{TeilTrapez} - A_{MaPM_c}.$$

Wegen der Annahme $A_{\Delta APD} = A_{\Delta BCP}$ und wegen $A_{\Delta AM_aP} = A_{\Delta MaBP}$ bzw.

$A_{\Delta DPM_c} = A_{\Delta CM_cP}$ (Vorüberlegung (**)) stimmen aber die linken Seiten der Gleichungen (3) und (3*) überein. Folglich müssen auch die rechten Seiten übereinstimmen, d.h.

$$A_{TeilTrapez} + A_{MaPM_c} = A_{TeilTrapez} - A_{MaPM_c}.$$

Daraus folgt: $A_{MaPM_c} = 0$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks M_aPM_c kann aber nur verschwinden, wenn P auf M_aM_c liegt, so dass die 2. Behauptung bewiesen ist.

2. Beweisvorschlag:

Variante für die Angabe der Lösungsmenge:

Die Lage der Punkte innerhalb des Trapezes kann auf ganz verschiedene Arten beschrieben werden. Hier eine Variante:

Fall 1: Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm. Dann haben die markierten Dreiecke genau dann denselben Flächeninhalt, wenn P auf der Mittelparallelen m_{db} zu den Seiten d und b liegt.

Fall 2: Das Viereck ABCD ist kein Parallelogramm. Dann schneiden sich die Geraden AD und BC im Punkt Q. Sei R der Diagonalschnittpunkt des Trapezes ABCD.

Die markierten Dreiecke haben genau dann denselben Flächeninhalt, wenn P im Inneren des Trapezes auf der Geraden QR liegt.

Beweis von Fall 1: In diesem Fall ist klar, dass die beiden Dreiecke gleichen Flächeninhalt haben, da hier die beiden Dreiecke gleich lange Grundseiten $d = b$ haben und gleich lange zugehörige Höhen.

Umgekehrt wird wie in der 2. Behauptung des 1. Beweisvorschlags bewiesen, dass nur für Punkte P auf der Mittelparallelen m_{db} die Flächeninhalte gleich sind.

Beweis von Fall 2:

Zunächst gilt die Flächengleichheit der Dreiecke APD und BCP für den Diagonalschnittpunkt $P = R$:

Es ist $A_{\Delta ARD} = A_{\Delta ABD} - A_{\Delta ABR}$ und

$A_{\Delta BCR} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta ABR}$.

Außerdem ist $A_{\Delta ABD} = A_{\Delta ABC}$, da beide Dreiecke die gleiche Grundseite [AB] und die gleiche zugehörige Höhe haben.

Somit folgt $A_{\Delta ARD} = A_{\Delta BCR}$.

Insbesondere folgt nun aus dieser Flächengleichheit

$$\frac{d \cdot h_{R,A}}{2} = \frac{b \cdot h_{R,B}}{2} \text{ bzw. } \frac{h_{R,A}}{h_{R,B}} = \frac{b}{d} \quad (\#).$$

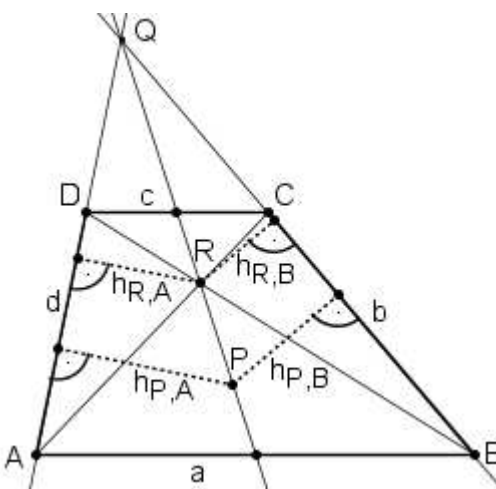
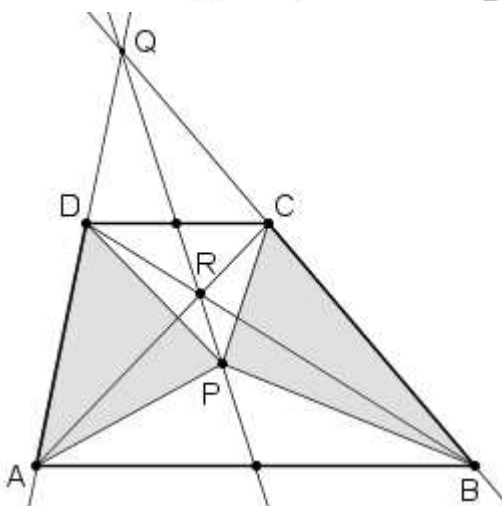
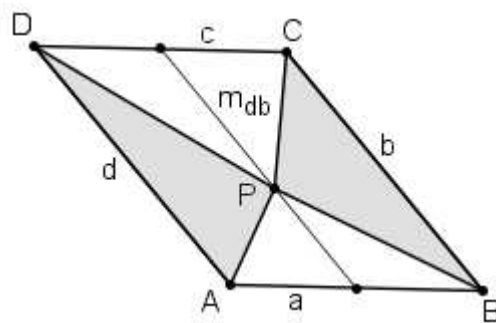
Wir zeigen nun, dass für jeden anderen Punkt P auf QR ebenfalls die Flächengleichheit $A_{\Delta APD} = A_{\Delta BCP}$ gilt.

Nach dem Strahlensatz gilt für die jeweils parallelen Höhen: $\frac{h_{P,A}}{h_{R,A}} = \frac{h_{P,B}}{h_{R,B}}$ oder umge-

schrieben $\frac{h_{P,A}}{h_{P,B}} = \frac{h_{R,A}}{h_{R,B}}$. Aus (#) ergibt sich damit $\frac{h_{R,A}}{h_{R,B}} = \frac{b}{d} = \frac{h_{P,A}}{h_{P,B}}$.

Daraus folgt $\frac{d \cdot h_{P,A}}{2} = \frac{b \cdot h_{P,B}}{2}$, d.h. genau die Flächengleichheit $A_{\Delta APD} = A_{\Delta BCP}$.

Umgekehrt wird wie in der 2. Behauptung des 1. Beweisvorschlags durch Widerspruch bewiesen, dass nur für Punkte P auf der Mittelparallelen (Fall 1) bzw. auf der Geraden QR (Fall 2) die Flächengleichheit $A_{\Delta APD} = A_{\Delta BCP}$ gilt.



Aufgabe 5

Ein gerader Schnitt zerlegt ein Dreieck ABC in zwei Teildreiecke, die zueinander ähnlich, aber nicht kongruent sind.

Zeige: Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.

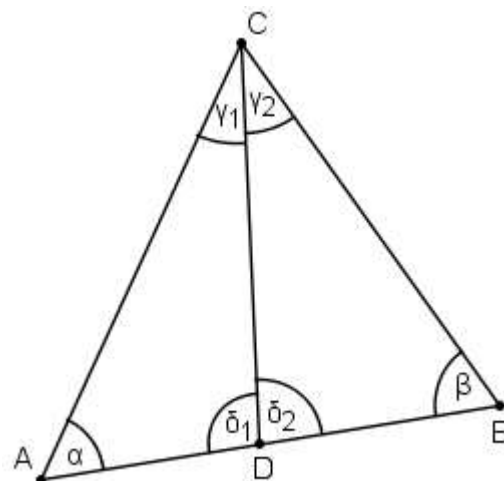
Hinweis: Zwei Dreiecke heißen zueinander ähnlich, wenn sie in ihren Innenwinkeln übereinstimmen.

Beweisvorschlag:

Nachdem der Schnitt ausgeführt wurde, liegen zwei Dreiecke vor; also musste der Schnitt durch einen Eckpunkt gegangen sein, weil ansonsten ein Viereck entstanden wäre.

Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Schnitt durch den Eckpunkt C führt. In der folgenden Abbildung ist die entstehende Situation dargestellt. Der Schnitt wurde entlang der Strecke CD ausgeführt.

Nach Aufgabenstellung ist Dreieck ADC ähnlich zu Dreieck DBC . Der Innenwinkel δ_1 von ADC muss also mit einem der drei Innenwinkel von DBC übereinstimmen. Also gibt es für δ_1 drei Möglichkeiten:



1. Fall: $\delta_1 = \delta_2$

Da $\delta_1 + \delta_2 = 180^\circ$, folgt nun $\delta_1 = \delta_2 = 90^\circ$. Der Innenwinkel γ_1 von ADC muss mit einem der beiden verbleibenden Innenwinkel von DBC , also mit γ_2 oder β übereinstimmen.

1. Unterfall: $\gamma_1 = \gamma_2$

Dann haben die Dreiecke ADC und DBC zwei gleiche Winkel und eine gemeinsame Seite $[CD]$. Nach dem Kongruenzsatz WSW sind die Dreiecke ADC und DBC also kongruent. Nach Aufgabenstellung sollen die Teildreiecke aber nicht kongruent sein, es ergibt sich in diesem Unterfall also ein Widerspruch.

2. Unterfall: $\gamma_1 = \beta$

Aus dem Winkelsummensatz für die beiden Teildreiecke folgt auch $\alpha = \gamma_2$.

Aus $\delta_1 = 90^\circ$ folgt mit dem Winkelsummensatz für das Dreieck ADC : $\gamma_1 = 90^\circ - \alpha$.

Folglich ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = (90^\circ - \alpha) + \alpha = 90^\circ$.

Das Dreieck ABC ist also tatsächlich rechtwinklig.

2. Fall: $\delta_1 = \beta$

Dann wären die Strecken $[DC]$ und $[BC]$ parallel, denn δ_1 und β sind gleiche Stufenwinkel. Das Dreieck DBC kann aber nicht zwei parallele Seiten haben. Somit liegt ein Widerspruch vor.

3. Fall: $\delta_1 = \gamma_2$

Dann wären die Strecken $[CB]$ und $[AD]$ parallel, denn δ_1 und γ_2 sind gleiche Wechselwinkel. Damit wären auch $[CB]$ und $[BD]$ parallel. Das Dreieck DBC kann aber nicht zwei parallele Seiten haben. Somit liegt ein Widerspruch vor.

Von allen möglichen Fällen ist nur derjenige verblieben, in dem $\gamma = 90^\circ$ war.

Das Dreieck ABC ist also rechtwinklig.

Aufgabe 6

Bestimme alle natürlichen Zahlen a und b , für die $\frac{1}{a} + \frac{a}{b} + \frac{1}{ab} = 1$ gilt.

Lösung:

Es gibt zwei Zahlenpaare $(a | b)$, die Lösungen der Gleichung sind, nämlich $(2 | 5)$ und $(3 | 5)$.

1. Beweisvorschlag:

Sowohl a als auch b dürfen nicht 0 sein, da für 0 der Term der linken Seite der Gleichung nicht definiert ist.

Multipliziert man beide Seiten der gegebenen Gleichung mit ab , so erhält man wegen $ab \neq 0$:

$$b + a^2 + 1 = ab \Leftrightarrow ab - b = a^2 + 1 \Leftrightarrow b(a - 1) = a^2 + 1$$

Für $a = 1$ ist die linke Seite der letzten Gleichung 0, die rechte Seite ist 2, also ergibt sich ein Widerspruch. Folglich muss $a \neq 1$ gelten.

Für $a > 1$ kann man beide Seiten der Gleichung $b(a - 1) = a^2 + 1$ durch $a - 1$ dividieren. Dann ergibt sich

$$b = \frac{a^2 + 1}{a - 1} = \frac{a^2 - 1 + 1 + 1}{a - 1} = \frac{(a - 1) \cdot (a + 1) + 2}{a - 1} = a + 1 + \frac{2}{a - 1}.$$

Da b eine natürliche Zahl ist, muss $\frac{2}{a - 1}$ ebenfalls eine ganze Zahl sein.

Also muss wegen $a > 1$ die Zahl $a - 1$ ein positiver Teiler von 2 sein. Es kann also $a - 1$ nur 1 oder 2 sein.

1. Möglichkeit: $a - 1 = 1$.

$$\text{Dann ist } a = 2 \text{ und } b = \frac{a^2 + 1}{a - 1} = \frac{3^2 + 1}{3 - 1}, \text{ also } b = 5.$$

2. Möglichkeit: $a - 1 = 2$.

$$\text{Dann ist } a = 3 \text{ und } b = \frac{a^2 + 1}{a - 1} = \frac{2^2 + 1}{2 - 1}, \text{ also } b = 5.$$

Somit kommen für $(a | b)$ nur die beiden Lösungen $(2 | 5)$ und $(3 | 5)$ in Frage.

Durch Einsetzen in die in der Aufgabe gegebene Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{a}{b} + \frac{1}{ab} = 1$ ergibt sich, dass sowohl $(2 | 5)$ als auch $(3 | 5)$ Lösungen der Aufgabe sind.

Variante zum 1. Beweisvorschlag:

Wie im 1. Beweisvorschlag erhält man $a \neq 1$ und $b = \frac{a^2 + 1}{a - 1}$.

Man untersucht also den Term $\frac{a^2 + 1}{a - 1}$ für wachsende $a > 1$. Dies geschieht in der folgenden Tabelle:

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{a^2 + 1}{a - 1}$	5	5	$5\frac{2}{3}$	6,5	7,4	$8\frac{1}{3}$	$9\frac{2}{7}$	10,25	$11\frac{2}{9}$

Es fällt auf, dass der Abstand des Terms $\frac{a^2+1}{a-1}$ zu $a+1$ für wachsendes a kontinuierlich kleiner wird. Dies ergibt sich rechnerisch wie folgt:

$$\frac{a^2+1}{a-1} - (a+1) = \frac{a^2+1}{a-1} - \frac{(a+1)(a-1)}{a-1} = \frac{(a^2+1) - (a^2-1)}{a-1} = \frac{2}{a-1}.$$

Der Ausdruck $\frac{2}{a-1}$ wird immer kleiner für wachsendes a , es nähert sich also $\frac{a^2+1}{a-1}$ an $a+1$ an.

Für $a > 3$ ist hierbei $\frac{a^2+1}{a-1} < a+2$, also liegt $\frac{a^2+1}{a-1}$ zwischen den natürlichen Zahlen

$a+1$ und $a+2$. Somit kann für $a > 3$ der Term $\frac{a^2+1}{a-1}$ keine natürliche Zahl sein, so

dass nur noch $a = 2$ bzw. $a = 3$ übrig bleibt. Daraus ergeben sich die oben angegebenen Lösungen.

2. Beweisvorschlag:

Sowohl a als auch b dürfen nicht 0 sein, da für 0 der Term der linken Seite der Gleichung nicht definiert ist.

Multipliziert man beide Seiten der gegebenen Gleichung mit ab , so erhält man wegen $ab \neq 0$

$$b + a^2 + 1 = ab \quad \text{bzw.} \quad a^2 - ab + (b + 1) = 0.$$

Letztere Gleichung ist eine quadratische Gleichung in a . In Abhängigkeit von b ergeben sich bei nicht negativer Diskriminante die Lösungen

$$a_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4(b+1)}}{2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4b - 4}}{2}.$$

Die Diskriminante $b^2 - 4b - 4 = (b-2)^2 - 8$ muss zudem eine Quadratzahl sein, wenn die Lösung a eine natürliche Zahl ergeben soll, also $(b-2)^2 - 8 = x^2$, für eine natürliche Zahl $x \geq 0$. Der Fall $x = 0$ kann ausgeschlossen werden, denn 8 ist keine Quadratzahl. Daraus ergibt sich $(b-2)^2 - x^2 = (b-2-x)(b-2+x) = 8$.

Man hat also 8 als Produkt von zwei ganzen Zahlen $b-2-x$ und $b-2+x$ dargestellt. Die Differenz dieser beiden Zahlen ist $(b-2+x) - (b-2-x) = 2x$, also gerade.

Da b und x beide positiv sind, muss $b-2+x \geq 0$ gelten, also müssen die beiden Faktoren $b-2-x$ und $b-2+x$ positiv sein.

Aufgrund der möglichen Faktorisierungen von 8 als Produkt von zwei Zahlen ergibt sich daraus, dass die beiden Faktoren 4 und 2 sind.

Somit gilt $b-2-x = 2$ und $b-2+x = 4$. Daraus folgt $x = 1$ und $b = 5$.

Also ist nur im Fall $b = 5$ die Diskriminante $b^2 - 4b - 4$ eine Quadratzahl, nämlich 1.

Für $b = 5$ ergibt sich: $a_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$, also $a_1 = 2$ und $a_2 = 3$.

Wir erhalten also die beiden möglichen Lösungspaare $(2 | 5)$ und $(3 | 5)$ für $(a | b)$.

Durch Einsetzen in die gegebene Ausgangsgleichung ergibt sich, dass sowohl $(2 | 5)$ als auch $(3 | 5)$ Lösungen der Aufgabe sind.