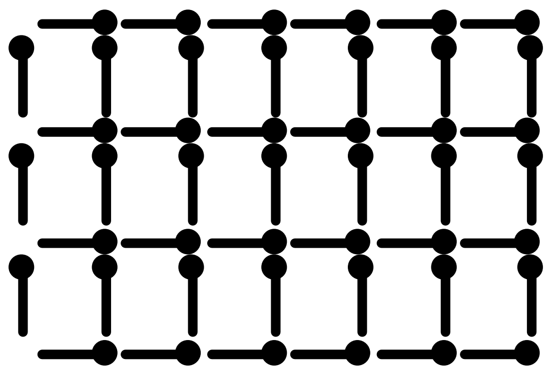
9. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Aufgaben und Lösungsbeispiele 2. Runde 2006/2007

Aufgabe 1



Aus Streichhölzern wird wie in der Abbildung ein (6×3) – Rechteckgitter gelegt. Für die ganze Figur sind 6² + 3² Streichhölzer nötig.

Zeige, dass es beliebig viele (a×b) – Rechteckgitter dieser Art gibt, bei denen die erforderliche Anzahl von Streichhölzern a² + b² beträgt.

Lösung:

Sei u > 1 eine beliebige natürliche Zahl und $a = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u+1)$, $b = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u-1)$.

Dann benötigt man für das (a×b) – Rechteckgitter in der beschriebenen Form $a^2 + b^2$ Streichhölzer. Somit gibt es unendlich viele solche Rechteckgitter.

Beweis:

Für die $b+1$ Reihen mit waagerechten Streichhölzern benötigt man $a \cdot (b+1)$ Hölzer.
Für die $a+1$ Spalten mit senkrechten Streichhölzern benötigt man $(a+1) \cdot b$ Hölzer.
Für ein (a×b) – Rechteckgitter sind demnach $(a+1) \cdot b + a \cdot (b+1)$ Hölzer erforderlich.
Seien nun für eine beliebige Zahl u > 1 die Zahlen a und b gegeben durch
$a = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u+1)$ und $b = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u-1)$.

Es ist zu zeigen, dass für jede Wahl von u>1 für diese Zahlen an und natürliche Zahlen sind und dass $(a+1) \cdot b + a \cdot (b+1) = a^2 + b^2$ gilt.

Ist u ungerade, so sind u+1 und u-1 gerade, ist u gerade, so sind u+1 und u-1 ungerade. Deshalb sind u·(u+1) und u·(u-1) gerade und daher a und b natürlich.
Aus $a = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u+1)$ und $b = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u-1)$ folgt $a + b = u^2$ und $a - b = u$.

Somit folgt: $(a-b)^2 = u^2 = a + b$ bzw. $a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = a + b$.

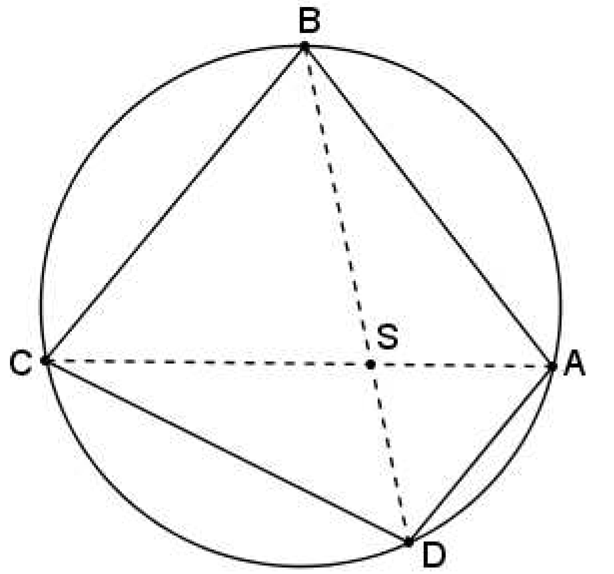
Daraus ergibt sich: $a^2 + b^2 = a \cdot b + b + a \cdot b + a = (a+1) \cdot b + a \cdot (b+1)$.

Dies war zu zeigen.

Aufgabe 2

Im Sehnenviereck ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt S gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ *sowie* $\overline{AD} + \overline{AS} = \overline{AB}$.

Bestimme die Größen der Innenwinkel des Vierecks.



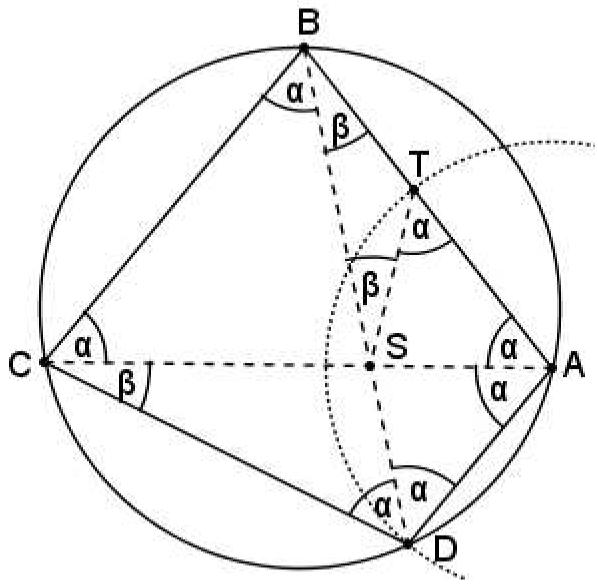
Lösung:

Die Innenwinkelweiten im Viereck ABCD sind

$\angle BAD = \angle ADC = \frac{4}{7} \cdot 180^o$ und $\angle CBA = \angle DCB = \frac{3}{7} \cdot 180^o$.

1. Lösungsmöglichkeit:

Wir bezeichnen den Winkel $\angle CAD$ wie in der nebenstehenden Zeichnung mit α, den Winkel $\angle DBA$ mit β.



Behauptung:
Das Dreieck SDA ist gleichschenklig.

Beweis der Behauptung:

- $\angle CAD = \angle CBD = \alpha$, denn beide Winkel sind Umfangswinkel über dem Kreisbogen über [CD]. (Umfangswinkelsatz).
- $\angle CBD = \angle BDC = \alpha$, denn diese beiden Winkel sind Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck BCD.
- $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$, denn beide Winkel sind Umfangswinkel über dem Bogen über [BC]. (Umfangswinkelsatz).
- $\angle BAC = \angle ACB = \alpha$, denn beide Winkel sind Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck *ABC*.
- $\angle ACB = \angle ADB = \alpha$, denn beide Winkel sind Umfangswinkel über dem Bogen über [AB].

Das Dreieck *SDA* ist also gleichschenklig, denn die beiden Winkel $\angle ADS$ und $\angle SAD$ sind gleich groß. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Der Punkt T liege nun auf der Strecke [AB], so dass $\overline{AT} = \overline{AD}$.

Damit sind die beiden Dreiecke SAT und SDA nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent, denn $\overline{TA} = \overline{AD}$, $\angle TAS = \angle SAD = \alpha$ und [SA] ist eine gemeinsame Seite. Somit ist nach der Behauptung auch das Dreieck SAT gleichschenklig mit $\overline{AS} = \overline{ST}$ und $\angle STA = \angle TAS = \alpha$.
Wegen der Voraussetzung $\overline{AD} + \overline{AS} = \overline{AB}$ (Aufgabenstellung), folgt aus $\overline{AD} = \overline{AT}$ und $\overline{AT} + \overline{TB} = \overline{AB}$ auch $\overline{TB} = \overline{AS} = \overline{ST}$. Somit ist auch das Dreieck BST gleichschenklig. Dann ist $\angle TSB = \beta$, denn $\angle SBT$ und $\angle TSB$ sind Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck BST. Aus der Winkelsumme im Dreieck BDA ergibt sich: $\beta = 180^\circ - 3 \cdot \alpha$.
Außerdem ist $\angle BTS = 180^\circ - \alpha$, denn $\angle BTS$ ist Nebenwinkel von $\angle STA = \alpha$.

Für die Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck BST ergibt sich nun:
$2 \cdot \beta + 180^\circ - \alpha = 2 \cdot (180^\circ - 3 \cdot \alpha) + 180^\circ - \alpha = 540^\circ - 7 \cdot \alpha = 180^\circ$.

Also $\alpha = \frac{360^\circ}{7} = \frac{2}{7} \cdot 180^\circ$ und $\beta = 180^\circ - 3 \cdot \alpha = \frac{1}{7} \cdot 180^\circ$.
Um die Innenwinkel im Viereck ABCD zu berechnen, fehlt noch $\angle DCA$.
Es ist $\angle DCA = \beta$, denn $\angle DCA$ und $\angle DBA = \beta$ sind Umfangswinkel über dem Kreisbogen über [DA].

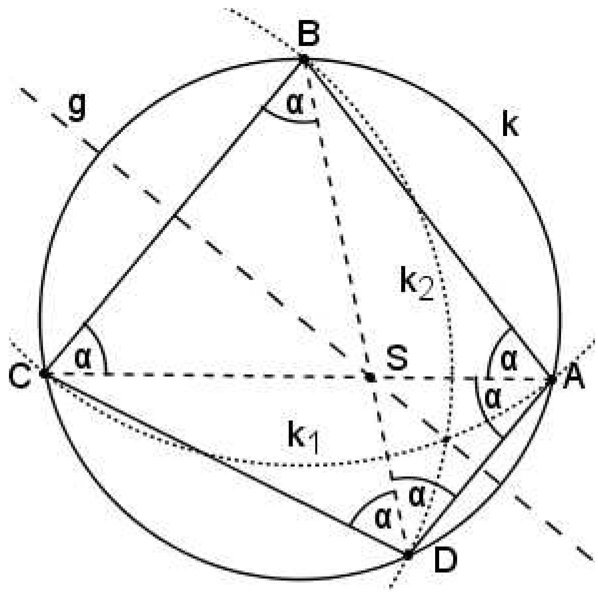
Somit sind die Größen der Innenwinkel im Viereck ABCD:
$\angle BAD = \angle ADC = 2 \cdot \alpha = \frac{4}{7} \cdot 180^\circ$ und $\angle CBA = \angle DCB = \alpha + \beta = \frac{3}{7} \cdot 180^\circ$.

Variante zum Beweis der Behauptung in der 1. Lösungsmöglichkeit (ohne Umfangswinkelsatz):

Die Punkte A, B, C, D liegen auf einem gemeinsamen Kreis k.

Da $\overline{BC} = \overline{AB}$ und $\overline{BC} = \overline{CD}$, liegt A auf dem Kreis k_1 um B vom Radius $\overline{BC}$ und D auf dem Kreis k_2 um C vom Radius $\overline{BC}$.

Bei der Spiegelung der Strecke [BC] an der Mittelsenkrechten g der Strecke [BC] ist der Punkt C das Bild des Punktes B und der Kreis k_2 das Bild des Kreises k_1. Der Kreis k ist Fixkreis der Spiegelung.



Somit geht bei dieser Spiegelung der Schnittpunkt A der Kreise k und k_1 in den Schnittpunkt D der Bildkreise k und k_2 über. D ist somit der Bildpunkt von A bei dieser Spiegelung. Damit ist die Strecke [AD] orthogonal zur Spiegelachse g bzw. parallel zur Strecke [BC].

Daraus folgt: Das Sehnenviereck ABCD ist ein achsensymmetrisches Trapez.

Da der Schnittpunkt S der Vierecksdiagonalen auf der Spiegelachse liegt, ist g Symmetrieachse des Dreiecks SDA, dieses ist also achsensymmetrisch und somit gleichschenklig.
Bezeichnet man den Winkel $\angle CAD$ wieder mit α, so ergibt sich:

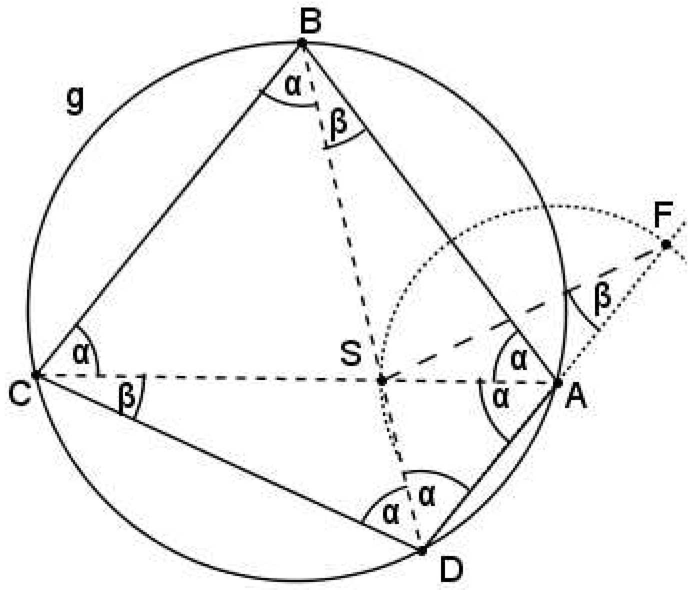
- $\angle ADB = \alpha$, denn $\angle CAD$ und $\angle ADB$ liegen symmetrisch bezüglich der Spiegelachse g.
- $\angle ACB = \alpha$, denn $\angle CAD$ und $\angle ACB$ sind Wechselwinkel an den Parallelen BC und AD.
- $\angle BAC = \alpha$, denn $\angle ACB$ und $\angle BAC$ sind Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ABC.

Ähnlich folgt aus Symmetriegründen: $\angle CBD = \angle BDC = \alpha$.

Damit ist die Behauptung aus der 1. Lösungsmöglichkeit bewiesen.
Der Rest des Beweises erfolgt wie in der 1. Lösungsmöglichkeit.

2. Lösungsmöglichkeit:

Sei F der Schnittpunkt des Kreises um A mit Radius $\overline{AS}$ und der Verlängerung der Strecke [AD] über A hinaus.
Der Winkel $\angle CAD$ Wird wieder mit α bezeichnet. Wie im ersten Lösungsvorschlag oder der Variante dazu, erkennt man, dass der Winkel α an den in der Zeichnung markierten Stellen vorliegt.
Die Dreiecke BSA und FSD sind nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent, denn $\overline{AS} = \overline{DS}$, $\overline{AB} = \overline{DA} + \overline{AS} = \overline{DA} + \overline{AF} = \overline{DF}$ und der eingeschlossene Winkel ist beide Male α.



Aus der Kongruenz der Dreiecke BSA und FSA folgt: $\angle DBA = \angle SFA = \beta$.
Es ist auch $\angle DCA = \beta$, denn $\angle DCA$ und $\angle SBT = \angle DBA$ sind Umfangswinkel über dem Kreisbogen über [DA].

Da das Dreieck SAF gleichschenklig ist, gilt: $\angle ASF = \angle SFA = \beta$.

Aus der Winkelsumme im Dreieck DAB ergibt sich: $\beta = 180^\circ - 3 \cdot \alpha$.
Aus der Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck SAF ergibt sich:
$2 \cdot \beta + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$ oder $\alpha = 2 \cdot \beta$.
Durch Einsetzen von $\alpha = 2 \cdot \beta$ in $\beta = 180^\circ - 3 \cdot \alpha$ ergibt sich:

$7 \cdot \beta = 180^\circ$ oder $\beta = \frac{1}{7} \cdot 180^\circ$. Somit ist $\alpha = 2\beta = \frac{2}{7} \cdot 180^\circ$ $\alpha = 2 \cdot \beta = \frac{2}{7} \cdot 180^\circ$.

Die Innenwinkel im Viereck ABCD sind also

$\angle BAD = \angle ADC = 2 \cdot \alpha = \frac{4}{7} 180^\circ$ und $\angle CBA = \angle DCB = \alpha + \beta = \frac{3}{7} \cdot 180^\circ$.

Aufgabe 3

Für welche natürlichen Zahlen n nimmt der größte gemeinsame Teiler von n^2+1 und (n+3)^2 seinen maximalen Wert an?

Lösung:

Der größte gemeinsame Teiler von n^2+1 und $(n+3)^2$ nimmt seinen maximalen Wert 50 für die Zahlen $n=50\cdot m+7$ (m eine beliebige natürliche Zahl) an.

Beweis:

Es wird gezeigt, dass

(1) 50 der maximal mögliche Wert für den größten gemeinsamen Teiler von n^2+1 und $(n+3)^2$ ist;

(2) für die Zahlen der Form $n=50\cdot m+7$ der größte gemeinsame Teiler von n^2+1 und $(n+3)^2$ tatsächlich 50 ist;

(3) für alle natürlichen Zahlen, die nicht die Form $n=50\cdot m+7$ haben, dieser größte gemeinsame Teiler von 50 verschieden ist.

Zum Beweis von (1):

Sei t ein gemeinsamer Teiler von n^2+1 und $(n+3)^2$.

Dann existieren natürliche Zahlen p und q mit

(I) $t\cdot p=n^2+1$

(II) $t\cdot q=(n+3)^2=n^2+6\cdot n+9$

Subtrahiert man Gleichung (I) von Gleichung (II), so ergibt sich:

(II)-(I) $t\cdot q-t\cdot p=6\cdot n+8$ oder $6\cdot n=t\cdot(q-p)-8$.

Durch Quadrieren dieser Gleichung und Addition von 36 auf beiden Seiten ergibt sich

$$36\cdot(n^2+1)=t^2\cdot(q-p)^2-16\cdot t\cdot(q-p)+100.$$

Aus $n^2+1=t\cdot p$ folgt

$$36\cdot t\cdot p-t^2\cdot(q-p)^2+16\cdot t\cdot(q-p)=100.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist durch t teilbar, also muss auch 100 durch t teilbar sein. Der größte gemeinsame Teiler ist also ein Teiler von 100.

Für t = 100 gilt nach Division von $36\cdot t\cdot p-t^2\cdot(q-p)^2+16\cdot t\cdot(q-p)=100$ durch t=100:

$$36\cdot p-100\cdot(q-p)^2+16\cdot(q-p)=1$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gerade, die rechte ungerade. Also ist t = 100 als gemeinsamer Teiler von n^2+1 und $(n+3)^2$ unmöglich.

Somit ist der größte mögliche gemeinsame Teiler höchstens 50.

Für n = 7 ist $n^2+1=50$, $(n+3)^2=100$. Der größte gemeinsame Teiler ist also 50.

Somit kommt 50 als größter gemeinsamer Teiler wirklich vor und der maximale Wert für diesen größten gemeinsamen Teiler ist somit 50. Damit ist (1) beweisen.

Zum Beweis von (2):

Für $n = 50 \cdot m + 7$ (m beliebige natürliche Zahl) ist

$(n+3)^2 = (50 \cdot m + 10)^2 = 2500 \cdot m^2 + 1000 \cdot m + 100$ und

$n^2 + 1 = (50 \cdot m + 7)^2 + 1 = 2500 \cdot m^2 + 700 \cdot m + 50$.

Beide Zahlen sind durch 50 teilbar, also ist der größte gemeinsame Teiler mindestens 50. Da er nach dem Beweis von (1) nicht größer als 50 sein kann, nimmt er für alle Zahlen der Form $n = 50 \cdot m + 7$ den maximalen Wert 50 an.
Damit ist (2) bewiesen.

Zum Beweis von (3):

Sei $n = 50 \cdot m + x$ (m beliebige natürliche Zahl, $0 \le x \le 49$).

Dann ist
$n^2 + 1 = (50 \cdot m + x)^2 + 1 = 2500 \cdot m^2 + 100 \cdot m \cdot x + x^2 + 1 = 100 \cdot (25 \cdot m^2 + m \cdot x) + x^2 + 1$.

Da $100 \cdot (25 \cdot m^2 + m \cdot x)$ eine Hunderterzahl ist, ist $n^2 + 1$ nur dann durch 50 teilbar, wenn x^2 mit den Ziffern 49 oder 99 endet.

Eine Quadratzahl x^2 endet aber nur auf 9, wenn x auf 3 oder 7 endet.

Wenn x auf 3 endet, so endet $n + 3$ auf 6 und damit endet auch $(n+3)^2$ auf 6, ist also sicher nicht durch 50 teilbar. Es muss also x auf 7 enden.

Von den fünf verbleibenden Möglichkeiten für x, nämlich 7, 17, 27, 37 und 47, endet aber nur für $x = 7$ die Quadratzahl x^2 auf 49.

Damit ist gezeigt, dass nur für die Zahlen der Form $n = 50 \cdot m + 7$ der maximale Wert 50 für den größte gemeinsamen Teiler von $n^2 + 1$ und $(n+3)^2$ möglich ist.

Somit ist auch (3) beweisen.

Lösungsvariante zum Beweis von (1):

Sei s ein gemeinsamer Teiler von $n + 3$ und $n^2 + 1$. Dann gibt es natürliche Zahlen x, y mit $n + 3 = x \cdot s$ und $n^2 + 1 = y \cdot s$. Aus $n = x \cdot s - 3$ folgt durch Einsetzen:

$n^2 + 1 = (x \cdot s - 3)^2 + 1 = x^2 \cdot s^2 - 6 \cdot x \cdot s + 10 = y \cdot s$.

Daraus ergibt sich: $10 = s \cdot (y - x^2 \cdot s + 6 \cdot x)$

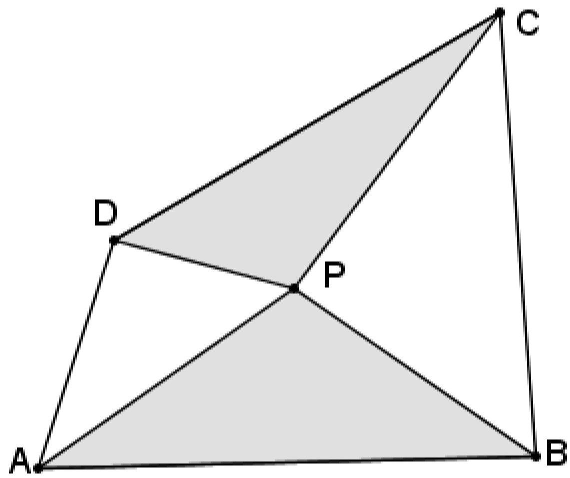
Somit ist s Teiler von 10.
Damit ist jeder gemeinsame Teiler von $(n+3)^2$ und n^2+1 ein Teiler von $10^2=100$.
$n^2 + 1$ kann aber nicht durch 100 teilbar sein, denn dann wäre diese Zahl insbesondere auch durch 4 teilbar. Somit müsste n^2 bei der Division durch 4 den Rest 3 haben. Alle Quadratzahlen haben aber bei der Division durch 4 den Rest 0 oder den Rest 1, denn wenn n gerade ist, so ist n^2 durch 4 teilbar, wenn $n = 2 \cdot m + 1$ ungerade ist, so ist $n^2 = (2 \cdot m + 1)^2 = 4 \cdot m^2 + 4 \cdot m + 1$ und lässt also bei der Division durch 4 den Rest 1.
Somit ist 50 der maximal möglich Teiler von $(n+3)^2$ und $n^2 + 1$.

Damit ist (1) bewiesen.

Aufgabe 4

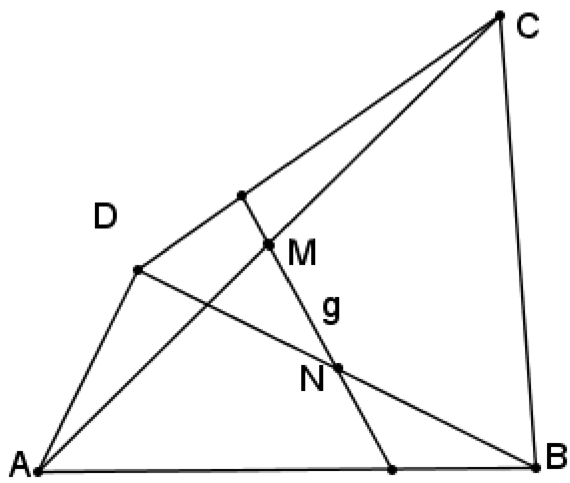
Gegeben ist ein konvexes Viereck ABCD, das kein Parallelogramm ist.

Für welche Punkte P im Viereck ABCD ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ABP und CDP ebenso groß wie die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke DAP und BCP?



Antwort:

Seien M der Mittelpunkt der Diagonalen [AC], N der Mittelpunkt der Diagonalen [BD].
Für alle Punkte P, die im Viereck ABCD auf der Geraden g durch M und N liegen, ist die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft erfüllt. Für andere Punkte ist sie nicht erfüllt.



1. Lösungsmöglichkeit:

Der Beweis gliedert sich in drei Schritte:

Schritt 1: Die Mittelpunkte M und N von [AC] und [BD] haben die geforderte Eigenschaft.

Schritt 2: Alle Punkte P, die auf der Geraden g durch M und N im Inneren des Vierecks ABCD liegen, erfüllen die geforderte Eigenschaft.

Schritt 3: Alle Punkte im Inneren des Vierecks ABCD, die nicht auf g liegen, erfüllen die geforderte Eigenschaft nicht.

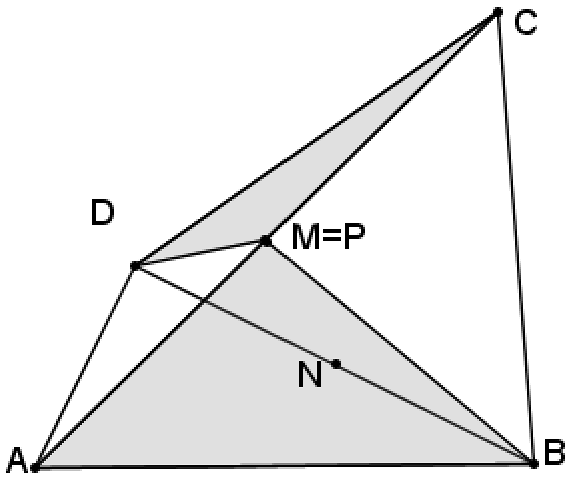
Beweis von Schritt 1:

Die Dreiecke ABM und BCM haben den gleichen Flächeninhalt, da sie gleich lange Grundlinien [AM] und [MC] und eine gemeinsame Höhe (Abstand von B zu AC) haben.

Die Dreiecke AMD und CDM haben den gleichen Flächeninhalt, da sie gleich lange Grundlinien [AM] und [MC] und eine gemeinsame Höhe (Abstand von D zu AC) haben.

Die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ABM und CDM ist daher genauso groß wie die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke CDM und DAM.

Analog ergibt sich, dass die Mitte N der Diagonalen [BD] ebenfalls die geforderte Eigenschaft hat.

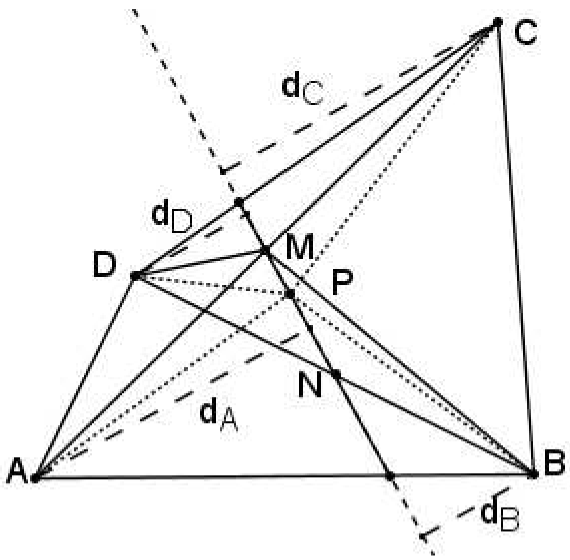


Beweis von Schritt 2:

Da das vorgegebene Viereck kein Parallelogramm ist, fallen die Diagonalenmittelpunkte M und N nicht zusammen. Somit existiert die Gerade g durch M und N eindeutig.

Die Gerade g schneidet das Viereck in zwei gegenüberliegenden Seiten. Begründung: Würde g zwei benachbarte Seiten in ihrem Inneren schneiden, so hätte g mit einer Diagonalen keinen Punkte gemeinsam; dies ist nach der Festlegung von g nicht möglich.

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass g [AB] und [CD] schneidet.



Da M der Mittelpunkt von [AC] ist, hat jede Gerade durch M von A und C den gleichen Abstand ($d_A = d_C$).

Da N der Mittelpunkt von [BD] ist, hat jede Gerade durch N von B und D den gleichen Abstand ($d_B = d_D$).

Folglich gilt für die Geraden g = MN: $d_A = d_C$ und $d_B = d_D$.

Also gilt für jeden Punkt P, der im Inneren von ABCD auf g liegt:

$$F_{\Delta PMA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PM} \cdot d_A = \frac{1}{2} \cdot \overline{PM} \cdot d_C = F_{\Delta PMC}$$

$$F_{\Delta PMB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PM} \cdot d_B = \frac{1}{2} \cdot \overline{PM} \cdot d_D = F_{\Delta PMD}$$

$$F_{\Delta ABP} + F_{\Delta CDP} = F_{\Delta ABM} \mp F_{\Delta PMA} \mp F_{\Delta PMB} + F_{\Delta CDM} \pm F_{\Delta PMC} \pm F_{\Delta PMD} \quad \textbf{(*)}$$

$$= F_{\Delta ABM} + F_{\Delta CDM} + \underbrace{\left(\mp F_{\Delta PMA} \pm F_{\Delta PMC}\right)}_{=0} + \underbrace{\left(\mp F_{\Delta PMB} \pm F_{\Delta PMD}\right)}_{=0} = \frac{1}{2} \cdot F_{ABCD}$$

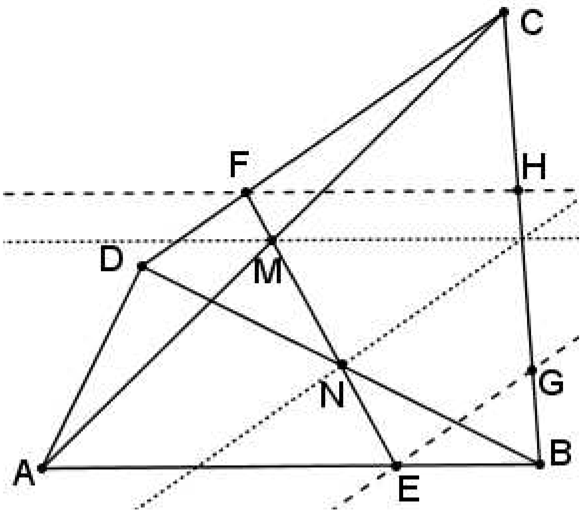
Bemerkung: Liegt P zwischen M und [AB], so gelten in (*) die Vorzeichen - - + +,
liegt P zwischen M und [CD], so gelten in (*) die Vorzeichen + + - -.

Beweis von Schritt 3:

Vorbemerkung:

Zunächst wird gezeigt:
Schneidet – wie o. B d. A. angenommen werden kann – MN die Seiten [AB] und [CD] in den Punkten E und F, so können diese Seiten nicht parallel sein.

Betrachten wir Dreieck ABC:



Da M der Mittelpunkt von [AC] ist, schneidet die Parallele p_M zu AB durch M die Seite [BC] in deren Mittelpunkt.

Betrachten wir Dreieck BCD:

Da N der Mittelpunkt von [BD] ist, schneidet die Parallele p_N zu CD durch N die Seite [BC] in deren Mittelpunkt.

Die beiden genannten Parallelen p_M und p_N schneiden sich als im Mittelpunkt von [BC].

Da MN weder zu p_M noch zu p_N parallel und M ≠ N ist, können p_M und p_N und damit auch AB und CD nicht parallel sein.

Beweismöglichkeit 1:

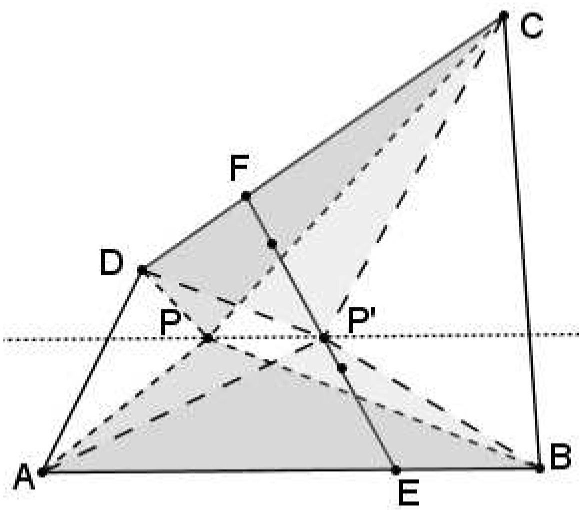
Da $[MN] \subset [EF]$ ist, folgt (siehe obige Zeichnung):
Die Parallele zu AB durch F schneidet die Parallele zu CD durch E außerhalb des Vierecks ABCD. Ihre Schnittpunkte mit [BC] nennen wir H und G.

Damit gilt:
- Ist P ein beliebiger Punkt des Fünfecks ABHFD, so schneidet die Parallele zu AB durch P die Strecke [EF].
- Ist P ein beliebiger Punkt des Fünfecks AEGCD, so schneidet die Parallele zu CD durch P die Strecke [EF].

Also: Durch jeden Punkt P im Viereck ABCD gibt es eine Parallele zu AB und eine Parallele zu CD; von diesen schneidet mindestens eine [EF] in einem Punkt P'.

Ist nun P ein beliebiger Punkt des Vierecks ABCD, der nicht auf [EF] liegt.

Nach Obigem können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Parallele zu AB durch P die Strecke [EF] in P' schneidet.



(1) Da PP’ parallel zu AB ist gilt: $F_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot d(P;AB) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot d(P';AB) = F_{\Delta ABP'}$

(2) Da P’ auf EF liegt, gilt nach Schritt 2: $F_{\Delta ABP'} + F_{CDP'} = \frac{1}{2} \cdot F_{ABCD}$

(3) Da PP’ parallel zu AB und AB nicht parallel zu CD ist, ist PP’ nicht parallel zu CD. Daraus folgt: d(P’;CD) ≠ d(P;CD); also: $F_{\Delta CDP} \neq F_{\Delta CDP'}$

Aus (1) bis (3) folgt:

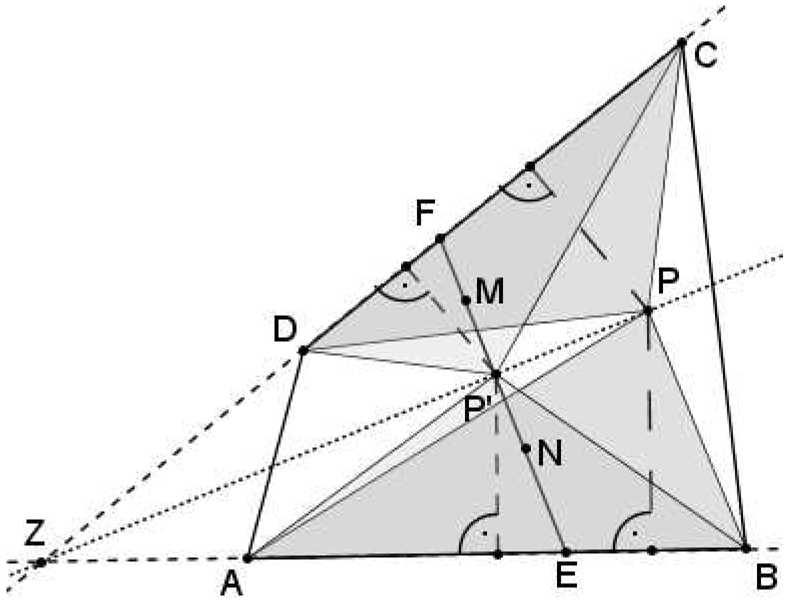
$$F_{\Delta ABP} + F_{\Delta CDP} = F_{\Delta ABP'} + F_{\Delta CDP} \neq F_{\Delta ABP'} + F_{\Delta CDP'} = \frac{1}{2} \cdot F_{ABCD}$$

Beweismöglichkeit 2:

Da AB und CD nicht parallel sind, scheiden sie sich in einem Punkt, der mit Z bezeichnet wird.

Ist P ein Punkt im Viereck ABCD, der nicht auf [EF] liegt, so schneidet die Gerade ZP die Strecke [EF] in einem Punkt P’.

Damit existiert eine zentrische Streckung S(Z;m) mit Zentrum Z und Streckungsfaktor m (m>0 und m≠1), die P auf P’ abbildet.



Die Abstände von P zu AB bzw. CD werden dadurch auf die Abstände von P’ auf AB bzw. CD abgebildet,
d. h. d(P’;AB) = m·d(P;AB) und d(P’;CD) = m·d(P;AB)

Da $P' \in [EF]$, gilt mit Schritt 2:

$$\frac{1}{2} \cdot F_{ABCD} = F_{\Delta ABP'} + F_{\Delta CDP'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot d(P';AB) + \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot d(P';CD) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot m \cdot d(P;AB) + \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot m \cdot d(P;CD) =$$

$$m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot d(P;AB) + \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot d(P;CD) \right) = m \cdot \left(F_{\Delta ABP} + F_{\Delta CDP} \right) \neq F_{\Delta ABP} + F_{\Delta CDP},$$

da m ≠ 1

Damit ist gezeigt, dass die geforderte Bedingung für keinen Punkt des Vierecks, der nicht auf [EF] liegt, erfüllt wird.

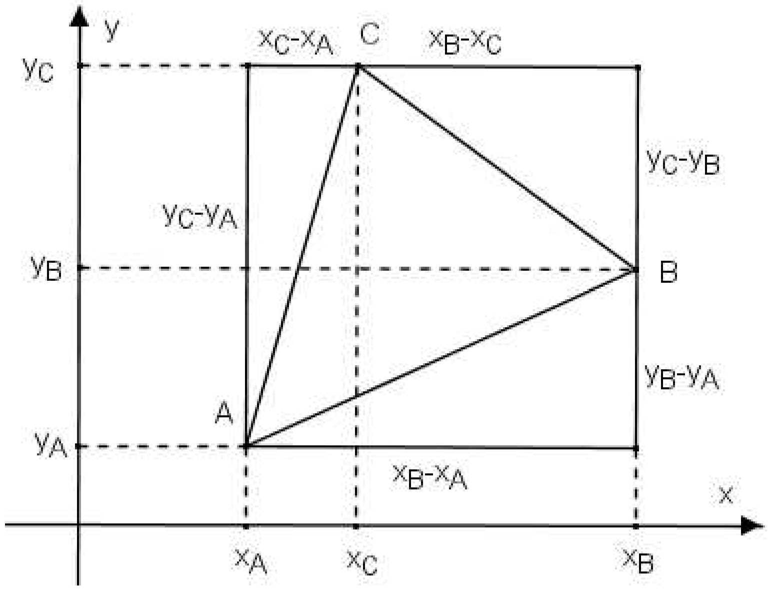
2. Lösungsvorschlag:

Vorbemerkung:

In einem Koordinatensystem ist das Dreieck $A(x_A | y_A)$, $B(x_B | y_B)$ und $C(x_C | y_C)$ gegeben. Dann hat das Dreieck ABC den Flächeninhalt

$$F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot [(x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) - (x_C - x_A) \cdot (y_B - y_A)].$$

Beweis der Vorbemerkung:



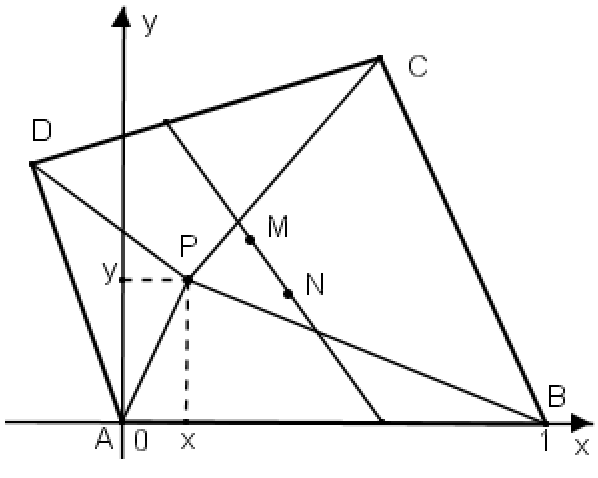
Für die in der neben stehenden Abbildung dargestellte Lage von A, B und C ergibt sich, wenn man die Inhalte der drei äußeren Dreiecke vom Rechtecksinhalt abzieht:

$F_{\Delta ABC} =$

$$(x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) - \frac{1}{2} \cdot (x_B - x_A) \cdot (y_B - y_A) - \frac{1}{2} \cdot (x_B - x_C) \cdot (y_C - y_B) - \frac{1}{2} \cdot (x_C - x_A) \cdot (y_C - y_A)$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergibt sich die Behauptung.
Auch für andere Lagen von A, B und C erhält man in analoger Weise die obige Formel.

Zum eigentlichen Beweis:



Es wird ein Koordinatensystem so gewählt, dass die Eckpunkte A und B des Vierecks ABCD die Koordinaten $A(0 | 0)$ und $B(1 |)$ haben. Die anderen Eckpunkte haben die Koordinaten $C(x_C | y_C)$ und $D(x_D | y_D)$.

Dann ergibt sich aus der Vorbemerkung:

$$\begin{aligned} F_{ABCD} &= F_{ABC} + F_{\Delta ACD} \\ &= 1 \cdot y_C - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot (1 - x_C) \cdot y_C - \frac{1}{2} \cdot x_C \cdot y_C \\ &\quad + x_C \cdot y_D - \frac{1}{2} \cdot x_C \cdot y_C - \frac{1}{2} \cdot (x_C - x_D) \cdot (y_D - y_C) - \frac{1}{2} \cdot x_D \cdot y_D \\ &= \frac{1}{2} \cdot (y_C + x_C \cdot y_D - x_D \cdot y_C) \qquad \text{(I)} \end{aligned}$$

Sei nun $P(x|y)$ ein Punkt im Viereck ABCD.

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABP gilt: $F_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} \cdot y$. (II)

Für den Flächeninhalt des Dreiecks *PCD* ergibt sich nach Vorbemerkung:

$$F_{\Delta PCD} = \frac{1}{2} \cdot [(x_C - x) \cdot (y_D - y) - (x_D - x) \cdot (y_C y)]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (x_C \cdot y_D - x_C \cdot y - x \cdot y_D - x_D \cdot y_C + x_D \cdot y + x \cdot y_C) \quad \text{(III)}$$

Der Punkt P hat die in der Aufgabenstellung geforderte Eigenschaft, wenn
$F_{ABCD} = 2 \cdot [F_{\Delta ABP} + F_{\Delta PCD}]$

Nach (I), (II), (III) ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \cdot (y_C + x_C \cdot y_D - x_D \cdot y_C) = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot (x_C \cdot y_D - x_C \cdot y - x \cdot y_D - x_D \cdot y_C + x_D \cdot y + x \cdot y_C)\right]$$

oder

$$y_C + x_C \cdot y_D - x_D \cdot y_C = 2 \cdot y + 2 \cdot x_C \cdot y_D - 2 \cdot x_C \cdot y - 2 \cdot x \cdot y_D - 2 \cdot x_D \cdot y_C + 2 \cdot x_D \cdot y + 2 \cdot x \cdot y_C$$

Umformen und Ausklammern liefert:

$$2 \cdot (1 - x_C + x_D) \cdot y + 2 \cdot (y_C - y_D) \cdot x = y_C - x_C \cdot y_D + x_D \cdot y_C \quad (*)$$

Fall 1: $x_C = x_D + 1$

In diesem Fall ist $y_C \neq y_D$, da sonst [AB] und [CD] zwei gleich lange, parallele, gegenüberliegende Seiten des Vierecks wären. Es läge also ein Parallelogramm vor. Dies ist nach Aufgabenstellung ausgeschlossen. Somit stellt (*) die Gleichung einer Geraden g parallel zur y-Achse dar, denn g: $x = \frac{y_C - x_C \cdot y_D + x_D \cdot y_C}{2 \cdot (y_C - y_D)}$.

Fall 2: $x_C \neq x_D + 1$

In diesem Fall stellt (*) die Gleichung der Geraden g mit

g: $y = \frac{y_C - y_C}{1 - x_C + x_D} \cdot x + \frac{y_C - x_C \cdot y_D + x_D \cdot y_C}{2 - 2 \cdot x_C + 2 \cdot x_D}$ dar.

In jedem Fall liegen die gesuchten Punkte also auf einer Geraden g.

Nun wird noch gezeigt, dass auch die Diagonalenmittelpunkte M und N auf dieser Geraden liegen.

Der Mittelpunkt M von [AC] hat die Koordinaten $M\left(\frac{x_C}{2}\middle|\frac{y_C}{2}\right)$, der Mittelpunkt N von [BD] hat die Koordinaten $N\left(\frac{1+x_D}{2}\middle|\frac{y_D}{2}\right)$.

Einsetzen von M in (*) liefert:

$$2 \cdot (1 - x_C + x_D) \cdot \frac{y_C}{2} + 2 \cdot (y_C - y_D) \cdot \frac{x_C}{2} = y_C - x_C \cdot y_C + x_D \cdot y_C + y_C \cdot x_C - y_D \cdot x_C$$
$$= y_C - x_C \cdot y_D + x_D \cdot y_C, \text{ d. h. } M \in g$$

Durch Einsetzen von N in (*) zeigt man analog: $N \in g$.

Da eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig festgelegt ist, ist die in der Aufgabenstellung geforderte Eigenschaft genau für alle Punkte P, die im Viereck auf der Geraden g durch die Mittelpunkte M und N liegen, erfüllt.