13. Landeswettbewerb Mathematik

Bayern

Lösungsbeispiele 1. Runde 2010/2011

Aufgabe 1

Sonja hat neun Karten, auf denen die neun kleinsten zweistelligen Primzahlen stehen. Sie will diese Karten so in eine Reihe legen, dass sich die Zahlen auf zwei nebeneinander liegenden Karten immer um eine Potenz der Zahl 2 unterscheiden.

Wie viele Möglichkeiten hat Sonja, ihre Karten anzuordnen?

Lösung:

Sonja hat die folgenden vier Möglichkeiten:
1) 41 – 37 – 29 – 31 – 23 – 19 – 11 – 13 – 17
2) 41 – 37 – 29 – 31 – 23 – 19 – 17 – 13 – 11
3) 11 – 13 – 17 – 19 – 23 – 31 – 29 – 37 – 41
4) 17 – 13 – 11 – 19 – 23 – 31 – 29 – 37 – 41

Beweis:

Die neun kleinsten zweistelligen Primzahlen sind:
11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41.

In der folgenden Tabelle sind die möglichen Differenzen zwischen je zwei der neun Zahlen zusammengestellt:

	11	**13**	**17**	**19**	**23**	**29**	**31**	**37**	**41**
11	-	*2*	*6*	*8*	*12*	*18*	*20*	*26*	*30*
13	*2*	-	*4*	*6*	*10*	*16*	*18*	*24*	*28*
17	*6*	*4*	-	*2*	*6*	*12*	*14*	*20*	*24*
19	*8*	*6*	*2*	-	*4*	*10*	*12*	*18*	*22*
23	*12*	*10*	*6*	*4*	-	*6*	*8*	*14*	*18*
29	*18*	*16*	*12*	*10*	*6*	-	*2*	*8*	*12*
31	*20*	*18*	*14*	*12*	*8*	*2*	-	*6*	*10*
37	*26*	*24*	*20*	*18*	*14*	*8*	*6*	-	*4*
41	*30*	*28*	*24*	*22*	*18*	*12*	*10*	*4*	-

Die vorkommenden Zweierpotenzen sind $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$.
Die Zweierpotenzen sind in der Tabelle farbig markiert.

Man erkennt, dass in der Zeile zur 41 nur ein Feld markiert ist, die 41 also nur mit 37 eine Differenz hat, die eine Zweierpotenz ist. Also kann die Karte mit der 41 keine zwei Nachbarkarten haben, sie muss entweder am Anfang oder am Ende der Kartenreihe

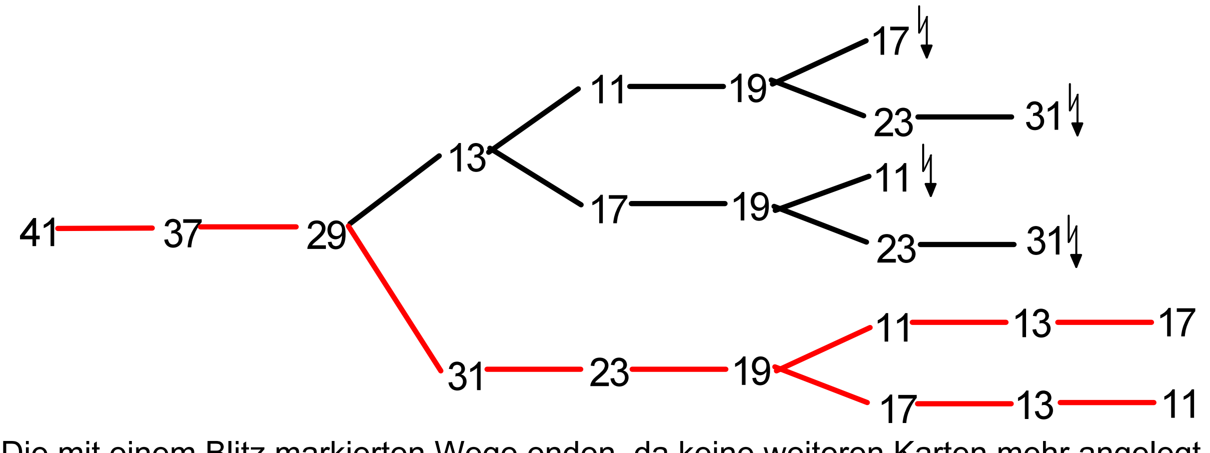
liegen. Da man die Karten ja auch umgekehrt anordnen kann, nehmen wir zunächst an, die 41 steht auf der ersten Karte. Dann muss, wie eben beobachtet, die 37 auf der zweiten Karte stehen.
In der Zeile zur Zahl 37 sind aber nur zwei Felder markiert, außer mit der 41 hat 37 nur zur 29 eine Zweierpotenz als Differenz. Auf der dritten Karte muss also 29 stehen.
In der Zeile mit der Zahl 29 sind nun drei Felder markiert: Außer mit 37 hat 29 auch mit 31 und mit 13 eine Differenz, die eine Zweierpotenz ist. Es gibt also für die vierte Karte der Reihe zwei Fälle:

Fall 1: Auf der vierten Karte steht die 13.
Aus der Zeile zur Zahl 13 erkennt man, dass dann auf der fünften Karte 11 oder 17 folgen muss.
Fall 1a: Auf der fünften Karte steht die 11.
Außer mit 13 hat die 11 nur mit 19 eine Zweierpotenz als Differenz. Also muss auf der sechsten Karte die 19 folgen. Aber aus der Zeile zur 17 erkennt man, dass die 17 nur neben 13 und 19 liegen kann. Auf der siebten Karte muss also die 17 stehen, da man diese Karte sonst nicht mehr anlegen könnte. Damit endet aber nun die Kartenreihe schon, denn man kann an die 17 keine weitere Karte mehr anlegen, da sowohl 13 als auch 19 schon verbraucht sind.
Fall 1b: Auf der fünften Karte steht die 17.
Dieser Fall ist analog zum Fall 1a, nur die Rollen der 11 und 17 sind vertauscht, da diese beiden Karten gleiche Nachbarn haben müssen.
Insgesamt ist also Fall 1 nicht möglich.

Fall 2: Auf der vierten Karte steht die 31.
Aus der Zeile zur 31 erkennt man, dass dann auf der fünften Karte die 23 folgen muss.
Auch die sechste Karte ist nun eindeutig: Die 23 hat nur noch mit der 19 eine Zweierpotenz als Differenz, es muss also die 19 folgen.
Auf der siebten Karte kann nun entweder 11 oder 17 stehen. Wenn auf der siebten Karte 11 steht, so bleibt für die achte Karte nur die 13, für die neunte Karte nur die 17. Das ist Lösung 1). Wenn auf der siebten Karte 17 steht, so muss nun die 13 und dann die 11 folgen. Das ist Lösung 2).

Die Lösungen 3) und 4) entstehen aus 1) und 2) nur durch Umkehrung der Kartenreihenfolge. Mehr Möglichkeiten gibt es nicht.

Mit dem folgenden Baumdiagramm kann man alle Fälle darstellen:



Die mit einem Blitz markierten Wege enden, da keine weiteren Karten mehr angelegt werden können. Nur bei den unteren beiden Wegen, werden alle neun Karten untergebracht.

Aufgabe 2

Kleine Holzquader, die alle 10 cm lang, 9 cm breit und 7 cm hoch sind, sollen in eine quaderförmige Kiste mit den Innenmaßen 50 cm, 30 cm und 28 cm gepackt werden.

Bestimme die größtmögliche Anzahl an Holzquadern, die in die Kiste passen, und gib eine Möglichkeit an, wie man sie in die Kiste packen kann.

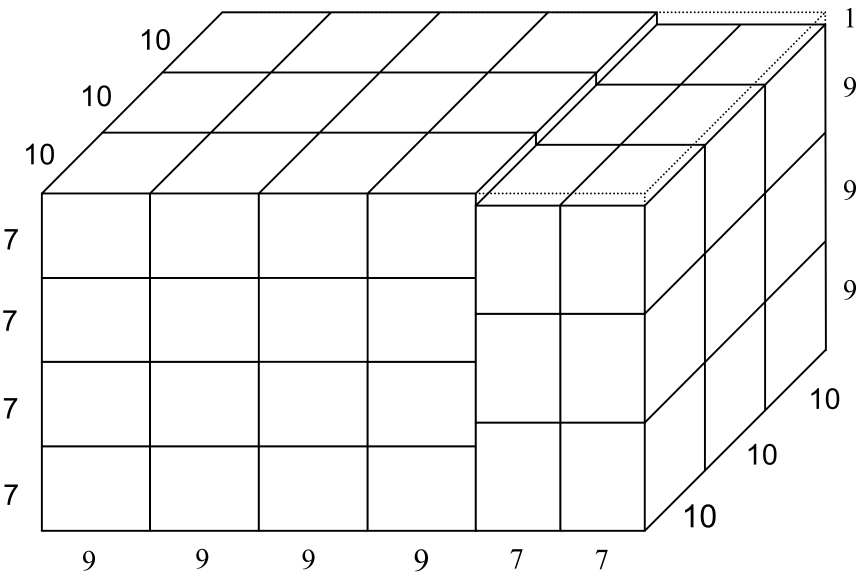
Lösung:

Die größtmögliche Anzahl von Holzquadern, die in die Kiste passen, ist 66.

Beweisvorschlag:

Das Volumen der Kiste ist $50\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} \cdot 28\,\text{cm} = 42000\,\text{cm}^3$. Ein einzelner Holzquader hat das Volumen $10\,\text{cm} \cdot 9\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} = 630\,\text{cm}^3$.
Nun gilt für das Gesamtvolumen: $42000\,\text{cm}^3 = 66 \cdot 630\,\text{cm}^3 + 420\,\text{cm}^3$.
Diese Rechnung zeigt, dass mehr als 66 Holzquader sicher nicht in die Kiste passen.

Jetzt weisen wir nach, dass man 66 Holzquader tatsächlich unterbringen kann. Eine mögliche Stapelung von 66 Holzquadern in der Kiste zeigt die folgende Abbildung:



Dabei liegen im linken Teil des Quaders wie abgebildet $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ Quader und füllen diesen linken Teil vollständig aus. Der rechte Teil des Quaders mit den Abmessungen 14 cm, 30 cm und 28 cm lässt sich mit $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ Quadern so ausfüllen, dass nur ein Restquader mit den Abmessungen 14cm, 30cm und 1cm übrig bleibt.

Damit ist eine Packung mit 48+18 = 66 Quadern gegeben.

Aufgabe 3

Gegeben sind fünf verschiedene natürliche Zahlen. Bildet man alle möglichen Summen von jeweils zwei dieser Zahlen, so erhält man genau sieben verschiedene Werte.
Zeige, dass die Summe aller fünf Zahlen durch 5 teilbar ist.

Lösungsvorschlag 1:

Wir bezeichnen die fünf verschiedenen natürlichen Zahlen mit a, b, c, d, e, wobei $a<b<c<d<e$ gelten soll.
Dann gilt auch: $a+b < a+c < b+c < b+d < c+d < c+e < d+e$.

Da dies also schon sieben verschiedene Summenwerte sind, müssen die übrigen drei Paarsummen a+d, a+e und b+e jeweils mit einem dieser sieben Werte übereinstimmen.

Wegen $a+c < a+d < b+d$ muss also $a+d = b+c$ (1) sein und weil $b+d < b+e < c+e$ ist, ist $b+e = c+d$ (2).

Schließlich ist noch $a+d < a+e < b+e$; daher muss $a+e = b+d$ (3) sein.

Nun folgt der Reihe nach aus den Gleichungen (1), (3) und (2):

$$d-c = b-a = e-d = c-b.$$

Das bedeutet aber, dass benachbarte Zahlen in der Folge unserer fünf Zahlen jeweils denselben Abstand haben – es handelt sich also um eine arithmetische Zahlenfolge.

Setzt man $b-a = k$, so gilt dann $a+b+c+d+e = a+(a+k)+(a+2k)+(a+3k)+(a+4k) = 5(a+2k)$.

Die Summe der fünf Zahlen ist also durch 5 teilbar.

Lösungsvorschlag 2:

Mit fünf Zahlen a, b, c, d, e ($a<b<c<d<e$) kann man die folgenden zwei Ungleichheitsketten mit je sieben verschiedenen Summenwerten aus je zwei dieser Zahlen aufstellen:

(I) $a+b < a+c < b+c < b+d < c+d < c+e < d+e$
(II) $a+b < a+c < a+d < a+e < b+e < c+e < d+e$

Da die möglichen Summen von je zwei Zahlen genau sieben verschiedene Werte annehmen, sind die beiden Ungleichungsketten identisch, d. h. es gilt:

(1) $b+c = a+d$ (2) $b+d = a+e$ (3) $c+d = b+e$

Weiter kann wie in Lösungsvorschlag 1 oder auf folgende Weise geschlossen werden:

Gleichung (3) nach e aufgelöst, ergibt:	$e = c+d-b$			(4)
(4) eingesetzt in (2) ergibt:	$b+d = a+(c+d-b)$	$\Leftrightarrow$	$c = 2b-a$	(5)
(5) eingesetzt in (1) ergibt:	$b+(2b-a) = a+d$	$\Leftrightarrow$	$d = 3b-2a$	(6)
(6) eingesetzt in (2) ergibt:	$b+(3b-2a) = a+e$	$\Leftrightarrow$	$e = 4b-3a$	(7)

Mit (4) – (6) erhält man:

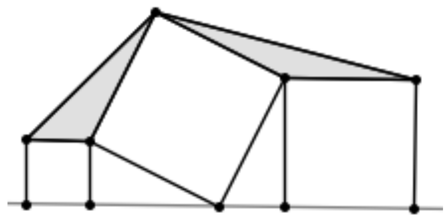
$a+b+c+d+e = a+b+2b-a+3b-2a+4b-3a = 10b-5a = 5(2b-a)$

Die Summe der fünf Zahlen ist also durch 5 teilbar.

Aufgabe 4

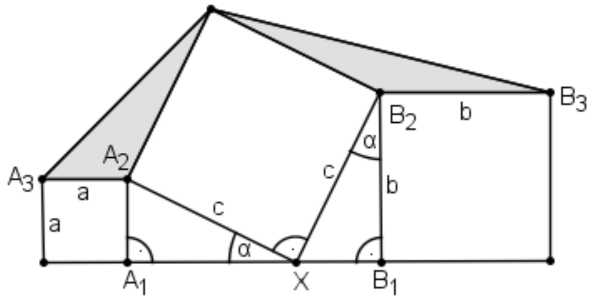
Drei Quadrate sind wie in der Abbildung angeordnet.

Zeige, dass die Flächeninhalte der beiden markierten Dreiecke gleich groß sind.



Beweisvorschlag 1:

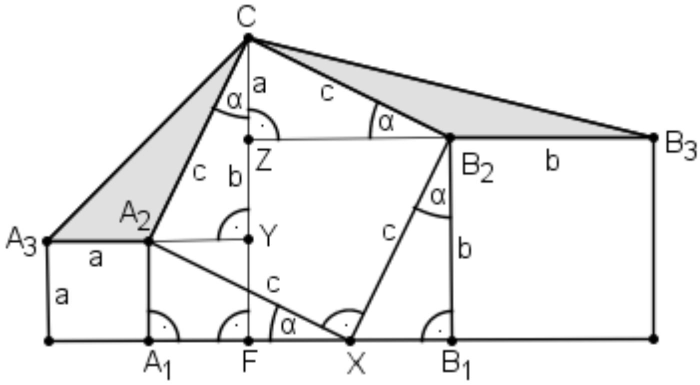
Wir verwenden die Bezeichnungen, die in der Abbildung rechts dargestellt sind.
Insbesondere seien a, b und c die Seitenlängen der drei Quadrate. A_1, A_2 und A_3 sind Eckpunkte des linken, B_1, B_2 und B_3 sind Eckpunkte des rechten Quadrats. Dann stehen A_1A_2 und B_1B_2 senkrecht auf der Geraden durch A_1 und B_1, der gemeinsamen Grundlinie der Quadrate.
Das mittlere Quadrat berührt diese Grundlinie im Punkt X.



Mit $\alpha = \angle X B_2 B_1$ gilt:
Aus der Winkelsumme im Dreieck B_1B_2X folgt: $\angle B_1XB_2 = 90° - \alpha$.
Aus $\angle B_2XA_2 = 90°$ und $\angle B_1XA_1 = 180°$ folgt:
$\angle A_2XA_1 = \angle B_1XA_1 - (\angle B_1XB_2 + \angle B_2XA_2) = 180° - ((90° - \alpha) + 90°) = \alpha$.

Somit stimmen die Dreiecke B_1B_2X und A_1XA_2 in zwei Winkeln (rechter Winkel und α), sowie in der Seite c überein.
Nach dem Kongruenzsatz SWW sind die Dreiecke B_1B_2X und A_1XA_2 kongruent.

Sei nun C der gemeinsame Punkt der beiden markierten Dreiecke. Von C aus wird das Lot auf die Grundlinie A_1B_1 gefällt, der Lotfußpunkt sei F. Die Strecke [CF] ist also parallel zu A_1A_2 und B_1B_2. Die Parallele zu A_1B_1 durch B_2 schneidet CF in Z, die Parallele zu A_1B_1 durch A_2 schneidet CF in Y (s. Abb. rechts).
Da $\alpha < 90^0$, ist $Z \neq B_2$.



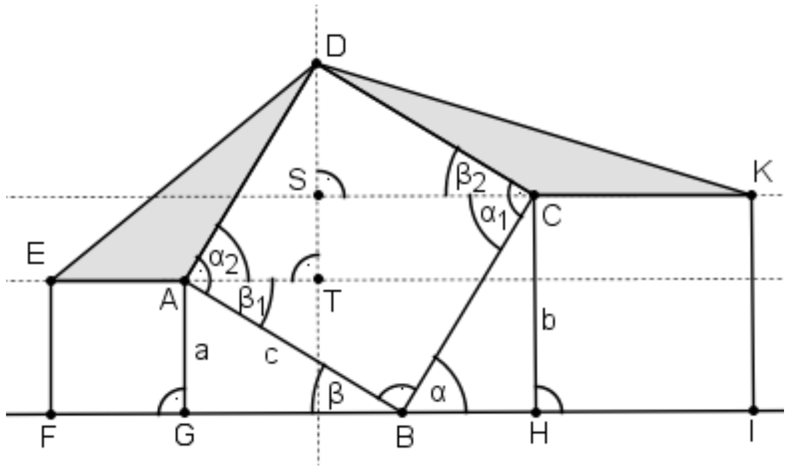
Das rechtwinklige Dreieck ZB_2C entsteht dann aus A_1XA_2 durch eine Parallelverschiebung, da entsprechende Seiten parallel und die Hypotenusen gleich lang sind.
Ebenso geht XB_1B_2 durch Parallelverschiebung in A_2YC über.

Das linke markierte Dreieck hat die Grundseite $[A_2A_3]$ mit Länge a, die Höhe ist die Strecke [CY] mit Länge $\overline{CY} = \overline{B_1B_2} = b$. Somit ist der Flächeninhalt des linken Dreiecks $\frac{a \cdot b}{2}$.
Das rechte markierte Dreieck hat die Grundseite $[B_2B_3]$ mit Länge b, die Höhe ist die Strecke [CZ] mit Länge $\overline{CZ} = \overline{A_1A_2} = a$. Somit ist der Flächeninhalt des rechten Dreiecks ebenfalls $\frac{a \cdot b}{2}$.

Die beiden markierten Dreiecke haben also denselben Flächeninhalt.

Beweisvorschlag 2:

Die Punkte und Winkel werden wie in der Zeichnung bezeichnet.



Es gilt:

(1) $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \beta_1$, da dies Wechselwinkel an den Parallelen GH und CK bzw. GH und EA sind.

(2) $\alpha = \alpha_2$ und $\beta = \beta_2$,
da $\alpha + \beta = 90°$, $\beta_1 + \alpha_2 = 90°$, $\alpha_1 + \beta_2 = 90$, $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \beta_1$

(3) Im rechtwinkligen Dreieck ATD gilt: $\overline{DT} = \overline{AD} \cdot \sin(\alpha_2)$
Im rechtwinkligen Dreieck CSD gilt: $\overline{DS} = \overline{CD} \cdot \sin(\beta_2)$

Im rechtwinkligen Dreieck BHC gilt: $b = c \cdot \sin(\alpha)$.
Im rechtwinkligen Dreieck GBA gilt: $a = c \cdot \sin(\beta)$.

Aus (1) bis (3) und der Voraussetzung (3 Quadrate) folgt:

Dreieck EAD: $A_{EAD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EA} \cdot \overline{DT} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{AD} \cdot \sin(\alpha_2) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

Dreieck CKD: $A_{CKD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CK} \cdot \overline{DS} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \overline{CD} \cdot \sin(\beta_2) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

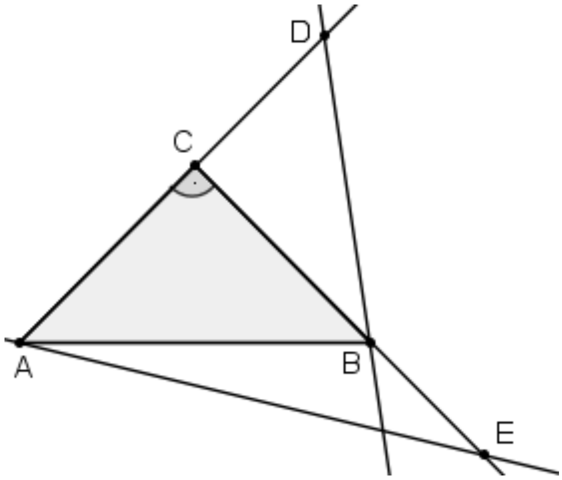
Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 5

Gegeben ist ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C.

Die Punkte D und E liegen außerhalb des Dreiecks auf den Halbgeraden [AC bzw. [CB.

Beweise: Die Strecken [CD] und [CE] sind genau dann gleich lang, wenn sich die Geraden AE und BD rechtwinklig schneiden.



Vorbemerkung:

Es müssen in dieser „genau dann, wenn“ - Aussage zwei Richtungen gezeigt werden

1. Richtung: $\overline{CE} = \overline{CD} \Rightarrow AE \perp BD$

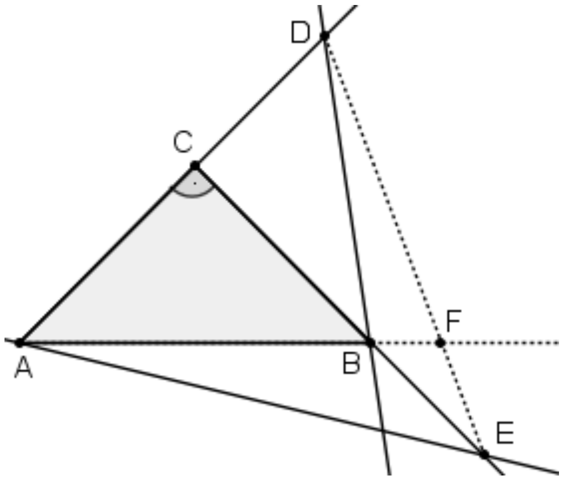
2. Richtung: $AE \perp BD \Rightarrow \overline{CE} = \overline{CD}$

Beweisvorschlag 1:

Wir ergänzen die Figur durch die Strecke [DE] und betrachten das Dreieck AED.
[CE] ist Höhe im Dreieck AED. Der Schnittpunkt von AB mit DE sei F.

Da das Dreieck ABC gleichschenklig ist, sind die Innenwinkel bei A und B jeweils 45°.

Für den Scheitelwinkel $\angle$EBF gilt dies auch.



Beweis der 1. Richtung:

Wenn $\overline{CD} = \overline{CE}$ gilt, ist der Winkel $\angle$DEB als Basiswinkel ebenfalls 45° und damit gilt: $\angle$BFE = 90°. Dann ist also [AF] eine zweite Höhe des Dreiecks AED und somit B der Höhenschnittpunkt des Dreiecks AED.
Die Gerade BD ist somit die dritte Höhe des Dreiecks AED. Also stehen AE und BD senkrecht aufeinander.

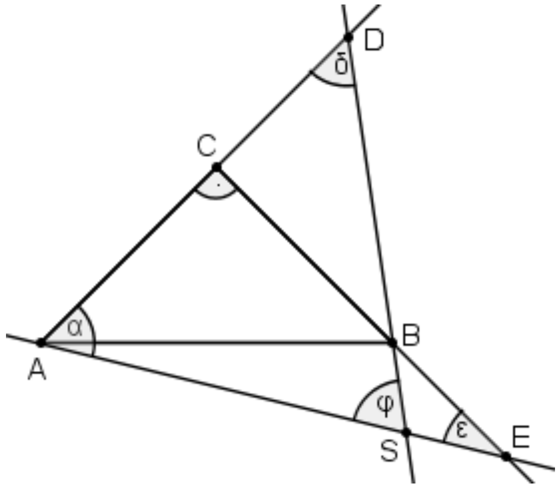
Beweis der 2. Richtung:

Stehen AE und BD senkrecht aufeinander, dann ist [BD] eine Höhe des Dreiecks AED und B wieder der Höhenschnittpunkt. Jetzt ist [AB] die dritte Höhe des Dreiecks AED.
Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck BEF folgt, dass $\angle$DEB = 45° gilt.
Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck EDC folgt, dass auch $\angle$CDE = 45° gilt.

Das Dreieck EDC ist demnach gleichschenklig und es gilt: $\overline{CD} = \overline{CE}$.

Lösungsbeispiel 2:

Zunächst werden die Bezeichnungen wie in der nebenstehenden Skizze gewählt:



Beweis der 1. Richtung:

Es gilt: $\overline{CE} = \overline{CD}$

Die Dreiecke AEC und BDC sind nach SWS-Satz kongruent, denn es gilt:

$\overline{CA} = \overline{CB}$ (Voraussetzung der Aufgabenstellung)

$\overline{CE} = \overline{CD}$ (Voraussetzung der 1. Richtung)

Außerdem haben beide Dreiecke bei C einen rechten Winkel.

Somit haben auch die anderen Winkel gleiche Größe und es gilt: $\varepsilon = \delta$.

Im rechtwinkligen Dreieck AEC gilt nach Winkelsummensatz: $\alpha + \varepsilon = 90°$

Den Winkel φ kann man über die Winkelsumme im Dreieck ASD wie folgt berechnen:
$\varphi = 180° - (\alpha + \delta) = 180° - (\alpha + \varepsilon) = 180° - 90° = 90°$ und damit gilt $AE \perp BD$

Beweis der 2. Richtung:

Es gilt $AE \perp BD$ (also: $\varphi = 90°$)

In den Dreiecken ASB und AEC gilt nach Winkelsummensatz:
$\delta = 90° - \alpha$ bzw. $\varepsilon = 90° - \alpha$.
Also gilt: $\varepsilon = \delta$

Die Dreiecke AEC und BDC sind nach SWW - Satz kongruent, denn:

$\varepsilon = \delta$ (wie eben gezeigt)

$\overline{CA} = \overline{CB}$ (Voraussetzung der Aufgabenstellung)

$\angle ACE = \angle BCD = 90°$ (Voraussetzung der Aufgabenstellung / Nebenwinkel)

Somit haben auch die anderen Strecken gleiche Länge; insbesondere gilt: $\overline{CE} = \overline{CD}$.

Aufgabe 6

Das Produkt dreier positiver ganzer Zahlen ist dreimal so groß wie ihre Summe. Bestimme alle Möglichkeiten für die drei Zahlen.

Lösung:

Die Möglichkeiten für die drei Zahlen sind (1;4;15), (2;2;12), (1;5;9), (1;6;7), (2;3;5) und (3;3;3).

Lösungsmöglichkeit 1:

Für die drei Zahlen a, b und c soll gelten: $a \cdot b \cdot c = 3 \cdot (a+b+c)$. (*)

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass $a \le b \le c$ ist.

Damit gilt: $\frac{a}{c} \le \frac{b}{c} \le 1$. (**)

Dividiert man (*) durch c, so erhält man: $a \cdot b = 3 \cdot \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1\right)$

Mit (**) erhält man die Abschätzung: $a \cdot b \le 3 \cdot (1+1+1) = 9$, d. h. $1 \le a \cdot b \le 9$.

Die möglichen Fälle werden nun untersucht:

$a \cdot b = 1$, d. h. a = 1 und b = 1 in (*) eingesetzt:
$1 \cdot c = 3 \cdot (1+1+c) \Leftrightarrow c = 6 + 3 \cdot c \Leftrightarrow -2 \cdot c = 6 \Leftrightarrow c = -3$
Nicht möglich, da c eine positive ganze Zahl sein soll.

$a \cdot b = 2$, d. h. a = 1 und b = 2 in (*) eingesetzt:
$2 \cdot c = 3 \cdot (1+2+c) \Leftrightarrow 2 \cdot c = 9 + 3 \cdot c \Leftrightarrow c = -9$
Nicht möglich, da c eine positive ganze Zahl sein soll.

$a \cdot b = 3$, d. h. a = 1 und b = 3 in (*) eingesetzt:
$3 \cdot c = 3 \cdot (1+3+c) \Leftrightarrow 3 \cdot c = 12 + 3 \cdot c \Leftrightarrow 0 = 12$ Widerspruch!

$a \cdot b = 4$, d. h. entweder a = 1 und b = 4 in (*) eingesetzt:
$4 \cdot c = 3 \cdot (1+4+c) \Leftrightarrow 4 \cdot c = 15 + 3 \cdot c \Leftrightarrow c = 15$ **Lösung 1: (1;4;15)**
oder a =2 und b = 2 in (*) eingesetzt:
$4 \cdot c = 3 \cdot (2+2+c) \Leftrightarrow 4 \cdot c = 12 + 3 \cdot c \Leftrightarrow c = 12$ **Lösung 2: (2;2;12)**

$a \cdot b = 5$, d. h. a = 1 und b = 5 in (*) eingesetzt:
$5 \cdot c = 3 \cdot (1+5+c) \Leftrightarrow 5 \cdot c = 18 + 3 \cdot c \Leftrightarrow c = 9$ **Lösung 3: (1;5;9)**

$a \cdot b = 6$, d. h. entweder a = 1 und b = 6 in (*) eingesetzt:
$6 \cdot c = 3 \cdot (1+6+c) \Leftrightarrow 6 \cdot c = 21 + 3 \cdot c \Leftrightarrow c = 7$ **Lösung 4: (1;6;7)**
oder a =2 und b = 3 in (*) eingesetzt:
$6 \cdot c = 3 \cdot (2+3+c) \Leftrightarrow 6 \cdot c = 15 + 3 \cdot c \Leftrightarrow c = 5$ **Lösung 5: (2;3;5)**

$a \cdot b = 7$, d. h. a = 1 und b = 7 in (*) eingesetzt:
$7 \cdot c = 3 \cdot (1+7+c) \Leftrightarrow 7 \cdot c = 24 + 3 \cdot c \Leftrightarrow c = 6$ Widerspruch zu $b \le c$

$a \cdot b = 8$, d. h. entweder a = 1 und b = 8 in (*) eingesetzt:
$8 \cdot c = 3 \cdot (1+8+c) \Leftrightarrow 8 \cdot c = 27 + 3 \cdot c \Leftrightarrow 5 \cdot c = 27$ c nicht ganzzahlig!
oder a =2 und b = 4 in (*) eingesetzt:
$8 \cdot c = 3 \cdot (2+4+c) \Leftrightarrow 8 \cdot c = 18 + 3 \cdot c \Leftrightarrow 5 \cdot c = 18$ c nicht ganzzahlig!

$a \cdot b = 9$, d. h. a = 1 und b = 9 in (*) eingesetzt:
$9 \cdot c = 3 \cdot (1+9+c) \Leftrightarrow 9 \cdot c = 30 + 3 \cdot c \Leftrightarrow c = 5$ Widerspruch zu $b \le c$
oder a =3 und b = 3 in (*) eingesetzt:
$9 \cdot c = 3 \cdot (3+3+c) \Leftrightarrow 9 \cdot c = 18 + 3 \cdot c \Leftrightarrow c = 3$ **Lösung 6: (3;3;3)**

Lösungsmöglichkeit 2:

O.B.d.A. sei $0 < a \le b \le c$ (a, b, c ganze Zahlen)

1. Fall: $a = b = c$

Aus $abc = 3(a+b+c)$ folgt $a^3 = 3 \cdot 3a$ und damit $a^2 = 9$, also a = 3.

1. Möglichkeit: a = b = c = 3

2. Fall: $a \le b < c$ oder $a < b \le c$

Aus $abc = 3(a+b+c)$ folgt:

$$c = \frac{3a}{ab} + \frac{3b}{ab} + \frac{3c}{ab} \Leftrightarrow c = \frac{3}{b} + \frac{3}{a} + \frac{3c}{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} \quad (1)$$

Aus $a \le b < c$ bzw. $a < b \le c$ und a, b, c > 0 folgt: $\frac{1}{ab} > \frac{1}{ac} \ge \frac{1}{bc}$ bzw. $\frac{1}{ab} \ge \frac{1}{ac} > \frac{1}{bc}$ (2)

Aus (1) und (2) folgt: $\frac{1}{ab} > \frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{9}$, also $ab < 9$ (3)

Wegen (3) und mit $a \le b$ sind folgende Produkte möglich:

ab	**a**	**b**	**Berechnung von c**
8	1	8	3(1 + 8 + c)= 8c; 27 = 5c, also keine ganzzahlige Lösung für c
8	2	4	3(2 + 4 + c) = 8c; 18 = 5c, also keine ganzzahlige Lösung für c
7	1	7	3(1 + 7 + c) = 7c; 24 = 4c; also c = 6; keine Lösung, da b ≤ c
6	1	6	3(1 + 6 + c) = 6c; 21 = 3c; also c = 7
6	2	3	3(2 + 3 + c) = 6c; 15 = 3c; also c = 5
5	1	5	3(1 + 5 + c) = 5c; 18 = 2c; also c = 9
4	1	4	3(1 + 4 + c) = 4c; also c = 15
4	2	2	3(2 + 2 + c) = 4c; also c = 12
3	1	3	3(1 + 3 + c) = 3c; Gleichung hat keine Lösung
2	1	2	3(1 + 2 + c) = 2c; c = -9; also keine positive Lösung für c
1	1	1	3(1 + 1 + c) = c; c = -3; also keine positive Lösung für c

Damit gibt es insgesamt 6 Möglichkeiten:

a = b = c = 3
a = 1, b = 6, c = 7
a = 2, b = 3, c = 5
a = 1, b = 5, c = 9
a = 1, b = 4, c = 15
a = 2, b = 2, c = 12