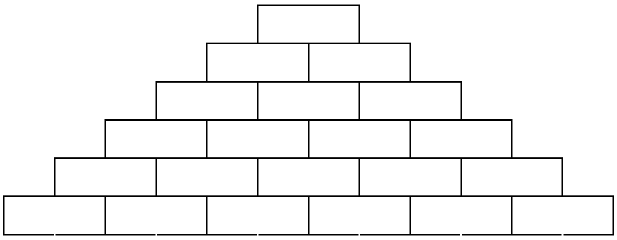
12. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Lösungsbeispiele für die Aufgaben der 2. Runde 2009/2010

Aufgabe 1



In die sechs Felder der untersten Zeile des Stufendreiecks werden sechs verschiedene natürliche Zahlen eingetragen. Die Zahlen zweier benachbarter Felder werden miteinander multipliziert und das Ergebnis wird in das Feld, das in der Mitte über diesen beiden Feldern liegt, geschrieben.

Nach dieser Vorschrift werden alle Felder der Reihe nach ausgefüllt.

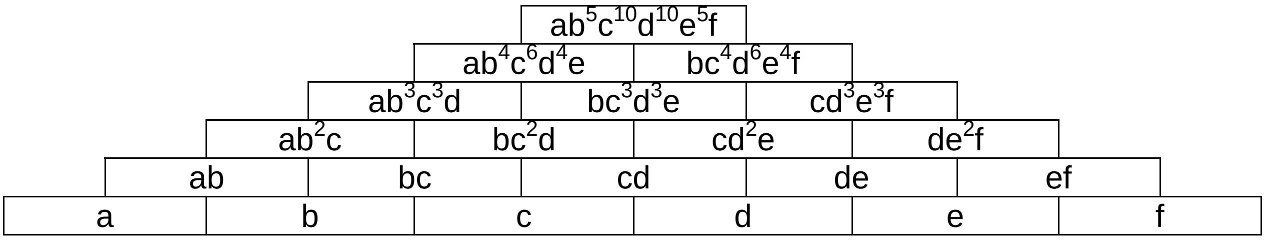
Wie viele verschiedene Belegungen der untersten Zeile führen im obersten Feld zum Ergebnis 141 523 200 000?

Ergebnis:

Es gibt 16 verschiedene Belegmöglichkeiten für die unterste Zeile.

Beweismöglichkeit:

Schreibt man in die Felder der untersten Zeile die sechs Variabeln a, b, c, d, e und f, so erhält man nach obiger Vorschrift die folgende Belegung der übrigen Felder:



Die Zahl im obersten Feld wird also durch den Term $ab^5c^{10}d^{10}e^5f$ beschrieben.
Er enthält 1+5+10+10+5+1 = 32 Faktoren.

Die Primfaktorzerlegung der gegebenen Zahl ist:
$141\,523\,200\,000 = 1\,415\,232 \cdot 100\,000 = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^5 \cdot 5^5 = 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 13$
D.h. die gegebene Zahl hat genau 23 verschiedene Primfaktoren.

Daraus folgt:

- Der Term $ab^5c^{10}d^{10}e^5f$ muss 10mal den Faktor 1 enthalten.
- Die weiteren Faktoren sind die Primzahlen
  11mal die 2, 5mal die 3, 5mal die 5, 1mal die 7 und 1mal die 13.

Daraus folgt: Die Variablen c und d werden durch 1 und 2 belegt: 2 Möglichkeiten
Die Variablen b und e werden durch 3 und 5 belegt: 2 Möglichkeiten
Die Variablen a und f werden durch 13 und 14 oder durch 7 und 26 belegt: 4 Möglichkeiten

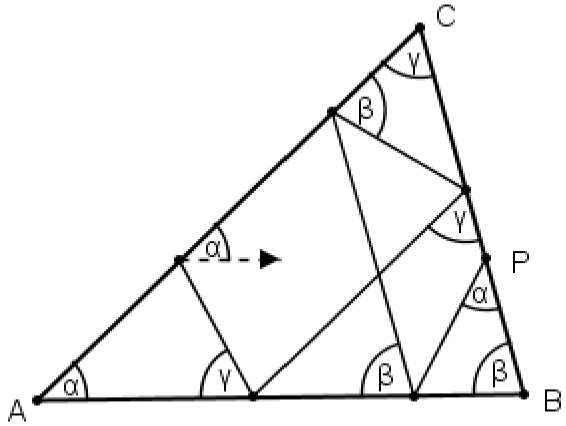
Bemerkung: Die Belegung der Variablen a und f durch 2 und 91 oder 1 und 182 scheidet aus, da die Variablen c und d bereits durch 1 und 2 belegt sind und alle Zahlen in den sechs Feldern der untersten Reihe verschieden sein sollen.

Insgesamt gibt es demnach $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ Belegmöglichkeiten für die unterste Zeile.

Aufgabe 2

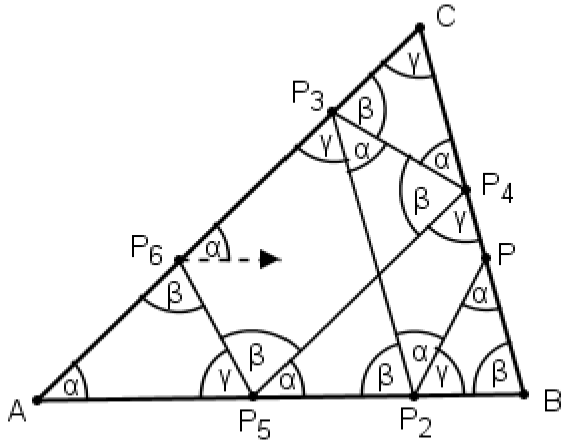
In einem Dreieck ABC beginnt bei einem Punkt P der Seite [BC] ein Streckenzug, dessen Eckpunkteder Reihe nach auf den Seiten [BA], [AC], [CB], [BA], [AC] und schließlich wieder auf [CB] liegen. Die Winkel, die die Streckenmit diesen Seiten einschließen, sind der Reihe nach α, β, β, γ, γ und wieder α (siehe Skizze).

Endet dieser Streckenzug bei P?



Antwort: Der Streckenzug endet – unabhängig von der Lage von P – wieder in P.

Wir benennen die durch den Streckenzug bestimmten Anfangs–, Teil– und Endpunkte auf den Seiten der Reihe nach mit P, P_2, ... P_6; es genügt dann zu zeigen, dass P_6P mit AC den Winkel α einschließt oder dass die Parallele durch P_6 zu AB durch P geht.



1. Beweismöglichkeit: Es genügt zu zeigen, dass die Gerade P_6P mit der Geraden AC den Winkel α einschließt.

Zunächst betrachten wir die Teilstrecke [P_2P_3]. Nach Voraussetzung schließt sie mit der Geraden AB den Winkel β ein, also den gleichen Winkel, den auch die Strecke [BC] mit AB einschließt. Also ist $P_2P_3||BC$, hieraus folgt sofort $\angle AP_3P_2 = ACB = \gamma$.

Weiter betrachten wir das Dreieck PP_2B. Nach Vorgabe der Aufgabe hat dieses Dreieck bei P den Innenwinkel α und bei B den Innenwinkel β und somit nach dem Satz von der Innenwinkelsumme im Dreieck bei P_2 den Innenwinkel γ. Damit setzt sich der gestreckte Winkel $\angle BP_2A$ aus den Winkeln β, γ und $\angle PP_2P_3$ zusammen. Da auch $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, folgt sofort $\angle PP_2P_3 = \alpha$.

Mit analoger Argumentation erhalten wir, dass $P_4P_5||AC$ und dass der Streckenzug bei den Punkten P_2, P_3, P_4, P_5 und P_6 stets drei Winkel der Größe α, β und γ erzeugt, die so - wie in der Skizze gezeichnet - angeordnet sind.

Das Viereck $PP_2P_3P_4$ ist also ein Trapez, das zudem gleiche Innenwinkel bei P_2 und bei P_3 hat; es ist also achsensymmetrisch und insbesondere ist $\overline{PP_2} = \overline{P_3P_4}$.

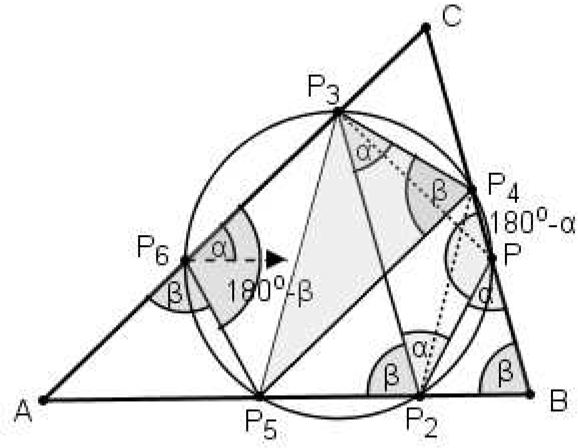
Aber auch $P_3P_4P_5P_6$ ist ein achsensymmetrisches Trapez, da es gleiche Innenwinkel bei P_4 und P_5 hat. Also ist $\overline{P_3P_4} = \overline{P_5P_6}$. Hieraus folgt $\overline{PP_2} = \overline{P_5P_6}$.

Da auch $\angle BP_5P_6 = \angle PP_2A$, ist das Viereck $P_5P_6PP_2$ ein gleichschenkliges Trapez. Insbesondere ist P_5P_2 parallel zu P_6P und damit $\angle PP_6C = \angle BAC$.

Variante: Wir zeigen wie oben, dass $\overline{P_6P_5} = \overline{PP_2}$ ist.

Dann ziehen wir die Parallele zu P_5P_2 durch P_6, d. h. den letzten Teil des Streckenzuges. Ihren Schnittpunkt mit PP_2 nennen wir P_7. Weil auch gleiche Winkel bei P_5 bzw. P_2 vorliegen, ist dann das Viereck $P_6P_5P_2P_7$ eine achsensymmetrisches Trapez, insbesondere ist $\overline{P_7P_2} = \overline{P_5P_6} = \overline{PP_2}$.

Hieraus folgt $P = P_7$, d. h. der Streckenzug geht durch P.



2. Beweismöglichkeit: Wir beziehen uns auf obige Figur mit den eingetragenen Winkelgrößen und betrachten hier zunächst den Umkreis des Dreiecks $P_5P_4P_3$.

Wir werden durch mehrfache Anwendung des Umfangswinkelsatzes zeigen, dass auch P_2, P_6 und P auf diesem Kreis liegen:

- Über der Sehne $[P_3P_5]$ gilt: $\angle P_3P_2P_5 = \beta = \angle P_3P_4P_5$.
  Also liegt P_2 ebenfalls auf diesem Kreis.
- Das Dreieck $P_5P_4P_3$ wird durch den Punkt P_6 zu einem Viereck $P_5P_4P_3P_6$ erweitert; in diesem ergänzen sich die gegenüberliegenden Winkel $\angle P_5P_6P_3 = 180^\circ - \beta$ und $\angle P_3P_4P_5 = \beta$ zu 180°.
  Also liegt auch P_6 auf dem Umkreis dieses Dreiecks.
- Das Dreieck $P_2P_4P_3$ wird durch den Punkt P zu einem Viereck $P_4P_3P_2P$ erweitert; in diesem ergänzen sich die gegenüberliegenden Winkel $\angle P_2P_3P_4 = \alpha$ und $\angle P_4PP_2 = 180^\circ - \alpha$ zu 180°.
  Also liegt auch P auf dem Umkreis dieses Dreiecks, der auch Umkreis des Dreiecks $P_5P_4P_3$ ist.

Deshalb sind $\angle PP_6P_3$ und $\angle PP_2P_3 = \alpha$ gleich große Umfangswinkel über der Sehne $[P_3P]$; dies war zu zeigen.

Aufgabe 3

Beginnend mit 5 werden alle Primzahlen der Größe nach durchnummeriert: Die 5 erhält die Nummer 1, die 7 die Nummer 2, die 11 die Nummer 3 usw.

Zeige, dass jede dieser Primzahlen mehr als dreimal so groß wir ihre Nummer ist.

Lösungsmöglichkeit 1 (Einteilung in Dreierblöcke)

Wir teilen die natürlichen Zahlen ≥ 4 in Dreierblöcke ein:

4, 5, 6,   7, 8, 9,   10, 11, 12,   …

Der n-te Dreierblock besteht dabei aus den Zahlen 3n+1, 3n+2 und 3n+3 (n ≥ 1).
In jedem Dreierblock ist die größte Zahl 3n+3 durch 3 teilbar (und größer als 3), also keine Primzahl.

Von den beiden aufeinander folgenden Zahlen 3n+1 und 3n+2 ist genau eine gerade (und größer als 2), also ebenfalls keine Primzahl.

Daher gibt es in jedem Dreierblock höchstens eine Primzahl.

Nun ist jede Primzahl p ≥ 5 in einem der Dreierblöcke enthalten.

Falls sich die Primzahl p im n-ten Block befindet, ist also ihre Nummer ≤ n.

Wegen p = 3n+1 oder p = 3n+2 folgt: p > 3n ≥ 3 · Nummer von p.

Dies war zu zeigen.

Lösungsmöglichkeit 2 (Einteilung in Sechsergruppen)

Für die Primzahlen 5 und 7 stimmt die Behauptung offenbar.

Zur Untersuchung der größeren Primzahlen teilen wir die natürlichen Zahlen ≥ 8 in Sechsergruppen ein.
Zu jedem n ≥ 1 gehöre die Sechsergruppe 6n+2, 6n+3, 6n+4, 6n+5, 6n+6, 6n+7.

In jeder dieser Gruppen gibt es höchstens zwei Primzahlen, denn 6n+2, 6n+4 sowie 6n+6 sind durch 2 und 6n+3 ist durch 3 teilbar.

Falls nun (für ein n ≥ 1) 6n+5 eine Primzahl ist, so gibt es höchstens 2 + 2·(n–1) = 2n kleinere Primzahlen ≥ 5 , nämlich die zwei Zahlen 5 und 7 sowie in den n–1 vorangehenden Sechsergruppen jeweils höchstens zwei Zahlen.

Also ist die Nummer der Primzahl 6n+5 höchstens 2n+1, und es ist 6n+5 > 3·(2n+1).

Falls 6n+7 eine Primzahl ist, so gibt es höchstens 2 + 2·(n–1) + 1 = 2n+1 kleinere Primzahlen, nämlich die zwei Zahlen 5 und 7, in den n–1 vorangehenden Sechsergruppen jeweils höchstens zwei Zahlen, und möglicherweise die Zahl 6n+5.

Also ist die Nummer der Primzahl 6n+7 höchstens 2n+2, und es ist 6n+7 > 3·(2n+2).

Somit ist die Behauptung für alle Primzahlen ≥ 5 bewiesen.

Lösungsmöglichkeit 3 (indirekter Beweis)

Wir nehmen an, p sei eine Primzahl, die nicht größer als das Dreifache ihrer Nummer ist.

Dann sind in den n-1 Dreiergruppen (4,5,6), (7,8,9), (10,11,12), …, (3n-2,3n-1,3n) die ersten n nummerierten Primzahlen enthalten. Nach dem Schubfachprinzip gibt es also mindestens eine Dreiergruppe, in der mindestens zwei Primzahlen enthalten sind.

Dies ist aber nicht möglich, da die größte Zahl jeder Dreiergruppe immer ein echtes Vielfaches von 3 ist und damit keine Primzahl sein kann. Zusätzlich ist genau eine der beiden anderen Zahlen jeder Dreiergruppe immer ein echtes Vielfaches von 2 und damit ebenfalls keine Primzahl.

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch ist und somit jede Primzahl mehr als dreimal so groß wie ihre Nummer ist.

Aufgabe 4

Gegeben ist ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M und ein Punkt Q auf der Kreislinie. Auf der Halbgeraden [MQ durchläuft der Punkt P alle Lagen, für die der Kreis k_2 um P durch M den Kreis k_1 schneidet. Wir betrachten die Punkte T_1 und T_2, in denen die gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise den Kreis k_2 berühren.

Welche Bahn beschreiben T_1 und T_2?

Antwort:

Die gesuchte Bahn ist die senkrechte Gerade s zu MQ durch Q.

Vorbemerkungen:

1. Die gesamte Figur ist achsensymmetrisch zu MQ. Daher liegen auch die Berührpunkte B_1 und B_2 bzw. T_1 und T_2 der gemeinsamen Tangenten mit k_1 bzw. k_2 achsensymmetrisch zu MQ. Es ist deshalb ausreichend, nur eine gemeinsame Tangente zu betrachten. Ihre Berührpunkte mit k_1 und k_2 nennen wir B bzw. T.
2. Ein vollständiger Beweis erfordert den Nachweis von zwei Behauptungen.

   Beh. 1 T liegt auf s.

   Beh. 2 Zu jedem Punkt S aus s gibt es einen Punkt P aus [MQ], so dass eine gemeinsame Tangente an die beiden Kreise k_1 und $k(P;\overline{MP})$ existiert, deren Berührpunkt mit $k(P;\overline{MP})$ gerade S ist.
3. Zu betrachten sind die Fälle:

   Fall 1: P liegt innerhalb von k_1, d. h. $r_1 > r_2 > \frac{1}{2}r_1$.

   Fall 2: P liegt auf k_1, d. h. $r_1 = r_2$.

   Fall 3: P liegt außerhalb von k_1, d. h. $r_1 < r_2$.

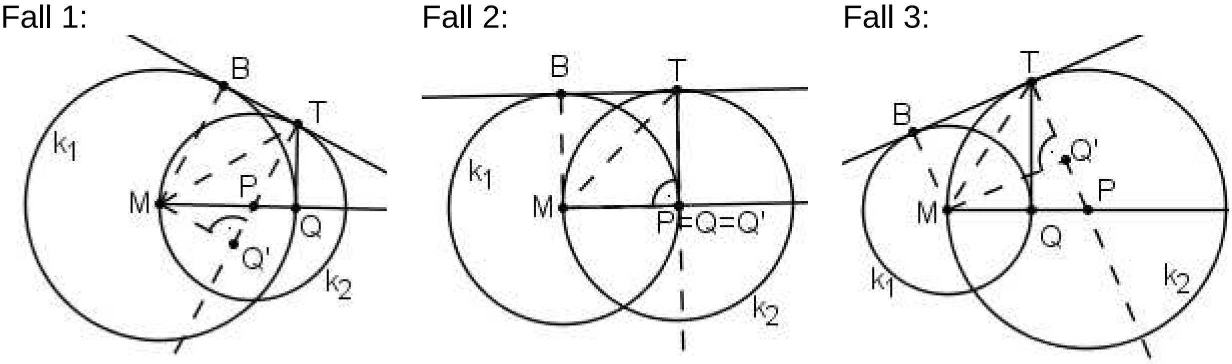
   Sonderfall: k_2 berührt k_1 in Q, d. h. $r_2 = \frac{1}{2}r_1$. Hier ist $T_1 = T_2 = T = Q$.

Beweisbeispiel 1 (mit Kongruenzen)

Beweis von Beh. 1:

Wir bezeichnen den Lotfußpunkt von M auf die Gerade PT mit Q'.

Fall 1: Fall 2: Fall 3:



Die Dreiecke MQT und MQ’T sind nach dem SWS-Satz kongruent, denn:

- Sie besitzen die gemeinsame Seite [MT]:
- M und T liegen auf dem Kreis k_2 um P, d. h. Dreieck MPT ist gleichschenklig mit Basis [MT]. Daraus folgt: $\angle QMT = \angle MTQ'$.
- B und Q liegen auf dem Kreis k_1 um M, d.h. $\overline{MQ} = \overline{MB}$.
  $\angle TQ'M = \angle BTQ' = \angle MBT = 90^o$. Also ist MQ’TB ein Rechteck, d.h. $\overline{MB} = \overline{Q'T}$.
  Aus den letzten beiden Gleichheiten folgt: $\overline{MQ} = \overline{Q'T}$.

Also ist: $\angle TQM = \angle TQ'M = 90^o$. Damit ist bewiesen, dass T auf s liegt.

Beweis von Beh. 2:

Wir betrachten einen beliebigen Punkt S aus s.

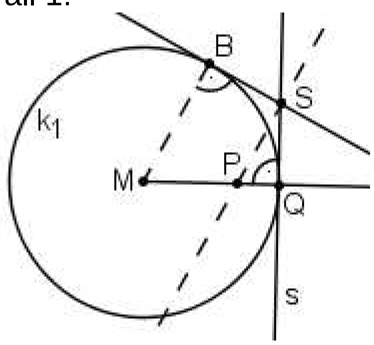
Ist S = Q, so wählen wir P als Mittelpunkt von [MQ], d. h. $r_2 = \frac{r_1}{2}$.

Dann berühren sich k_1 und k_2 in Q.
Die Tangenten an k_1 und k_2 in Q fallen dann mit s zusammen.

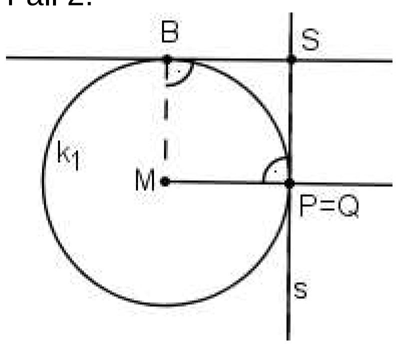
Ist S $\neq$ Q, so liegt S außerhalb von k_1 und die Punkte MQS bilden ein Dreieck mit rechtem Winkel bei Q.
Somit ist SQ eine Tangente an k_1 und es gibt eine zweite Tangente von S an k_1, deren Berührpunkt mit k_1 mit B bezeichnet wird.

Wir wählen nun P als Schnittpunkt der Parallelen zu MB durch S mit der Halbgeraden [MQ.

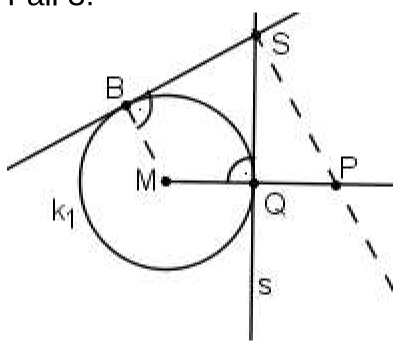
Fall 1:



Fall 2:



Fall 3:



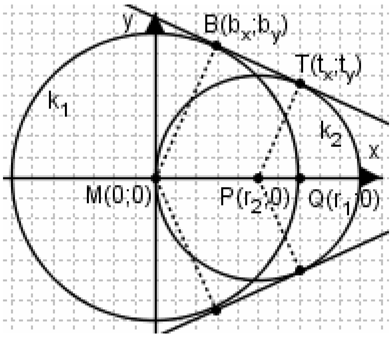
Der Punkt P ist der Mittelpunkt von k_2, denn:

- P ist wohldefiniert: Da MB nicht parallel zu MQ ist, gilt dies auch für deren Parallele durch S; somit existiert ihr Schnittpunkt P mit der Geraden MQ.
  Da P bezüglich MB in derselben Halbebene wie S liegt, gilt: $P \in [MQ$.
- S liegt auf dem Kreis um P mit Radius $\overline{MP}$:
  Da MB parallel zu SP ist, gilt $\angle MSP = \angle SMB$ (Z-Winkel) (1)
  Da die Dreiecke MQS und BMS nach dem SWS-Satz kongruent sind
  ($\overline{MQ} = \overline{MB} = r_1$, $\overline{SQ} = \overline{SB}$ (Tangentenabschnitte), $\angle SQM = \angle MBS = 90^o$),
  gilt: $\angle SMB = \angle PMS$ (2)
  Aus (1) und (2) folgt: $\angle MSP = \angle PMS$
  Das Dreieck MPS ist also gleichschenklig mit Basis [MS], d. h. $\overline{PM} = \overline{MS} = r_2$.
- Nach Konstruktion steht BS sowohl senkrecht auf MB als auch auf PS, ist also gemeinsame Tangente an k_1 und an $k(P;r_2)$, insbesondere ist S Berührpunkt von BS an $k(P;r_2) = k_2$.

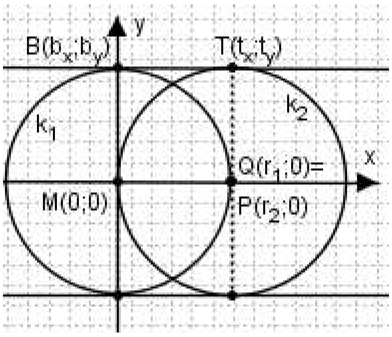
Beweisbeispiel 2 (mit analytischen Beschreibungen)

Wir legen über die Figur ein Koordinatensystem, so dass gilt: M(0;0), Q(r_1;0).
Damit ergibt sich: P(r_2;0), B(b_x;b_y) und T(t_x;t_y).

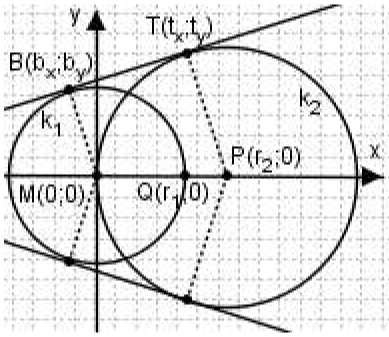
Fall 1:



Fall 2:



Fall 3:



Im Fall 2 ist $t_x = r_1$.

Für die Fälle 1 und 3 gilt:

$$\overrightarrow{MB} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \overrightarrow{PT} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \begin{pmatrix} t_x - r_2 \\ t_y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathrm{I}:\ b_x = \frac{r_1}{r_2} \cdot (t_x - r_2) = \frac{r_1}{r_2} \cdot t_x - r_1 \\ \mathrm{II}:\ b_y = \frac{r_1}{r_2} \cdot t_y \end{array}$$

Da die Tangente BT senkrecht auf dem Radius [PT] steht, gilt für ihre Steigungen:

$$m_{BT} = -\frac{1}{m_{PT}} \Leftrightarrow \frac{t_y - b_y}{t_x - b_x} = -\frac{t_x - r_2}{t_y} \,\Big|\cdot (t_x - b_x) \cdot t_y \text{, da } t_x \neq b_x \text{ und } t_y \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow (t_y - b_y) \cdot t_y = -(t_x - r_2) \cdot (t_x - b_x) \Leftrightarrow t_y^2 - b_y \cdot t_y = -t_x^2 + t_x \cdot b_x + r_2 \cdot t_x - r_2 \cdot b_x$$

Es setzt man nun b_x und b_y entsprechend I und II, so erhält man:

$$t_y^2 - \frac{r_1}{r_2} \cdot t_y^2 = -t_x^2 + t_x^2 \cdot \frac{r_1}{r_2} - t_x \cdot r_1 + r_2 \cdot t_x - r_1 \cdot t_x + r_2 \cdot r_1 \quad (*)$$

Da $\overline{PT} = r_2$, gilt nach dem Satz von Pythagoras:

$$(t_x - r_2)^2 + t_y^2 = r_2^2 \Leftrightarrow t_y^2 = r_2^2 - (t_x - r_2)^2 = r_2^2 - t_x^2 + 2 \cdot t_x \cdot r_2 - r_2^2 = -t_x^2 + 2 \cdot t_x \cdot r_2 \quad (**)$$

Ersetzt man damit in (*) t_y^2, so erhält man:

$$-t_x^2 + 2 \cdot t_x \cdot r_2 + \frac{r_1}{r_2} \cdot t_x^2 - 2 \cdot t_x \cdot r_1 = -t_x^2 + \frac{r_1}{r_2} \cdot t_x^2 - 2 \cdot t_x \cdot r_1 + t_x \cdot r_2 + r_2 \cdot r_1$$

Addiert man auf beiden Seiten dieser Gleichung t_x^2 und $2 \cdot t_x \cdot r_2$ und subtrahiert man $\frac{r_1}{r_2} \cdot t_x^2$ und $t_x \cdot r_2$, so bleibt: $t_x \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1 \Leftrightarrow t_x = r_1$ (da $r_2 \geq \frac{1}{2} \cdot \overline{MQ} > 0$)

D. h. T liegt in den Fällen 1-3 auf der Senkrechten s zu MQ durch Q und Beh. 1 ist gezeigt.

Setzt man nun, um Beh. 2 zu zeigen, $t_x = r_1$ in (**) ein, so erhält man

$$t_y^2 = -r_1^2 + 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \Leftrightarrow r_2 = \frac{t_y^2 + r_1^2}{2 \cdot r_1}.$$

D.h. Zu jedem $t_y \in R$ existiert ein $r_2 \geq \frac{r_1}{2}$ und damit ein Punkt P aus [MQ.

Daraus folgt: Die gesuchte Bahn ist die Senkrechte zu MQ durch Q.