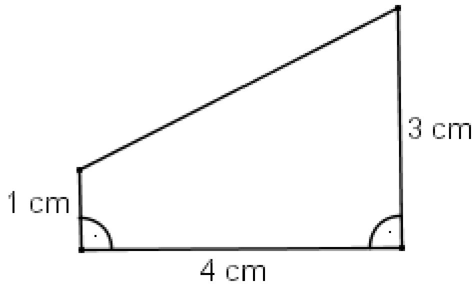
11. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Aufgaben und Lösungsbeispiele 1. Runde 2008

Aufgabe 1

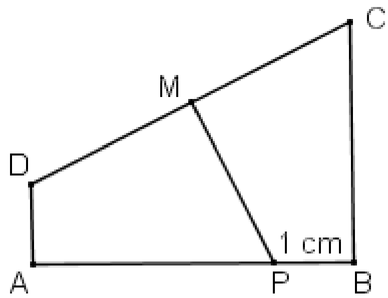
Das abgebildete Viereck soll durch einen einzigen geraden Schnitt so zerlegt werden, dass zwei Teile gleicher Form und Größe entstehen. Begründe, dass dies möglich ist.



Lösung:

Die Eckpunkte des gegebenen Vierecks werden entsprechend nebenstehender Skizze mit A, B, C und D bezeichnet.

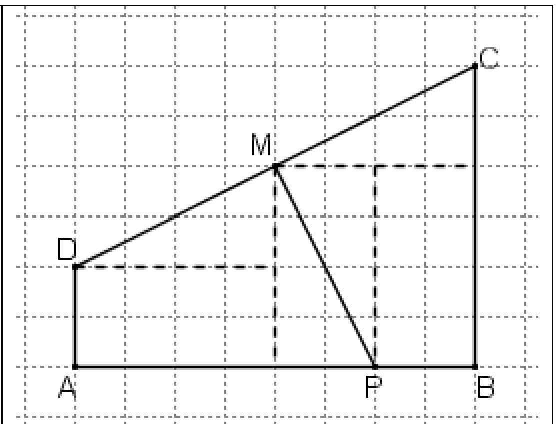
Sind M der Mittelpunkt von [CD] und P der Punkt aus [AB] mit $\overline{PB} = 1cm$, so zerlegt ein Schnitt entlang der Geraden PM das Viereck in zwei Teile gleicher Form und Größe.



1. Beweisvorschlag (Zerlegung auf kariertem Papier)

Offenbar liegt M auf einem Kreuzungspunkt der Gitterlinien. Nun kann man die Vierecke APMD und BCMP wie in der Abbildung in rechtwinklige Dreiecke und Rechtecke zerlegen:

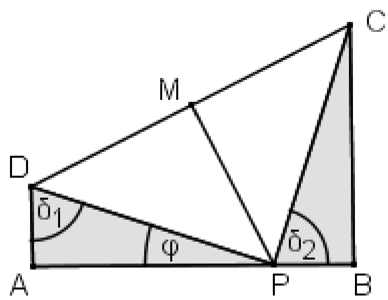
An dieser Zerlegung lässt sich unmittelbar ablesen, dass
- die beiden Rechtecke kongruent sind (Kantenlängen 2cm und 1cm),
- die vier rechtwinkligen Dreiecke kongruent sind (Kathetenlängen 2cm und 1cm),
- die Vierecke APMD und BCMP aus je einem Rechteck und zwei Dreiecken in gleicher Weise aufgebaut sind und damit
- die Vierecke APMD und BCMP gleiche Form und Größe haben.



2. Beweisvorschlag (Kongruenz von Dreiecken)

Zeichnet man in dem vorgegebenen Viereck ABCD die Strecken [PD] und [PC] ein, so gilt:

Die Dreiecke APD und BCP sind nach dem sws-Satz kongruent, denn
- $\overline{AP} = \overline{BC} = 3$ cm
- $\overline{DA} = \overline{PB} = 1$ cm
- $\angle PAD = \angle CBP = 90^0$ jeweils nach Vorgabe



Daraus folgt:

- $\angle ADP = \delta_1 = \delta_2 = \angle BPC$.

  Demnach gilt: $\angle CPD = 180^\circ - (\delta_2 + \varphi) = 180^\circ - (\delta_1 + \varphi) = 90^\circ$ (1)
- $\overline{PD} = \overline{PC}$ (2)

Nach (1) und (2) ist Dreieck DPC rechtwinklig und gleichschenklig mit Basis [DC].

Da die Mittelsenkrechte MP von [DC] die Symmetrieachse des Dreiecks DPC ist, sind die Teildreiecke DPM und PCM kongruent und ebenfalls rechtwinklig und gleichschenklig.

Da die Basen [PD] bzw. [PC] der rechtwinklig, gleichschenkligen Dreiecke DPM und PCM auf den Hypotenusen [PD] bzw. [PC] der kongruenten Dreiecke APD und BCP liegen, haben die beiden Vierecke APMD und BCMP gleiche Form und Größe.

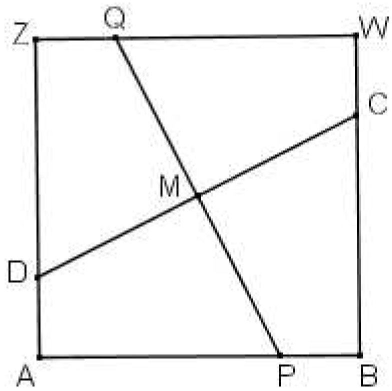
Bemerkung:

Die Kongruenz der Dreiecke DPM und PCM kann auch mit dem sss-Satz gezeigt werden, denn

- $\overline{MD} = \overline{MC}$, da M der Mittelpunkt von [DC] ist
- $\overline{PD} = \overline{PC}$ nach 1. Kongruenzbeweis
- $\overline{PM} = \overline{PM}$

Nun muss aber noch, z. B. über (1), die Gleichschenkligkeit dieser Dreiecke gezeigt werden. Wäre diese nämlich nicht gegeben, so könnte man die Dreiecke DPM und PCM auf zwei verschiedene Arten auf die kongruenten Dreiecke APD bzw. BCP aufsetzen. Allein aus der Kongruenz von Teilfiguren folgt nicht die Kongruenz der Gesamtfigur.

3. Beweisvorschlag (Drehsymmetrie eines Quadrats)



Wir ergänzen das Viereck ABCD zu einem Quadrat ABWZ mit Seitenlänge 4 cm.

Offensichtlich ist M auch sein Mittelpunkt (Diagonalenschnittpunkt).

Die Schnittlinie ist nun die Gerade, die senkrecht auf CD steht und durch M geht. Sie schneidet [AB] in P und [WZ] in Q.

Bei einer Drehung um M mit Drehwinkel 90°wird nun das Quadrat auf sich abgebildet, und zwar A auf B, B auf W, W auf Z und Z auf A, sowie P auf C, C auf Q, Q auf D und D auf P.

Deshalb wird das Viereck APMD bei dieser Drehung auf das Viereck BCMP abgebildet. Diese beiden Vierecke haben also gleiche Form und Größe.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass M auch der Mittelpunkt von [DC] ist. Dies folgt aber sofort aus der Punktsymmetrie des Quadrats (Symmetriezentrum M).

Aufgabe 2

Gegeben sind sechs verschiedene Zahlen. Theo bildet alle möglichen Differenzen von je zwei dieser Zahlen. Anschließend multipliziert er diese Ergebnisse miteinander.

Warum ist dieses Produkt immer negativ?

Beweis:

Vorbemerkung:

Verwendet wird der allgemein bekannte Zusammenhang, dass der Wert eines Produktes genau dann negativ ist, wenn die Anzahl seiner negativen Faktoren ungerade ist.

Feststellung 1:

Mit sechs verschiedenen Zahlen a, b, c, d, e und f kann Theo genau 30 Differenzen bilden.

Begründung durch systematisches Aufschreiben in einer Tabelle:

a-b	a-c	a-d	a-e	a-f	b-c	b-d	b-e	b-f	c-d	c-e	c-f	d-e	d-f	e-f
b-a	c-a	d-a	e-a	f-a	c-b	d-b	e-b	f-b	d-c	e-c	f-c	e-d	f-d	f-e

Möglich sind auch die folgenden Begründungen:

Mit a und je einer der Zahlen b, c, d, e, f lassen sich genau 10 Differenzen bilden.
Mit b und je einer der Zahlen c, d, e, f lassen sich genau 8 Differenzen bilden.
Mit c und je einer der Zahlen d, e, f lassen sich genau 6 Differenzen bilden.
Mit d und je einer der Zahlen e, f lassen sich genau 4 Differenzen bilden.
Mit e und f lassen sich genau 2 Differenzen bilden.
Also kann man mit a, b, c, d, e und f genau 10+8+6+4+2 = 30 Differenzen bilden.

Oder: Nach dem Zählprinzip lassen sich $6 \cdot 5 = 30$ Differenzen bilden.

Feststellung 2:

Das Produkt der Werte dieser 30 Differenzen ist stets negativ.

Begründung:

Zu jeder Differenz x-y ($x, y \in \{a,b,c,d,e,f\}$ mit $x \neq y$) gibt es auch die Differenz y-x.
Da y-x = -(x-y) ist und keine Differenz den Wert 0 besitzt, hat genau eine der beiden Differenzen einen positiven, die andere einen negativen Wert. Die 30 Differenzen lassen sich also zu 15 solchen Paaren ordnen.

Demnach sind in dem Produkt der 30 Differenzenwerte genau 15 Faktoren positiv und 15 negativ, so dass nach Vorbemerkung der Produktwert immer negativ sein muss.

Variante 1:

Für die Produkte der Differenzen eines Paares x-y und y-x mit $x \neq y$ gilt:
$(x-y)\cdot(y-x) = -(x-y)\cdot(x-y) = -(x-y)^2 < 0$, da das Quadrat jeder Zahl ungleich 0 größer 0 ist.
Demnach kann das Produkt der 30 Differenzenwerte in einem ersten Schritt zu einem Produkt mit 15 negativen Faktoren zusammengefasst werden, das folglich immer einen negativen Wert hat.

Variante 2:

Ordnet man ohne Beschränkung der Allgemeinheit die sechs Zahlen, so dass $a<b<c<d<e<f$ gilt, so haben die 15 Differenzen in der ersten Zeile der obigen Tabelle negative Werte, die 15 Differenzen der zweiten Zeile positive Werte.

Das Gesamtprodukt hat damit immer einen negativen Wert.

Aufgabe 3

An der Tafel stehen die natürlichen Zahlen von 1 bis n. Du darfst immer dann drei Zahlen wegwischen, wenn eine dieser Zahlen die Summe der beiden anderen ist.
Für welche $n \leq 20$ kannst Du alle Zahlen wegwischen?

Lösung: Dies ist dann und nur dann möglich, wenn n = 3 oder n = 12 oder n = 15 ist.

Begründung:

1.Teil: Nachweis, dass 3, 12, 15 Lösungen sind.

n = 3 Wegen 1 + 2 = 3 können alle Zahlen in einem Zug weggewischt werden.
n = 12 Hier können die Zahlen in vier Dreiergruppen wie folgt gewischt werden:
1 + 5 = 6; 2 + 9 = 11; 3 + 7 = 10; 4 + 8 = 12.
n = 15 Hier können die Zahlen in fünf Dreiergruppen wie folgt gewischt werden:
1 + 14 = 15; 7 + 6 = 13; 2 + 10 = 12; 3 + 8 = 11; 4 + 5 = 9.

2.Teil: Nachweis, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Eine notwendige Bedingung ist offensichtlich, dass n durch 3 teilbar ist, denn es werden pro Zug genau 3 Zahlen entfernt.

Bezeichnet man die drei bei einem „Wisch" gestrichenen Zahlen mit a, b und $(a+b)$, so ist deren Summe $2 \cdot (a+b)$ eine gerade Zahl. Eine weitere notwendige Bedingung ist also, dass die Gesamtsumme der anfangs an der Tafel stehenden n Zahlen gerade ist.

Diese Summe ist $1+2+3+....+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Somit muss das Produkt $n \cdot (n+1)$ durch 4 teilbar sein.

Da nicht beide der aufeinander folgenden Zahlen n und n + 1 gerade sein können, muss entweder n oder n + 1 durch 4 teilbar sein.

Im ersten Fall ist n also durch 4 und auch durch 3 also – wegen der Teilerfremdheit von 4 und 3 - auch durch 12 teilbar.
Dies ist mit $n \leq 20$ nur für n = 12 der Fall.

Im zweiten Fall ist n + 1 und damit auch n - 3 durch 4 teilbar. Weil n durch 3 teilbar ist, ist auch n - 3 durch 3 teilbar. In diesem Fall ist also n - 3 durch 12 teilbar.
Dies ist offensichtlich mit $n \leq 20$ nur für n = 3 oder für n = 15 der Fall.

Es kann also keine weiteren Lösungen als die genannten geben.

Alternative Argumentation:

Für zwei Zahlen a und b gilt es die folgenden Möglichkeiten:
- Beide sind gerade. Dann ist auch a+b gerade.
- Eine ist gerade, die andere ist ungerade. Dann ist a+b ungerade.
- Beide sind ungerade. Dann ist a+b gerade.

Daran sieht man, dass unter den drei Zahlen a, b und a+b entweder keine oder genau zwei ungerade sind, d.h. dass bei einem „Wisch" entweder keine oder genau zwei ungerade Zahlen weggewischt werden.
Notwendig ist also, dass die Anzahl der ungeraden Zahlen in {1, 2, …, n} gerade ist.
Dies ist bei n = 6, n = 9 und n =18 nicht der Fall.

Aufgabe 4

Aus mehreren gleichartigen Spielwürfeln soll ein massiver Würfel gebaut werden. Dabei muss die Summe der Augenzahlen auf seiner Oberfläche kleiner sein als die Anzahl der verwendeten Spielwürfel.

Für welche Anzahl von Spielwürfeln ist dies möglich?

Ergebnis:

Der Würfel kann gebaut werden, wenn n mindestens 8, d.h. die Würfelzahl mindestens 512 ist.

Lösungsvorschlag:

Ist n die Anzahl der Spielwürfel auf einer Kante, so enthält der gebaute Würfel genau n^3 Spielwürfel, da er massiv, d.h. ohne Hohlräume, sein soll.

Da der massive Würfel – nach Angabe - aus mehreren Spielwürfeln gebaut wird, d. h. $n > 1$ ist, gilt:

Zur Summe S der Augenzahlen auf seiner Oberfläche steuert jeder der

- 8 Eckwürfel jeweils genau 3 Augenzahlen, also mindestens 1+2+3=6 je Würfel bei,
- $12\cdot(n-2)$ Kantenwürfel, die nicht Eckwürfel sind, jeweils genau 2 Augenzahlen, also mindestens 1+2=3 je Würfel bei,
- $6\cdot(n-2)^2$ Würfel, die weder Kanten- noch Eckwürfel sind, jeweils genau eine Augenzahl, also mindestens 1 je Würfel bei.

Der minimale S-Wert ist demnach

$$S_{min} = 8\cdot 6 + 12\cdot(n-2)\cdot 3 + 6\cdot(n-2)^2\cdot 1 = 6\cdot(8+6n-12+n^2-4\cdot n+4) = 6\cdot n\cdot(n+2)$$

S kann kleiner als die Anzahl der verwendeten Spielwürfel sein, wenn S_{min} kleiner als n^3 ist.

$$\begin{aligned} S_{min} < n^3 &\Leftrightarrow 6\cdot n\cdot(n+2) < n^3 \;\big|\; :n \text{ (Dies ist erlaubt, da } n > 0 \text{ ist.)} \\ &\Leftrightarrow 6\cdot n+12 < n^2 \\ &\Leftrightarrow n^2-6\cdot n-12 > 0 \\ &\Leftrightarrow (n-3)^2-9-12 > 0 \\ &\Leftrightarrow (n-3)^2 > 21 \\ &\Leftrightarrow n-3 > \sqrt{21} \text{ (Der Fall } -\sqrt{21} \text{ muss nicht betrachtet werden, da } n>1 \text{ ist.)} \\ &\Leftrightarrow n > 3+\sqrt{21} \approx 7{,}58 \text{, also } n \geq 8 \end{aligned}$$

Demnach muss die Anzahl der Spielwürfel mindestens $8^3 = 512$ sein.

Alternative Abschätzung von $n^2-6\cdot n-12 = n\cdot(n-6)-12$:

- Für $1 \leq n \leq 6$ ist $n-6 \leq 0$, d. h. $n\cdot(n-6)-12 \leq -12 < 0$
- Für $n = 7$ ist $n\cdot(n-6)-12 = 7\cdot 1-12 = -5 < 0$
- Für $n = 8$ ist $n\cdot(n-6)-12 = 8\cdot 2-12 = 16 - 12 = 4 > 0$
- Für $n > 8$ ist $n\cdot(n-6) > 8\cdot 2 = 16$, d.h. $n\cdot(n-6)-12 > 0$

Aufgabe 5

Zeige: Unter drei beliebig gewählten ganzen Zahlen gibt es stets zwei, deren Produkt eine Differenz von zwei Quadratzahlen ist.

Beispiel zum Verständnis der Aufgabenstellung**:**
Die drei Zahlen seien 2, –3 und 5. Die Produkte $2\cdot(-3) = -6$ und $2\cdot 5 = 10$ lassen sich nicht als Differenz von Quadratzahlen schreiben. Das Produkt $(-3)\cdot 5 = -15 = 1^2 - 4^2$ ist hingegen eine Differenz von Quadratzahlen.

1. Beweisvorschlag:

Hilfssätze:

a) Jede ungerade ganze Zahl ist eine Differenz von zwei Quadratzahlen.
b) Jede durch 4 teilbare ganze Zahl ist eine Differenz von Quadratzahlen.

Beweis der Hilfssätze:

a) Jede ungerade ganze Zahl n lässt sich mit einer geeigneten ganzen Zahl k schreiben als $n = 2\,k + 1$. Dann ist die Differenz der aufeinanderfolgenden Quadratzahlen $(k+1)^2$ und k^2 gleich n.
Es ist nämlich: $(k+1)^2 - k^2 = k^2 + 2\cdot k + 1 - k^2 = 2\cdot k + 1 = n$.

b) Sei n eine durch 4 teilbare ganze Zahl. Dann gibt es eine ganze Zahl m mit $n = 4\cdot m$. Dann ist $(m + 1)^2 - (m - 1)^2 = m^2 + 2\cdot m + 1 - m^2 + 2\cdot m - 1 = 4\cdot m = n$.

In beiden Fällen ist n eine Differenz von Quadratzahlen und die Behauptungen der Hilfssätze sind bewiesen.

Zurück zur eigentlichen Aufgabe: Es tritt genau einer der folgenden zwei Fälle auf:

Fall 1: Unter den drei ganzen Zahlen gibt es mindestens zwei ungerade Zahlen.

In diesem Fall ist das Produkt dieser beiden ungeraden Zahlen ebenfalls ungerade.
Nach Teil a) der Behauptung ist dieses Produkt der beiden ungeraden Zahlen eine Differenz von Quadratzahlen.

Fall 2: Es ist nur höchstens eine ungerade Zahl unter den drei Zahlen.

Dann muss es zwei gerade Zahlen a und b unter den drei Zahlen geben. Dann ist deren Produkt durch 4 teilbar. Denn es sei $a = 2\cdot k$ und $b = 2\cdot m$ für ganze Zahlen k und m. Folglich ist das Produkt $a\cdot b = 2\cdot k\cdot 2\cdot m = 4\cdot k\cdot m$ durch 4 teilbar.
Nach Teil b) der Behauptung ist dieses Produkt auch eine Differenz von Quadratzahlen.

2. Beweisvorschlag:

Das Produkt von zwei beliebigen Zahlen a und b kann man immer als Differenz von Quadraten schreiben.

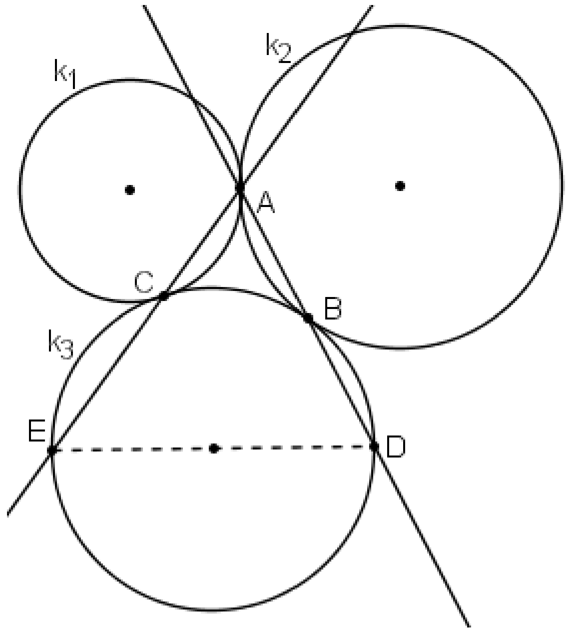
Denn $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \frac{a+b+a-b}{2}\cdot\frac{a+b-a+b}{2} = a\cdot b$.

Sind a und b ganze Zahlen von gleicher Parität (d.h. beide ungerade oder beide gerade), dann sind sowohl $\frac{a+b}{2}$ als auch $\frac{a-b}{2}$ ganze Zahlen.

Da unter drei gegebenen ganzen Zahlen immer mindestens zwei die gleiche Parität haben, so lassen sich diese wie gewünscht als Differenz von zwei Quadratzahlen schreiben.

Aufgabe 6

Drei Kreise k_1, k_2 und k_3 berühren sich von außen paarweise in den Punkten A, B und C (vgl. Abb.).
Die Geraden AB und AC schneiden den Kreis k_3 zusätzlich in den Punkten D und E.
Zeige, dass [DE] ein Durchmesser von k_3 ist.



1. Beweisvorschlag:

1) Die Berührpunkte A, B, C der Kreise k_1, k_2 und k_3 liegen auf den Seiten des Dreiecks $M_1M_2M_3$.

Begründung:
Die Kreise k_1 mit Mittelpunkt M_1 und k_2 mit Mittelpunkt M_2 berühren sich im Punkt A, deshalb gibt es eine gemeinsame Tangente mit dem Berührpunkt A. Da die Berührradien $[M_1A]$ und $[M_2A]$ orthogonal zur gemeinsamen Tangente sind, ist $\angle M_1AM_2$ ein gestreckter Winkel, d.h. der Punkt A liegt auf der Strecke $[M_1AM_2]$.
Analog zeigt man, dass B auf $[M_2M_3]$ und C auf $[M_3M_1]$ liegt.

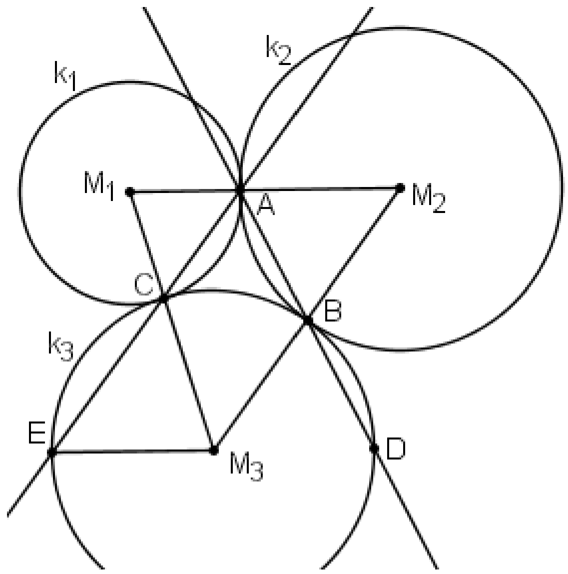
2) AM_1 ist parallel zu EM_3.

Begründung:

In der nebenstehenden Figur gelten folgende Winkelbeziehungen:

a) $\angle ACM_1 = \angle ECM_3$, denn diese sind Scheitelwinkel der Geraden AE und M_1M_3.

b) $\angle M_1AC = \angle ACM_1$, denn sie sind Basiswinkel im von zwei gleichen Radien und einer Sehne gebildeten gleichschenkligen Dreieck AM_1C.



c) $\angle ECM_3 = \angle M_3EC$, denn auch diese sind Basiswinkel im von zwei gleichen Radien und einer Sehne gebildeten gleichschenkligen Dreieck CEM_3.

Daraus folgt: $\angle M_1AC = \angle M_3EC$.

$\angle M_1AC$ und $\angle M_3EC$ sind ein Wechselwinkelpaar und mit der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes folgt aus der Winkelgleichheit: $M_1A \parallel M_3E$.

3) AM_2 ist parallel zu M_3D.

Begründung analog zu 2).

4) [ED] ist Durchmesser des Kreises k_3.

Begründung:
Da A auf M_1M_2 liegt, gilt: AM_1 ist parallel zu AM_2. Aus 2) und 3) folgt dann: EM_3 ist parallel zu M_3D, d.h. M_3 liegt auf [ED]. Damit ist die Sehne [ED] ein Durchmesser des Kreises k_3.

2. Beweisvorschlag:

1) Wie in Lösung 1 zeigt man zunächst, dass die Berührpunkte A, B und C auf den Seiten des Dreiecks $M_1M_2M_3$ liegen.

2) Die Dreiecke AM_1C und EM_3C stimmen in den Winkelgrößen überein.
Insbesondere gilt: $\angle CM_1A = \angle CM_3E$.

Begründung:
Da die Dreiecke AM_1C und EM_3C gleichschenklig sind ($\overline{M_1A} = \overline{M_1C}$ und $\overline{M_3E} = \overline{M_3C}$), gilt für die Größen der Basiswinkel: $\angle M_1AC = \angle ACM_1$ bzw. $\angle ECM_3 = \angle M_3EC$.
Da $\angle ACM_1$ und $\angle ECM_3$ Scheitelwinkel der Geraden AE und M_1M_3 sind, folgt sogar:
$\angle M_1AC = \angle ACM_1 = \angle ECM_3 = \angle M_3EC$.
Die beiden Dreiecke AM_1C und EM_3C stimmen also in jeweils zwei Winkeln überein.
Dann haben auch die verbleibenden Winkel $\angle CM_1A$ und $\angle CM_3E$ die gleiche Größe.

3) Die Dreiecke ABM_2 und BM_3D stimmen in den Winkelgrößen überein.
Insbesondere gilt: $\angle AM_2B = \angle DM_3B$.

Begründung analog zu 2).

4) $\angle DM_3E$ ist ein gestreckter Winkel.

Begründung:
Aus 2) und 3) folgt: $\angle CM_3E + \angle BM_3C + \angle DM_3B = \angle CM_1A + \angle BM_3C + \angle AM_2B = 180^o$,
denn $\angle CM_1A$, $\angle BM_3C$ und $\angle AM_2B$ sind die Innenwinkel des Dreiecks $M_1M_2M_3$.

Aus 4) folgt nun, dass [ED] ein Durchmesser des Kreises k_3 ist.