13. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Lösungsbeispiele

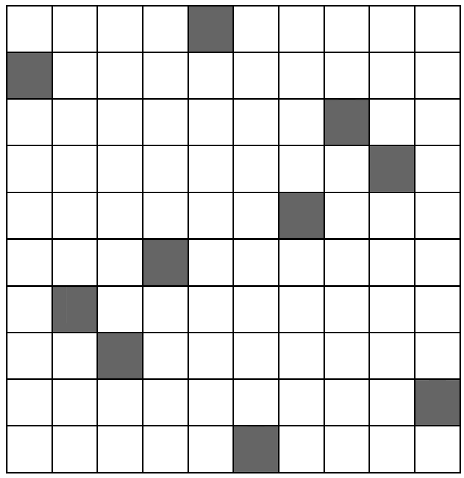
für die Aufgaben der 2. Runde 2010/2011

Aufgabe 1

In einem 10x10-Gitter mit quadratischen Feldern werden 10 Spielsteine so gesetzt, dass in jeder Spalte und jeder Zeile genau ein Feld belegt wird und dabei das Gitter mit den Spielsteinen ein punktsymmetrisches Muster bildet.

Zwei Muster gelten als verschieden, wenn sie nicht durch Drehung ineinander übergeführt werden können.

Wie viele verschiedene Muster gibt es?



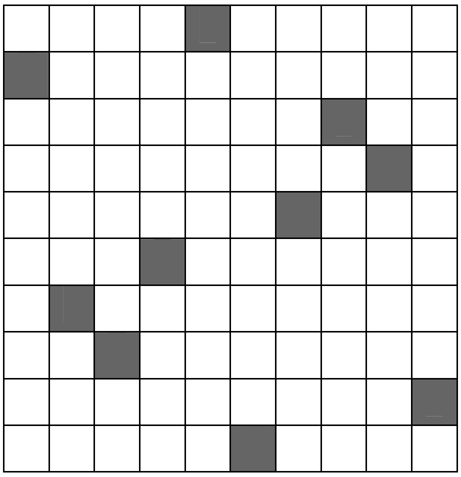
Lösung:

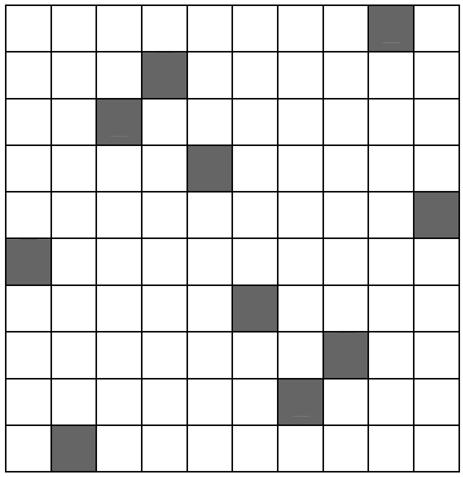
Es gibt (10 · 8 · 6 · 4 · 2) : 2 = 1920 verschiedene Muster.

Beweismöglichkeit:

Für den Spielstein in der ersten Spalte gibt es 10 Möglichkeiten.
Mit diesem ersten Spielstein liegt wegen der Punktsymmetrie auch fest, auf welches Feld in der 10. Spalte ein Spielstein gesetzt werden muss. Insgesamt sind damit schon zwei Spalten und zwei Zeilen belegt.
Für die Wahl des Feldes in der 2. Spalte bleiben damit nur noch 8 Möglichkeiten. Mit seiner Wahl liegt auch das Feld in der 9. Spalte fest und es wurden insgesamt zwei weitere Zeilen belegt.
Für die Wahl des Felds in der 3. Spalte bleiben damit nur noch 6 Möglichkeiten. Mit seiner Wahl liegt auch das Feld in der 8. Spalte fest und zwei weitere Zeilen wurden belegt.
Für das Feld in der 4. Spalte bleiben damit nur noch 4 Möglichkeiten. Mit seiner Wahl liegt das Feld in der 6. Spalte fest und zwei weitere Zeilen werden belegt. Für die Wahl des Feldes in der 5. Spalte bleiben nun nur noch zwei Möglichkeiten. Und mit seiner Festlegung liegt auch das Feld in der 6. Spalte fest.

Insgesamt erhält man damit 10 · 8 · 6 · 4· 2 = 3840 Muster.
Nicht alle diese Muster sind aber verschieden, da sie durch eine Drehung ineinander überführt werden können.
So gehen beispielsweise die folgenden beiden Muster durch eine Drehung um 90° ineinander über:

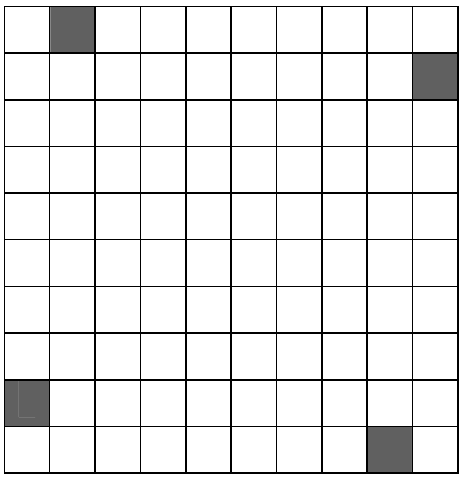




Analog gibt es zu jedem Muster M ein Muster M*, das durch Drehung um 90° im Uhrzeigersinn aus M entsteht. Dabei gelten folgende Eigenschaften:

(1) M ist nicht mit M* identisch.

Wenn nämlich ein Muster bei einer Drehung um 90° in sich selbst überginge, so wären mit jedem belegten Feld auch drei weitere Felder belegt, die aus dem ersten Feld durch drei Drehungen um 90° entstehen. Wäre z.B. in der obersten Reihe das zweite Feld von links von einem Spielstein belegt, so müssten aufgrund der Drehsymmetrie die folgenden vier Felder belegt sein:



Insgesamt müsste bei einem Muster, das drehsymmetrisch bezüglich einer 90°-Drehung ist, die Anzahl der belegten Felder durch 4 teilbar sein. Da aber gemäß Aufgabenstellung nur genau 10 Spielsteine gesetzt werden und 10 nicht durch 4 teilbar ist, ist ein solches Muster unmöglich.

(2) Es ist M** = M und analog M*** = M*.

Dreht man ein Muster zweimal um 90°, so entspricht das einer Drehung um 180°, also genau einer Punktspiegelung. Da die Muster aber punktsymmetrisch sind, werden sie durch Punktspiegelung in sich selbst überführt.

Somit treten die 3840 oben beschriebenen Muster immer in Paaren (M;M*) auf. Jedes Paar hat nach (1) genau zwei Muster. Weder M noch M* kommen wegen (2) in einem anderen Paar noch einmal vor. Nach Aufgabenstellung gelten die Muster eines Paares nicht als verschieden.

Es gibt also 3840 : 2 = 1920 verschiedene Muster.

Aufgabe 2

Priscilla schreibt an jede Ecke eines n-seitigen Prismas genau eine der Zahlen 1, 2, 3, ..., 2n, wobei keine der Zahlen mehrfach vorkommt. Auf jede Fläche des Prismas schreibt sie danach die Summe der Zahlen, die an den Ecken dieser Fläche stehen.

Für welche Werte von n kann Priscilla die Ecken so beschriften, dass auf allen Seitenflächen und mindestens einer der beiden Deckflächen die gleiche Zahl steht?

Lösung:

Die gesuchten Werte von n sind 3, 4, 5 und 6.

Beweismöglichkeit:

Die Summe aller 2n Zahlen, die Priscilla an die Ecken des n-seitigen Prismas schreibt, ist $1+2+3+....+2n = \frac{2n\cdot(2n+1)}{2} = n\cdot(2n+1)$ (Summenformel von Gauß).

Jede Zahl 1, 2, ..., 2n gehört zu genau zwei der n Seitenflächen. Wenn $S_1,....,S_n$ die Flächenzahlen der n Seitenflächen sind, so ist die Summe der Flächenzahlen also doppelt so groß wie die Summe der Eckenzahlen, also $S_1+....+S_n = 2\cdot n\cdot(2n+1)$.

Sind die Flächenzahlen der n Seitenflächen alle gleich groß, so gilt für $S = S_1 = ... = S_n$:

$$S = \left(2n\cdot\left(2\cdot n+1\right)\right) : n = 2(2n+1) = 4n+2.$$

Die Flächenzahl D einer Deckfläche ist mindestens so groß wie $1+2+...+n = \frac{n}{2}\cdot\left(n+1\right)$: Die n kleinstmöglichen Zahlen, die an den n Ecken einer Deckfläche stehen können, sind nämlich die Zahlen 1,....,n.

Ist nun $S = S_1 = ... = S_n = D$, so muss also $\frac{n}{2}\cdot\left(n+1\right) \le 4\cdot n+2$ gelten.

Daraus ergibt sich

$$n^2+n \le 8\cdot n+4 \quad\Leftrightarrow\quad n^2-7\cdot n \le 4 \quad\Leftrightarrow\quad \left(n-3{,}5\right)^2 \le 4+3{,}5^2$$
$$\Leftrightarrow\quad \left(n-3{,}5\right)^2 \le 16{,}25 \quad\Leftrightarrow\quad n \le 3{,}5+\sqrt{16{,}25} \approx 7{,}53 < 8.$$

Somit erhält man: $n \le 7$.

Da ein Prisma mindestens drei Seitenflächen hat, ergibt sich: $3 \le n \le 7$.

Untersuchung des Falls n=7:

Hier ist: $S = 4n+2 = 30$.

Seien $a_1, a_2, ..., a_7$ bzw. $b_1, b_2, ..., b_7$ die Eckenzahlen der beiden Deckflächen, wobei die Ecken zu a_i und b_i jeweils durch eine Seitenkante verbunden sind. Außerdem sei $s_i = a_i + b_i$ $(1 \le i \le 7)$ die Summe zweier durch eine Kante verbundener Eckenzahlen.

Somit ergibt sich:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & a_5 & + & a_6 & + & a_7 & = & 30 \\
+ & & + & & + & & + & & + & & + & & + & & \\
b_1 & + & b_2 & + & b_3 & + & b_4 & + & b_5 & + & b_6 & + & b_7 & & \\
= & & = & & = & & = & & = & & = & & = & & \\
s_1 & & s_2 & & s_3 & & s_4 & & s_5 & & s_6 & & s_7 & &
\end{array}$$

Da alle Flächenzahlen der Seitenflächen gleich 30 sind, ist

$$S = s_1+s_2 = s_2+s_3 = s_3+s_4 = s_4+s_5 = s_5+s_6 = s_6+s_7 = s_7+s_1 = 30.$$

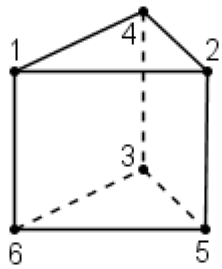
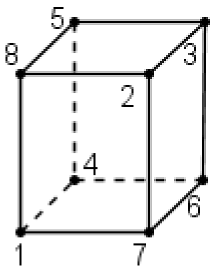
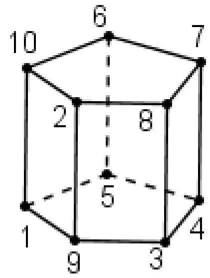
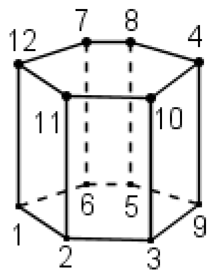
Daraus ergibt sich $s_1 = s_3 = s_5 = s_7 = s_2 = s_4 = s_6 = 15$.

Hat nun auch eine Deckfläche die Flächenzahl D = 30, so ist 30 die Summe von sieben verschiedenen Zahlen. Da bereits 1+2+3+4+5+6+7 = 28 ist, ergeben sich nur die beiden folgenden Möglichkeiten: 1+2+3+4+5+6+9 = 30 und 1+2+3+4+5+7+8 = 30.

Es muss also entweder 1,2,3,4,5,**6,9** oder 1,2,3,4,5,**7,8** an den Ecken dieser Deckfläche stehen.

Andererseits müssen 6 und 9 bzw. 7 und 8 an Ecken stehen, die durch eine Seitenkante verbunden sind, da 6 + 9 = 15 und 7 + 8 = 15. Weder 6 und 9 noch 7 und 8 können also an Ecken derselben Deckfläche stehen.
Aus diesem Widerspruch ergibt sich, dass n = 7 unmöglich ist.
Man hat also nur noch $3 \le n \le 6$ zu betrachten.

Realisierungen für die Werte von n mit $3 \le n \le 6$:

n=3: S=14 D_{Boden}=14	n=4: S=18 D_{Boden}=18	n=5: S=22 D_{Boden}=22	n=6: S=26 D_{Boden}=26
			

Für n = 3,4,5,6 kann also Priscilla die Ecken wie gewünscht beschriften.

Beweismöglichkeit 2:

Da jede Ecke und damit auch jeder der Zahlen 1, 2, ..., 2·n zu genau zwei Seiten und alle n Seiten die gleiche Seitenzahl S_n haben, gilt:

$$S_n = 2 \cdot \frac{2 \cdot n}{2} \cdot (2 \cdot n + 1) : n = 4 \cdot n + 2 \qquad (1)$$

Werden die Kanten zwischen den Deckflächen umlaufend von 1 bis n durchnummeriert und sind k_1, k_2, ..., k_n ihre Kantenzahlen (= Summe der zwei Zahlen, die an den Enden dieser Kante stehen), so gilt:

$$S_n = k_1 + k_2 = k_2 + k_3 = k_3 + k_4 = ... = k_n + k_1$$

Daraus folgt: $k_1 = k_3 = k_5 = ... = k_u$ und $k_2 = k_4 = ... = k_g$,

d. h. es gibt zwei Kantenzahlen k_u und k_g, die sich abwechseln.

Ist n ungerade, so gilt $k_n = k_u$. Daraus folgt aus (1) und $S_n = k_n + k_1 = k_1 + k_2$:

$2 \cdot k_u = k_u + k_g \Leftrightarrow k_u = k_g = S_n : 2 = (4 \cdot n + 2) : 2 = 2 \cdot n + 1$ (2)

Wir konstruieren nun Belegungen der Ecken des Prismas mit den Zahlen 1, 2, ..., 2·n für $3 \le n \le 6$ ($n = 3$ ist die kleinste Kantenzahl, die ein Prisma haben kann) nach dem folgenden Verfahren:

(I) Wir verteilen auf die oberen Eckpunkte der Kanten 1, 2, ..., n die Zahlen 1, 2, ..., n und auf die unteren Eckpunkte die Zahlen $2 \cdot n$, ..., $n+1$, so dass alle Kantenzahlen den Wert $2 \cdot n + 1$ haben.

(II) Wir vertauschen die Eckenzahlen einer Kante (Die Seitenzahl wird dadurch nicht geändert.), bis die Deckflächenzahl $D_n = S_n$ ist.

Für $n = 3$ erhält man mit $S_3 = 4 \cdot 3 + 2 = 14$:

1	2	3
6	5	4

$\xrightarrow[\text{Kanten 1 und 2}]{\text{Vertauschen in}}$

6	5	3
1	2	4

ergibt $D_3 = 14$

Für $n = 4$ erhält man mit $S_4 = 4 \cdot 4 + 2 = 18$:

1	2	3	4
8	7	6	5

$\xrightarrow[\text{Kanten 2 und 3}]{\text{Vertauschen in}}$

1	7	6	4
8	2	3	5

ergibt $D_4 = 18$

Bemerkung: Auch Vertauschen in Kanten 1 und 4 ist möglich.

Für $n = 5$ erhält man mit $S_5 = 4 \cdot 5 + 2 = 22$:

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6

$\xrightarrow[\text{Kante 2}]{\text{Vertauschen in}}$

1	9	3	4	5
10	2	8	7	6

ergibt $D_5 = 22$

Für $n = 6$ erhält man mit $S_6 = 4 \cdot 6 + 2 = 26$:

1	2	3	4	5	6
12	11	10	9	8	7

$\xrightarrow[\text{Kante 4}]{\text{Vertauschen in}}$

1	2	3	9	5	6
12	11	10	4	8	7

$D_6 = 26$

Für $n = 7$ ist $S_7 = 4 \cdot 7 + 2 = 30$. Da n ungerade ist, müssen nach (2) alle Kantenzahlen 15 sein. Damit ergibt sich entsprechend (I):

1	2	3	4	5	6	7
14	13	12	11	10	9	8

Die kleinste Deckflächenzahl ist $D_{7,min} = 1 + ... + 7 = 28$.

Vertauschen in Kante 7 liefert: $D_7 = 1 + ... + 6 + 8 = 29 < 30 = S_7$

Da in den anderen Kanten die Differenz der Eckenzahlen größer als 2 ist, bedeutet ein Vertauschen in dieser Kante, dass $D_7 > 30 = S_7$ ist.

Damit ist gezeigt, dass die Ecken eines 7-seitiges Prismas nicht in der geforderten Weise mit Zahlen 1, 2, ..., 14 belegt werden können.

Für $n = 8$ ist $S_8 = 4 \cdot 8 + 2 = 34$ und $D_{8,min} = 1 + 2 + ... + 8 = 36 > S_8$.

Für $n \ge 8$ gilt bei Übergang von n auf n+1:

- $S_{n+1} - S_n = 4 \cdot (n+1) + 2 - (4 \cdot n + 2) = 4$, d.h. die Seitenzahl vergrößert sich um 4,
- $D_{n+1,min} - D_{n,min} = n + 1 > 4$, d.h. die Deckflächenzahl vergrößert sich um mehr als 4.

Damit ist gezeigt, dass $D_{n,min} > S_n$ für $n \ge 8$.

Demnach ist das gestellte Problem nur für $3 \le n \le 6$ lösbar.

Aufgabe 3

In der Ebene sind drei Punkte K, L und M gegeben, die nicht auf einer Geraden liegen.

Konstruiere vier Punkte A, B, C und D so, dass die Strecken [AB], [BC] und [CD] gleich lang sind und K der Mittelpunkt von [AB], L der Mittelpunkt von [BC] und M der Mittelpunkt von [CD] ist. Begründe die Richtigkeit der Konstruktion.

1. Beweismöglichkeit:

Konstruktionsbeschreibung:

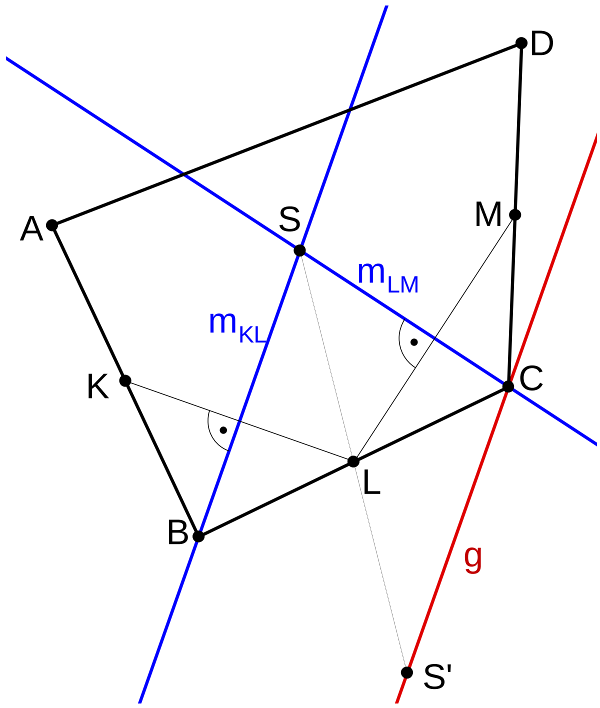
(1) Konstruiere die Mittelsenkrechten m_{LM} und m_{KL} der Strecken [LM] und [KL]. Ihr Schnittpunkt sei S. S existiert, da K, L und M nicht auf einer Geraden liegen.

(2) Spiegle S an L und erhalte S'.

(3) Konstruiere die Parallele g zu m_{KL} durch S'.

(4) g schneidet m_{LM} in C.

(5) B ist der Spiegelpunkt von C an L,
A ist der Spiegelpunkt von B an K,
D ist der Spiegelpunkt von C an M.



Begründung der Richtigkeit der Konstruktion:

Das Viereck SBS'C ist ein Viereck, in dem sich nach Konstruktion die Diagonalen im Punkt L schneiden und gegenseitig halbieren. Die Strecke [SC] geht also durch Punktspiegelung an L in die Strecke [S'B] über, also ist SC parallel zu S'B. Analog ist BS parallel zu CS'. Also ist SBS'C ein Parallelogramm.

Da S'C nach Konstruktion parallel zu m_{KL} verläuft und S auf m_{KL} liegt, muss auch B auf m_{KL} liegen.

Da B auf der Mittelsenkrechten m_{KL} von [KL] liegt, sind die Strecken [BL] und [BK] gleich lang.

Da L und K nach Konstruktion die Mittelpunkte von [AB] und [BC] sind, sind auch die Strecken [AB] und [BC] gleich lang.

Da C auf der Mittelsenkrechten m_{LM} von [LM] liegt, sind die Strecken [CL] und [CM] gleich lang.

Da L und M nach Konstruktion die Mittelpunkte von [BC] und [CD] sind, sind auch die Strecken [BC] und [CD] gleich lang.

Somit sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

2. Beweismöglichkeit:

Konstruktionsbeschreibung:

(1) Konstruiere die Mittelsenkrechten m_{KL} und m_{LM} von [KL] und [LM]. Nach Voraussetzung sind sie nicht parallel zueinander, sondern schneiden sich in einem Punkt S.

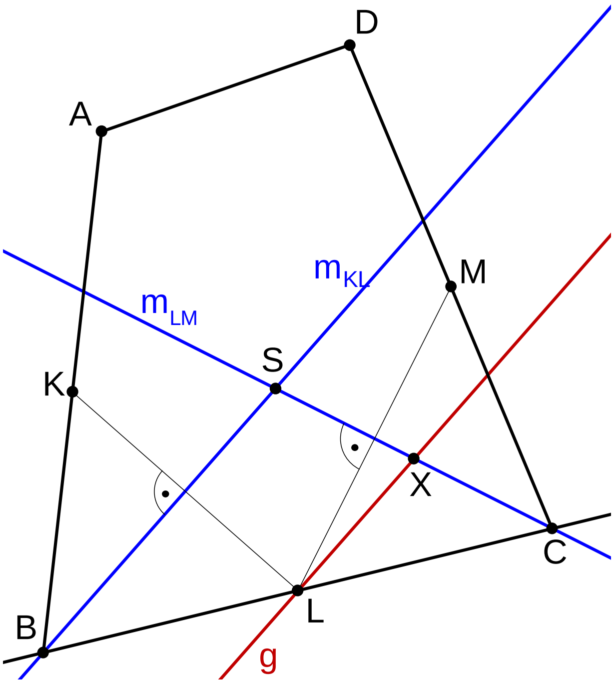
(2) Konstruiere die Parallele g zu m_{KL} durch L. Sie schneidet m_{LM} im Punkt X.

(3) Spiegele Punkt S an X. Wir erhalten den Punkt C.

(4) Die Gerade durch C und L schneidet die Mittelsenkrechte m_{KL} im Punkt B.

(5) Spiegele Punkt B an K. Der Spiegelpunkt ist A.

(6) Spiegele Punkt C an M. Der Spiegelpunkt ist D.



Begründung der Richtigkeit der Konstruktion:

Nach Konstruktionsschritt (2) ist X der Mittelpunkt der Strecke [SC]. Somit ist die Parallele g zu m_{KL} eine Mittelparallele im Dreieck BCS, insbesondere ist L der Mittelpunkt der Strecke [BC].

Nach Konstruktion ist auch K der Mittelpunkt der Strecke [AB] und M der Mittelpunkt der Strecke [CD].

Der Punkt B ist ein Punkt auf der Mittelsenkrechten m_{KL}.
Daher gilt: $\overline{AK} = \overline{KB} = \overline{BL} = \overline{LC}$.
Somit sind die Strecken [AB] und [BC] gleich lang.

Da S und X auf der Mittelsenkrechten m_{LM} liegen, ist auch C auf m_{LM}.
Daher gilt: $\overline{BL} = \overline{LC} = \overline{CM} = \overline{MD}$.
Somit sind auch die Strecken [BC] und [CD] gleich lang.

Folglich sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 4

Elvis möchte aus den Zahlen 1, 2, 3, …, 2011 einige so auswählen, dass keine zwei von ihnen einen gemeinsamen Teiler haben, der größer als 1 ist. Außerdem möchte er, dass keine der Zahlen die Form p^k mit einer Primzahl p und einer positiven ganzen Zahl k hat.

Wie viele Zahlen kann Elvis höchstens auswählen?

Lösung:

Die maximale Anzahl ist 14.

Beweismöglichkeit:

Elvis kann zum Beispiel die folgenden 14 Zahlen wählen:

1, 2·101 = **202**, 3·97 = **291**, 5·89 = **445**, 7·83 = **581**, 11·79 = **869**,
13·73 = **949,** 17·71 = **1207**, 19·67 = **1273**, 23·61 = **1403**, 29·59 = **1711**,
31·53 = **1643**, 37·47 = **1739**, 41·43 = **1783**.

Diese 14 Zahlen sind alle kleiner als 2011 und sie sind alle keine Primzahlpotenzen mit positivem Exponenten, denn es sind, bis auf die Zahl 1, Produkte von zwei verschiedenen Primzahlen. Die Zahl 1 kann aber nur als Primzahlpotenz mit Exponenten 0 geschrieben werden.
Damit ist bewiesen, dass Elvis mindestens 14 auswählen kann.

Wir müssen noch beweisen, dass Elvis keine 15 Zahlen mit den geforderten Eigenschaften auswählen kann.
Angenommen, Elvis hätte 15 solche Zahlen gefunden.
Bis auf die mögliche Ausnahme der Zahl 1 hat jede der 15 Zahlen einen kleinsten Primteiler. Es kommen also mindestens 14 kleinste Primteiler vor. Da diese 14 vorkommenden kleinsten Primteiler nach Voraussetzung alle verschieden sein müssen (sonst hätten zwei Zahlen von Elvis einen gemeinsamen Teiler größer als 1), können es nicht nur die ersten 13 Primzahlen (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41) sein, sondern es muss als kleinster Primteiler von (mindestens) einer von Elvis‘ Zahlen eine Primzahl vorkommen, die mindestens 43 ist.

Sei n eine der Zahlen von Elvis, deren kleinster Primteiler mindestens 43 ist. Weil n zwei verschiedene Primteiler haben muss (sonst wäre n eine Primzahlpotenz mit positivem Exponenten) hat n noch einen weiteren Primteiler, der nun größer als 43, als mindestens 47 sein muss. Somit gilt $n \geq 43 \cdot 47 = 2021$. Das ist ein Widerspruch zu $n \leq 2011$.

Also kann Elvis keine 15 derartigen Zahlen finden.