Landeswettbewerb Mathematik

Bayern

Lösungsbeispiele 1. Runde 2007

Aufgabe 1

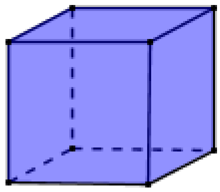
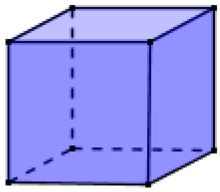
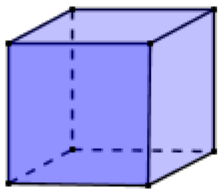
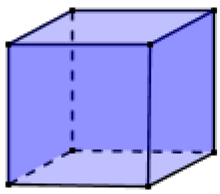
Hans bastelt Würfel. Jede Seitenfläche färbt er entweder weiß oder blau.
Wie viele Würfel, die sich allein durch ihre Färbung unterscheiden, kann Hans herstellen?

Lösung:

Hans kann **zehn** unterschiedlich gefärbte Würfel herstellen.

Beweis:

Wir sortieren die möglichen Würfel nach der Anzahl der weißen Quadrate.

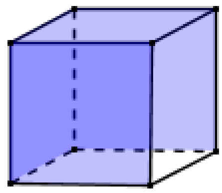
1. Keine Würfelfläche ist weiß gefärbt. Es gibt nur **eine** mögliche Färbung. Bei dieser Färbung sind alle Würfelflächen blau.	
2. Genau **eine** Würfelfläche ist weiß gefärbt. Es gibt **eine** mögliche Färbung. Bei dieser Färbung werden eine Fläche weiß und fünf Flächen blau gefärbt (die blauen Flächen sind nicht eingezeichnet). Da die Würfelflächen ununterscheidbar sind, spielt es keine Rolle welche der sechs Würfelflächen weiß gefärbt wird.	
3. Genau **zwei** Würfelflächen sind weiß gefärbt. Dies ist auf **zwei** verschiedene Arten möglich. a) Die beiden weiß gefärbten Würfelflächen können sich auf benachbarten Würfelflächen befinden (die beiden Flächen besitzen also eine gemeinsame Kante). b) Die beiden weiß gefärbten Würfelflächen können sich auf gegenüberliegenden Würfelflächen befinden. Weitere Möglichkeiten für Würfel mit genau zwei weißen Flächen gibt es nicht.	 

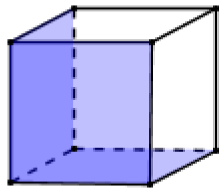
4. Genau **drei** Würfelflächen sind weiß gefärbt.
Auch hier sind **zwei** verschiedene Färbungen möglich.

a) Zwei gegenüberliegende Würfelflächen sind weiß gefärbt. Dann liegt die dritte weiße Würfelfläche dazwischen und die drei weiß gefärbten Flächen bilden ein zusammenhängendes Band.

b) Keine zwei gegenüberliegenden Würfelflächen sind weiß gefärbt. Dann müssen die drei weiß gefärbten Würfelflächen an einer Ecke zusammenstoßen.

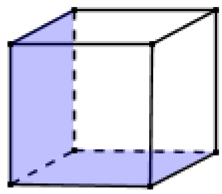
Weitere Möglichkeiten für Würfel mit genau drei weißen Flächen gibt es nicht.

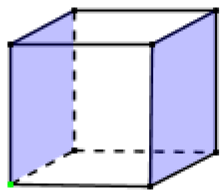




5. Genau **vier** Würfelflächen sind weiß gefärbt.

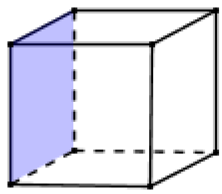
Dann sind genau zwei Würfelflächen blau gefärbt.
Wie bei 3. sind genau **zwei** verschiedene Färbungen möglich.





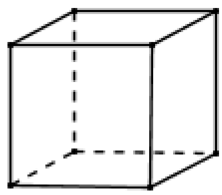
6. Genau **fünf** Würfelflächen sind weiß gefärbt.

Dann ist genau eine Würfelfläche blau gefärbt. Wie bei 2. ist genau **eine** Färbung möglich.



7. Genau **sechs** Würfelflächen sind weiß gefärbt.

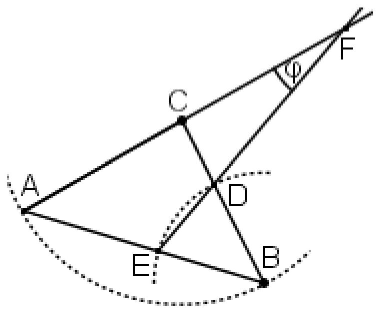
Dann ist keine Würfelfläche blau gefärbt. Wie bei 1. ist genau **eine** Färbung möglich.
Bei dieser Färbung sind alle Flächen weiß gefärbt.



Insgesamt kann Hans also 1+1+2+2+2+1+1 = 10 unterschiedliche Färbungen herstellen.
Die Ergebnisse werden in der Tabelle noch einmal zusammengefasst:

Nr.	Anzahl weiße Würfelflächen	Anzahl blaue Würfelflächen	Anzahl der möglichen Färbungen
1	**0**	**6**	**1**
2	**1**	**5**	**1**
3	**2**	**4**	**2**
4	**3**	**3**	**2**
5	**4**	**2**	**2**
6	**5**	**1**	**1**
7	**6**	**0**	**1**
Summe:			**10**

Aufgabe 2

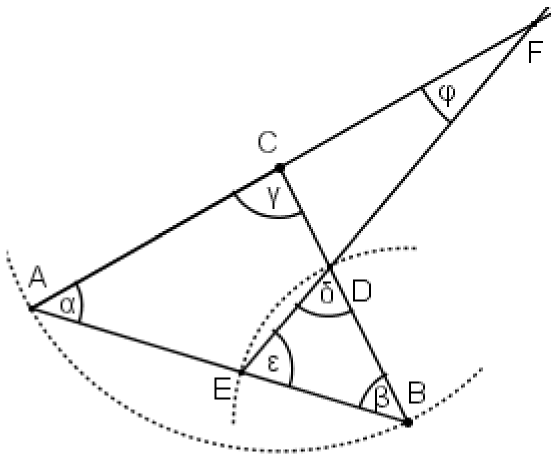


Wie groß sind die Innenwinkel des Dreiecks ABC, wenn
φ = 12° ist?

Lösung:

$\alpha = \beta = 52°$ und $\gamma = 76°$.

1. Beweisvorschlag:



Da die Punkte A und B auf einem Kreis mit Mittelpunkt C liegen, ist $\overline{AC} = \overline{BC}$. Somit ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit Basis [AB]. Daher sind die beiden Basiswinkel dieses Dreiecks gleich groß, also $\alpha = \beta$. **(1)**

Da die Punkte D und E auf einem Kreis mit Mittelpunkt B liegen, ist $\overline{DB} = \overline{EB}$. Somit ist das Dreieck EBD gleichschenklig mit Basis [DE]. Daher sind die Basiswinkel gleich groß, also $\delta = \varepsilon$. **(2)**

Die Winkelsumme im Dreieck EBD ist nach (1) und (2): $\beta + \delta + \varepsilon = \alpha + 2 \cdot \varepsilon = 180°$.

Somit ist $\varepsilon = \dfrac{180° - \alpha}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$.

Da $\sphericalangle$DEA Nebenwinkel von $\sphericalangle$BED ist, ergibt sich:

$\sphericalangle DEA = 180° - \varepsilon = 180° - \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right) = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$.

Die Winkelsumme im Dreieck AEF ist: $\alpha + \left(90° + \dfrac{\alpha}{2}\right) + \varphi = \dfrac{3}{2} \cdot \alpha + 90° + \varphi = 180°$.

Mit $\varphi = 12°$ erhält man: $\dfrac{3}{2} \cdot \alpha = 90° - \varphi = 78°$. Also: $\alpha = \dfrac{2}{3} \cdot 78° = 52° = \beta$.

Aus dem Winkelsummensatz für das Dreieck ABC ergibt sich schließlich:

$\gamma = 180° - 2 \cdot \alpha = 180^0 - 2 \cdot 52° = 180° - 104° = 76°$.

2. Beweisvorschlag:

Wie im 1. Beweisvorschlag erkennt man: $\alpha = \beta$ und $\delta = \varepsilon$ (siehe (1) und (2)).

Der Winkelsummensatz im Dreieck EBD ergibt: $\delta = \dfrac{180° - \alpha}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$ (*)

Der Winkelsummensatz im Dreieck ABC ergibt: $180° - \gamma = \alpha + \beta = 2 \cdot \alpha$. (**)

$\sphericalangle$FDC ist Scheitelwinkel zu $\sphericalangle$EDB, also $\sphericalangle$FDC = δ.

$\sphericalangle$DCF ist Nebenwinkel zu $\sphericalangle$ACD, also $\sphericalangle$DCF=180° - γ.

Der Winkelsummensatz im Dreieck CDF ergibt nun: $\delta + (180° - \gamma) + \varphi = 180°$.

Aus $\varphi = 12°$, (*) und (**) folgt $\left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right) + 2 \cdot \alpha = 168°$.

Somit folgt: $\dfrac{3}{2} \cdot \alpha = 78°$, also $\alpha = 52° = \beta$. Aus (**) ergibt sich nun: $\gamma = 180° - 2 \cdot \varepsilon = 76°$.

Aufgabe 3

Zwölf Teilnehmer eines Song-Wettbewerbs werden von einer siebenköpfigen Jury bewertet. Jeder Wertungsrichter gibt jedem Teilnehmer zwischen 1 und 12 Punkte; dabei darf er keine zwei Teilnehmer gleich bewerten. Wer die höchste Gesamtpunktzahl erhält, belegt – evtl. zusammen mit weiteren Teilnehmern – den 1. Platz.

Sänger Mike erfährt von einem Reporter seine Gesamtpunktzahl und gibt dazu den sachlich richtigen Kommentar: „Es ist durchaus möglich, dass ich der alleinige Sieger bin.“

Bestimme die kleinste Gesamtpunktzahl, mit der Mike als einziger den 1. Platz belegen kann.

Lösung:

Die kleinste Gesamtpunktzahl, mit der ein Teilnehmer noch als einziger den 1. Platz belegen kann, beträgt 47.

Beweis:

Jeder der sieben Juroren vergibt (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12) Punkte = 78 Punkte. Insgesamt werden also $7 \cdot 78$ Punkte = 546 Punkte auf die 12 Teilnehmer vergeben. (*)

Im Durchschnitt erhält also jeder Teilnehmer 546 Punkte : 12 = 45,5 Punkte. Es muss also einen Sänger oder eine Sängerin mit mindestens 46 Punkten geben.
Mindestens ein Sänger hat also 46 oder mehr Punkte erhalten.

Einen alleinigen Sieger mit genau 46 Punkten kann es aber nicht geben. Denn sonst hätten ja die anderen 11 Teilnehmer höchstens 45 Punkte, die Gesamtzahl aller vergebenen Punkte wäre also höchstens $46+11 \cdot 45=541$.
Das steht im Widerspruch zu (*).

Ein Gewinner des Wettbewerbs, der als einziger den 1. Platz belegt, muss also mindestens 47 Punkte aufweisen. Wenn ein Teilnehmer mit 47 Punkten alleiniger Sieger ist, so bleiben den übrigen 11 Teilnehmern zusammen 499 Punkte.

Mögliche Verteilung:

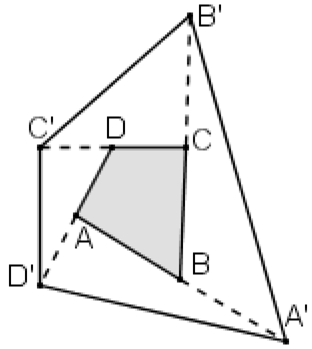
Da $499 = 7 \cdot 45 + 4 \cdot 46$, ist eine solche Punkteverteilung z.B. dann möglich, wenn 7 Teilnehmer 45 Punkte und 4 Teilnehmer 46 Punkte erhalten Die folgende Tabelle zeigt, dass es eine solche Punkteverteilung gibt, bei der Mike mit 47 Punkten alleiniger Sieger ist, während die 4 Teilnehmer B, C, D und J jeweils 46 Punkte und die übrigen 7 Teilnehmer jeweils 45 Punkte erhielten.

	Mike	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**
Juror Nr. 1	6	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12
Juror Nr. 2	6	12	11	10	9	8	7	5	4	3	2	1
Juror Nr. 3	6	1	2	3	4	5	11	8	9	7	10	12
Juror Nr. 4	7	12	11	10	9	8	2	5	4	3	6	1
Juror Nr. 5	6	7	1	2	3	4	5	8	9	10	11	12
Juror Nr. 6	8	6	12	9	7	4	1	10	5	11	2	3
Juror Nr. 7	8	6	7	9	10	11	12	1	5	2	3	4
Summe	**47**	**45**	**46**	**46**	**46**	**45**	**45**	**45**	**45**	**46**	**45**	**45**

Somit ist es möglich, dass ein Teilnehmer mit 47 Punkten alleiniger Sieger wird.

Aufgabe 4

In einem Viereck ABCD sind alle Innenwinkel kleiner als 180°. Spiegelt man A an B, B an C, C an D und D an A, so entsteht das Viereck A'B'C'D'.



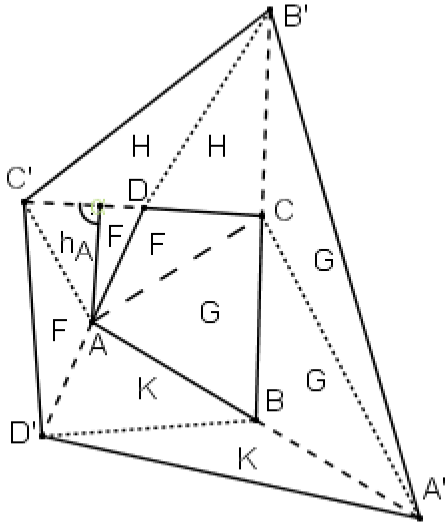
Wie groß ist das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Vierecke?

Lösung:

Das Verhältnis der Flächeninhalte von Viereck ABCD zu Viereck A'B'C'D' ist 1:5.
Die Fläche des Vierecks ABCD nimmt also ein Fünftel der Fläche des Vierecks A'B'C'D' ein.

Beweis:

In nebenstehender Zeichnung haben die Dreiecke CDA, DC'A und C'D'A den gleichen Flächeninhalt F:



- Die Dreiecke CDA und DC'A haben denselben Flächeninhalt, denn mit $\overline{CD} = \overline{C'D}$ und der gemeinsamen Höhe h_A durch A gilt:

  $$F_{\Delta CDA} = \frac{1}{2}\cdot\overline{CD}\cdot h_A = \frac{1}{2}\cdot\overline{C'D}\cdot h_A$$
  $$= F_{\Delta DC'A} = F.$$

- Ebenso haben die Dreiecke DC'A und C'D'A gleichen Flächeninhalt F, denn mit $\overline{DA} = \overline{D'A}$ und der gemeinsamen Höhe $h_{C'}$ durch C' gilt:

  $$F_{\Delta DC'A} = \frac{1}{2}\cdot\overline{DA}\cdot h_{C'} = \frac{1}{2}\cdot\overline{D'A}\cdot h_{C'} = F_{\Delta C'D'A} = F$$

Analog haben auch die Dreiecke ABC; BA'C und CA'B' den gleichen Flächeninhalt G.

Für den Flächeninhalt von Viereck ABCD gilt dabei offensichtlich*:* $F_{\square ABCD} = F + G$.

Mit einer analogen Argumentation beweist man, dass

- die Dreiecke BCD, CB'D und B'C'D den gleichen Flächeninhalt H,
- die Dreiecke ABD, AD'B und D'A'B den gleichen Flächeninhalt K haben.

Damit gilt für den Flächeninhalt von Viereck ABCD: $F_{\square ABCD} = H + K$.

Insgesamt gilt also für den Flächeninhalt des großen Vierecks A'B'C'D':

$$F_{\square A'B'C'D'} = F_{\square ABCD} + 2\cdot F + 2\cdot G + 2\cdot H + 2\cdot K = F_{\square ABCD} + 2\cdot(F + G) + 2\cdot(H + K)$$
$$= F_{\square ABCD} + 2\cdot F_{\square ABCD} + 2\cdot F_{\square ABCD} = 5\cdot F_{\square ABCD}$$

Die Fläche des Vierecks ABCD nimmt also ein Fünftel der Fläche des Vierecks A'B'C'D' ein.,

Aufgabe 5

Bestimme alle natürlichen Zahlen x und y mit 2x + 7y + 2007 = xy.

Lösung:

Es gibt vier Lösungen:
1. x = 8, y = 2023
2. x = 50, y = 49
3. x = 54, y = 45
4. x = 2028, y = 3

1. Beweismöglichkeit:

Die Gleichung $2x+7y+2007=x\cdot y$ ist äquivalent zu $2007=x\cdot y-2x-7y$.
In der letzten Gleichung kann man die rechte Seite umformen:

$$x\cdot y-2x-7y=(x-7)\cdot(y-2)-14.$$

Somit erhält man: $2007=(x-7)\cdot(y-2)-14$ oder $2021=(x-7)\cdot(y-2)$. (*)

Die Primfaktorzerlegung von 2021 ist 2021 = 43·47.
Also sind 1, 43, 47 und 2021 die einzigen Teiler von 2021.

Da $|x-7|$ nach (*) ein Teiler von 2021 = 43·47 ist, kann $x-7$ nur ±1, ±43, ±47 oder ±2021 sein.

Die Fälle $x-7=-43$, $x-7=-47$ und $x-7=-2021$ können sofort ausgeschlossen werden, da hier x negativ wäre, was der Angabe widerspricht.

Der Fall $x-7=-1$ ergibt x = 6 und y = -2019. Dies widerspricht ebenfalls der Angabe.

Somit bleiben die folgenden Fälle zu untersuchen:

Fall	$x-7$	$y-2=\frac{2021}{x-7}$	x	y
1	1	2021	8	2023
2	43	47	50	49
3	47	43	54	45
4	2021	1	2028	3

Dies sind genau die behaupteten Lösungen.

2. Beweismöglichkeit:

Durch Äquivalenzumformungen ergibt sich aus der Ausgangsgleichung durch Auflösung nach y:

$$2x+7y+2007=x\cdot y \;\Leftrightarrow\; x\cdot y-7y=2007+2x \;\Leftrightarrow\; y\cdot(x-7)=2007+2x \qquad (**)$$

$$\Leftrightarrow\quad y=\frac{2007+2x}{x-7}=\frac{2007+2\cdot(x-7)+14}{x-7}=\frac{2021}{x-7}+2 \quad (x\neq 7)$$

Der Fall x = 7 ist nicht möglich, da er – in (**) eingesetzt – einen Widerspruch liefert.

Da y eine natürliche Zahl ist, muss auch $\frac{2021}{x-7}$ eine ganze Zahl größer als -2 sein.

Somit muss $|x-7|$ ein Teiler von 2021 sein.

Die gleiche Argumentation wie in der 1. Beweismöglichkeit liefert die vier Lösungen.

Aufgabe 6

Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2, die sich von außen berühren. Ihre Mittelpunkte sind M_1 und M_2. Ein Halbkreis über der Strecke $[M_1M_2]$ schneidet k_1 in P_1 und k_2 in P_2.

Zeige: Die Kreise k_1 und k_2 schneiden aus der Geraden P_1P_2 gleich lange Sehnen aus.

Bezeichnungen:

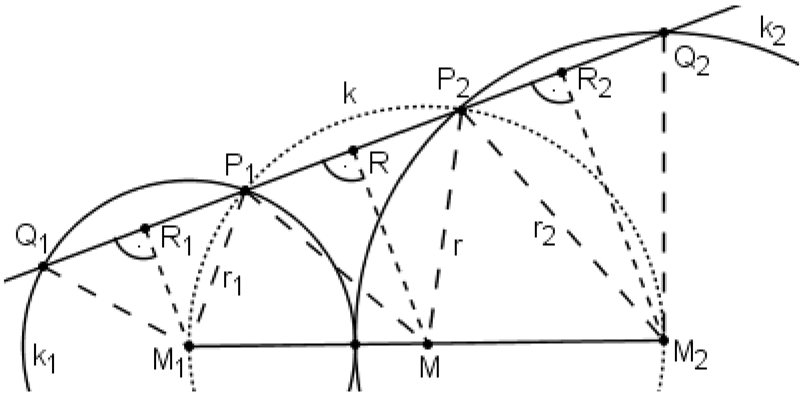
Die Gerade P_1P_2 hat mit dem Kreis k_1 (k_2) außer P_1 (P_2) noch einen weiteren Schnittpunkt Q_1 (Q_2). Zu zeigen ist also: $\overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2}$.
Wir bezeichnen den Mittelpunkt von $[M_1M_2]$ mit M sowie die Fußpunkte der Höhen von M, M_1 und M_2 auf P_1P_2 mit R, R_1 und R_2.

1. Beweismöglichkeit: (Mit Mittelparallele)

Da MR, M_1R_1 und M_2R_2 senkrecht auf P_1P_2 stehen, sind sie zueinander parallel.

Da außerdem M der Mittelpunkt von $[M_1M_2]$ ist, ist MR die Mittelparallele zu M_1R_1 und M_2R_2.

Daraus folgt, dass R der Mittelpunkt von $[R_1R_2]$ ist, d. h. es gilt: $\overline{RR_1} = \overline{RR_2}$.



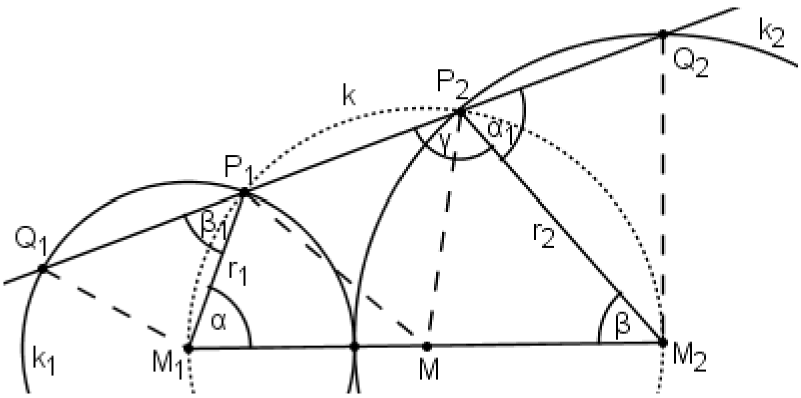
Die Dreiecke $P_1Q_1M_1$, P_2P_1M und $Q_2P_2M_2$ sind gleichschenklig, da jeweils zwei ihrer Seiten Kreisradien sind.

In gleichschenkligen Dreiecken ist die Höhe gleichzeitig auch Seitenhalbierende.
Daher ist R_1 die Mitte von $[P_1Q_1]$, R die Mitte von $[P_1P_2]$ und R_2 die Mitte von $[P_2Q_2]$.

Also gilt: $\overline{P_1Q_1} = 2 \cdot \overline{P_1R_1} = 2 \cdot \left(\overline{RR_1} - \overline{RP_1}\right) = 2 \cdot \left(\overline{RR_2} - \overline{RP_2}\right) = 2 \cdot \overline{P_2R_2} = \overline{P_2Q_2}$.
Dies war zu zeigen.

2. Beweismöglichkeit: (Mit Sehnenviereck)

Die Eckpunkte des Vierecks $M_1M_2P_2P_1$ liegen alle auf dem Halbkreis k über der Strecke $[M_1M_2]$. Es handelt sich also um ein Sehnenviereck. In einem Sehnenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Innenwinkel zu 180°.



Mit $\alpha = \sphericalangle M_2M_1P_1$ und $\gamma = \sphericalangle P_1P_2M_2$ gilt also: $\alpha + \gamma = 180^\circ$.

Da $\alpha_1 = \sphericalangle M_2P_2Q_2$ und γ Nebenwinkel sind, gilt: $\alpha_1 = 180^\circ - \gamma = \alpha$. (*)

Da $\overline{MM_1} = \overline{MP_1}$ und $\overline{M_2P_2} = \overline{M_2Q_2}$, sind die Dreiecke MP_1M_1 und $M_2Q_2P_2$ gleichschenklig mit Basiswinkeln α und α_1. Wegen (*) sind diese beiden Dreiecke ähnlich zueinander.

Entsprechende Seiten stehen demnach im gleichen Verhältnis, d. h.: $\frac{\overline{P_2Q_2}}{\overline{M_1P_1}} = \frac{\overline{M_2P_2}}{\overline{MM_1}}$.

Aus $\overline{M_1P_1} = r_1$, $\overline{M_2P_2} = r_2$ und $\overline{MM_1} = \frac{r_1 + r_2}{2}$ folgt somit: $\overline{P_2Q_2} = \frac{\overline{M_2P_2}}{\overline{MM_1}} \cdot \overline{M_1P_1} = \frac{2 \cdot r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$ (**).

Analog erkennt man, dass $\beta = \sphericalangle P_2M_2M = \sphericalangle Q_1P_1M_1 = \beta_1$ und damit die gleichschenkligen Dreiecke MM_2P_2 und $M_1P_1Q_1$ ebenfalls ähnlich zueinander sind.

Entsprechende Seiten stehen demnach im gleichen Verhältnis, d. h.: $\frac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{M_2P_2}} = \frac{\overline{M_1P_1}}{\overline{MM_2}}$.

Aus $\overline{M_1P_1} = r_1$, $\overline{M_2P_2} = r_2$ und $\overline{MM_2} = \frac{r_1 + r_2}{2}$ folgt somit: $\overline{P_1Q_1} = \frac{\overline{M_1P_1}}{\overline{MM_2}} \cdot \overline{M_2P_2} = \frac{2 \cdot r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$ (***).

Aus den Beziehungen (**) und (***) ergibt sich nun: $\overline{P_1Q_1} = \frac{2 \cdot r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} = \overline{P_2Q_2}$.

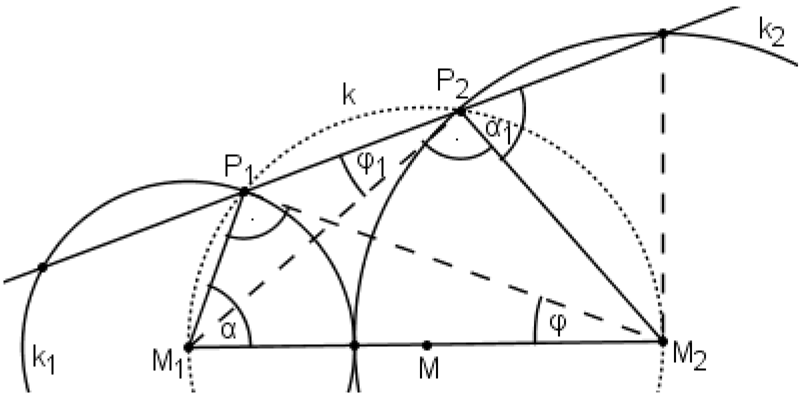
Dies war zu zeigen.

Variante der 2. Beweismöglichkeit: (Mit Umfangswinkelsatz)

Die Behauptung $\alpha = \alpha_1$ kann auch wie folgt bewiesen werden:

Die Winkel $\varphi = \sphericalangle P_1M_2M_1$ und $\varphi_1 = \sphericalangle P_1P_2M_1$ sind Umfangswinkel zum gleichen Kreisbogen über $[P_1M_1]$.

Nach dem Umfangswinkelsatz ist also $\varphi = \varphi_1$.



Nach dem Satz des Thales ist $\sphericalangle M_1P_1M_2 = 90^o$.
Der Winkelsummensatz für das Dreieck $M_1M_2P_1$ ergibt also: $\alpha = 90^o - \varphi$.

Ebenso ist nach dem Satz des Thales $\sphericalangle M_1P_2M_2 = 90^o$.
Da φ_1, $\sphericalangle M_1P_2M_2$ und α_1 zusammen einen gestreckten Winkel ergeben, folgt $\alpha_1 = 180^o - (90^o + \varphi_1) = 90^o - \varphi_1$.

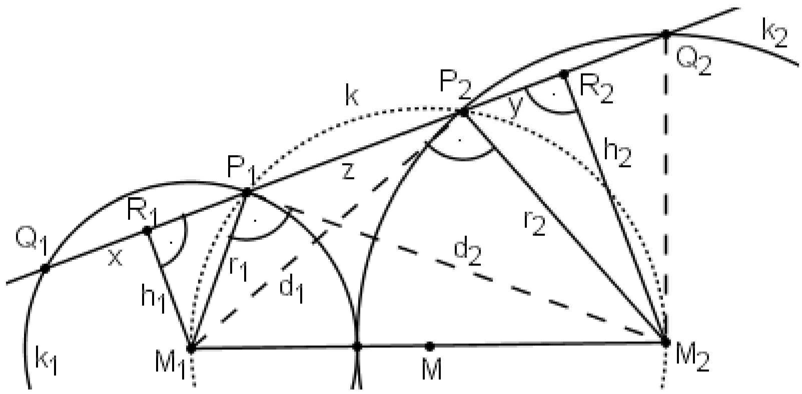
Aus $\alpha = 90^o - \varphi$, $\alpha_1 = 90^o - \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_1$ ergibt sich nun $\alpha = 90^o - \varphi = 90^o - \varphi_1 = \alpha_1$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

3. Beweismöglichkeit: (Mit dem Satz von Pythagoras)

Mit $x = \overline{Q_1P_1}$, $y = \overline{P_2Q_2}$,
$z = \overline{P_1P_2}$, $h_1 = \overline{M_1R_1}$, $h_2 = \overline{M_2R_2}$,
$d_1 = \overline{M_1P_2}$ und $d_2 = \overline{M_2P_1}$ gilt:

(1) Da die Dreiecke $M_1P_1Q_1$ und $M_2Q_2P_2$ gleichschenklig sind:
$\overline{R_1P_1} = \frac{1}{2} \cdot x$, $\overline{P_2R_2} = \frac{1}{2} \cdot y$



(2) Nach dem Satz von Pythagoras in den rechtwinkligen Dreiecken

$M_1P_2R_1$ ($\sphericalangle M_1R_1P_2 = 90^o$): $\left(\frac{1}{2}\cdot x+z\right)^2 = d_1^{\,2} - h_1^{\,2}$ (2.1)

$M_1M_2P_2$ ($\sphericalangle M_1P_1M_2 = 90^o$): $d_1^{\,2} = (r_1+r_2)^2 - r_2^{\,2} = r_1^{\,2} + 2\cdot r_1\cdot r_2$ (2.2)

$M_1P_1R_1$ ($\sphericalangle M_1R_1P_1 = 90^o$): $h_1^{\,2} = r_1^{\,2} - \left(\frac{1}{2}\cdot x\right)^2 = r_1^{\,2} - \frac{1}{4}\cdot x^2$ (2.3)

(2.2) und (2.3) in (2.1) eingesetzt, ergibt:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot x+z\right)^2 = r_1^{\,2} + 2\cdot r_1\cdot r_2 - r_1^{\,2} + \frac{1}{4}\cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\cdot x^2 + x\cdot z + z^2 = 2\cdot r_1\cdot r_2 + \frac{1}{4}\cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2\cdot r_1\cdot r_2 - z^2}{z} \qquad (2.4)$$

(3) Nach dem Satz von Pythagoras in den rechtwinkligen Dreiecken

$M_2R_2P_1$ ($\sphericalangle P_1R_1M_2 = 90^o$): $\left(\frac{1}{2}\cdot y+z\right)^2 = d_2^{\,2} - h_2^{\,2}$ (3.1)

$M_1M_2P_1$ ($\sphericalangle M_1P_2M_2 = 90^o$): $d_2^{\,2} = (r_1+r_2)^2 - r_1^{\,2} = r_2^{\,2} + 2\cdot r_1\cdot r_2$ (3.2)

$M_2R_2P_2$ ($\sphericalangle P_2R_2M_2 = 90^o$): $h_2^{\,2} = r_2^{\,2} - \left(\frac{1}{2}\cdot y\right)^2 = r_2^{\,2} - \frac{1}{4}\cdot y^2$ (3.3)

(3.2) und (3.3) in (3.1) eingesetzt, ergibt:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot y+z\right)^2 = r_2^{\,2} + 2\cdot r_1\cdot r_2 - r_2^{\,2} + \frac{1}{4}\cdot y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\cdot y^2 + y\cdot z + z^2 = 2\cdot r_1\cdot r_2 + \frac{1}{4}\cdot y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{2\cdot r_1\cdot r_2 - z^2}{z} \qquad (3.4)$$

Aus (2.4) und (3.4) folgt: x = y