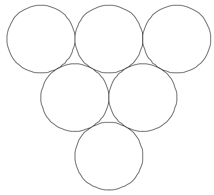
7. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

1. Runde 2004/05 – Aufgaben und Lösungsbeispiele

Aufgabe 1



Die Billardkugeln mit den Nummern 1, 2, 3, 4, 5, 6 werden wie in der Abbildung zusammengelegt.

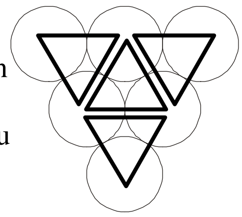
Zunächst addiert man die Nummern von je drei sich berührenden Kugeln. Danach werden die entstandenen Summen addiert.

Zeige, dass das Ergebnis für jede Kugelverteilung in dieser Form ungerade ist.

Vereinbarung für alle Lösungsvorschläge:

Die Summen der Kugelnummern von je drei sich berührenden Kugeln nennen wir *Teilsummen*. Wenn man die Teilsummen addiert, so ergibt sich die *Gesamtsumme*. Man muss zeigen, dass diese Gesamtsumme immer *ungerade* ist.

1. Beweis (ohne algebraische Umformungen):



Man hat vier Teilsummen von je drei sich berührenden Kugeln. Die jeweils an den vier Teilsummen beteiligten Kugeln sind in der Abbildung rechts durch Dreiecke miteinander verbunden. Man erkennt, dass die drei Eckkugeln jeweils nur in genau einer Teilsumme vorkommen, während die drei mittleren Kugeln in genau drei Teilsummen vorkommen (sie gehören zu drei Dreiecken).

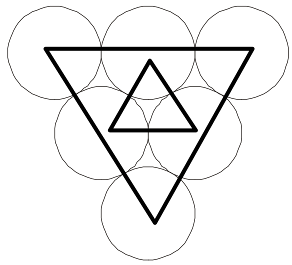
Die Gesamtsumme besteht also aus der Summe der Kugelnummern der drei Eckkugeln und dem Dreifachen der Kugelnummern der drei mittleren Kugeln. Nun kann man verschieden schließen:

Variante 1:

Die Gesamtsumme ist die Summe 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 aller sechs Kugelnummern (damit hat man zunächst alle Kugeln einfach berücksichtigt) plus der Summe des *Zweifachen* der mittleren Kugelnummern, da die drei Mittelkugeln ja insgesamt dreifach berücksichtigt werden müssen.

Die Summe der zweifachen Kugelnummern der drei mittleren Kugeln ergibt aber eine gerade Zahl, da das Zweifache einer Zahl immer gerade ist. Andererseits ist 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 ungerade. Die Gesamtsumme als Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ist immer *ungerade*.

Variante 2:



Mit S_e wird die Summe der drei Eckkugeln, mit S_m die Summe der mittleren Kugeln bezeichnet. Damit ergibt sich die Gesamtsumme $G = S_e + 3 \cdot S_m$.

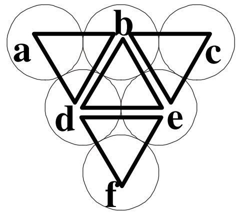
Jede Kugel kommt in genau einer der beiden Summen vor; es gilt also $S_e + S_m = 1+2+3+4+5+6 = 21$. Dies ist eine ungerade Zahl. Somit ist genau eine der Zahlen S_e und S_m ungerade, die andere gerade.

Da außerdem eine ganze Zahl und ihr Dreifaches entweder beide gerade oder beide ungerade sind, können wir alle Möglichkeiten in folgender Tabelle darstellen:

S_e	S_m	$3 \cdot S_m$	$G = S_e + 3 \cdot S_m$
ungerade	gerade	gerade	ungerade
gerade	ungerade	ungerade	ungerade

Somit ist die Gesamtsumme immer *ungerade*.

2. Beweis (mit algebraischen Umformungen):



Die sechs Kugelnummern werden – wie in der Skizze - mit a, b, c, d, e und f bezeichnet. Die Gesamtsumme nennen wir S.

Aus der Skizze können wir direkt ablesen.

$S = (a + b + d) + (b + d + e) + (b + c + e) + (d + e + f)$

Nun kann man verschieden schließen:

Variante 1:

Es ist $S = a + c + f + 3b + 3d + 3e = (a + b + c + d + e + f) + 2(b + d + e)$.

S ist demnach die Summe der ungeraden Zahl $(a + b + c + d + e + f) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21$ und der geraden Zahl $2(b + d + e)$. Also ist $S = 21 + 2(b + d + e)$ *ungerade*.

Variante 2:

Wir schreiben $x = a + c + f$ für die Summe der Eckkugelnummern; damit ist $b + d + e = 21 – x$ die Summe der mittleren Kugelnummern.

Dann ist $S = x + 3(21-x) = 63 – 2x$ ungerade für alle möglichen Werte von x.

Variante 3:

Wird eine Zahl mit 3 multipliziert, so behält sie ihre *Parität*, d.h. die Zahl und ihr Dreifaches sind entweder beide gerade oder beide ungerade.

Die Kugelnummern a, b, c, d, e, f entsprechen den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, sie enthalten also drei gerade und drei ungerade Zahlen.

Da unter den Zahlen a, b, c, d, e, f genau 3 ungerade und 3 gerade sind, ist
$S = a + c + f + 3·b + 3·d + 3·e$
die Summe aus 3 geraden und 3 ungeraden Zahlen und somit ungerade.

Aufgabe 2

Ein gleichseitiges Dreieck soll mit Trapezen lückenlos und ohne Überdeckung ausgelegt werden. Jedes Trapez hat die Seitenlängen 1cm, 1cm, 1cm, 2cm.

Welche Seitenlängen sind für das Dreieck möglich?

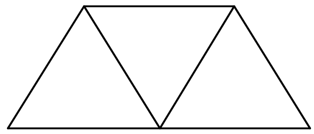
Antwort:

Ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge n cm lässt sich genau dann mit Trapezen der abgebildeten Art lückenlos und ohne Überdeckung auslegen, wenn n ein Vielfaches von 3 ist.

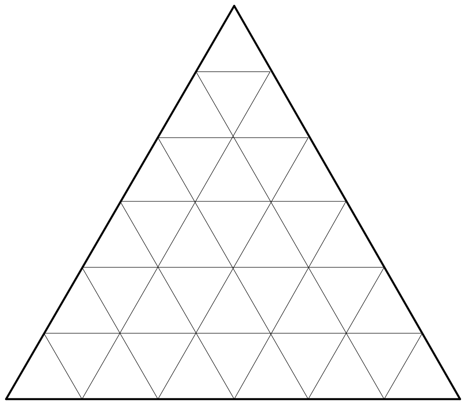
Beweis:

Teil 1: Wenn sich ein gleichseitiges Dreieck mit den beschriebenen Trapezen lückenlos und überschneidungsfrei auslegen lässt, so ist die Maßzahl n seiner Kantenlänge durch 3 teilbar.

Das Trapez mit den Maßen 1 cm, 1 cm, 1 cm und 2 cm lässt sich entsprechend dem nebenstehenden Bild in drei gleichseitige Dreiecke mit den Seitenlängen 1 cm zerlegen.



Da das große gleichseitige Dreieck mit den Trapezen lückenlos und überschneidungsfrei ausgelegt werden soll, muss die Maßzahl n der Seitenlänge des Dreiecks zur Maßeinheit Zentimeter ganzzahlig sein.



Das große Dreieck wird nun durch Parallelen zu den Dreiecksseiten in kleine gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge 1 cm zerlegt.

Betrachtet man die Anzahl der kleinen Dreiecke in einer Reihe, so steigt die Anzahl von Reihe zu Reihe um jeweils zwei, da jeweils links und rechts noch ein Dreieck hinzukommt.

Die Gesamtzahl der kleinen Dreiecke im großen gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge n cm beträgt deshalb $1 + 3 + 5 + ...+ 2n – 1$.

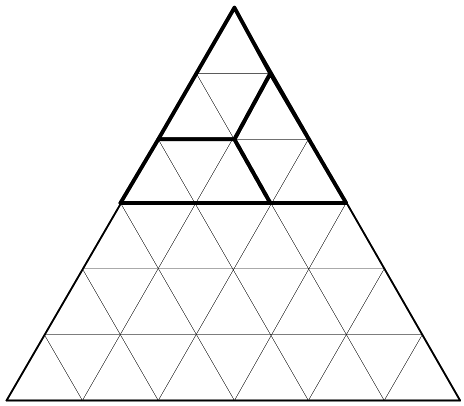
Der Wert dieser Summe ist n^2. (Bekannt aus Unterricht oder Formelsammlung oder mittels Beweis (Alternativen siehe unten))

Die Gesamtzahl der kleinen Dreiecke im gleichseitigen Dreieck mit der Kantenlänge n cm beträgt also n^2.

Da eine überschneidungsfreie und lückenlose Überdeckung mit den Trapezen aus drei gleichseitigen Dreiecken gefordert wird, muss die Zahl n^2 ein Vielfaches von 3 sein. Das heißt, n muss ein Vielfaches von 3 sein.

Teil 2 (Umkehrung): Ist die Maßzahl der Kantenlänge eines gleichseitigen Dreiecks durch 3 teilbar, so lässt es sich durch die beschriebenen Trapeze lückenlos und überschneidungsfrei auslegen.

Dazu genügt es, die nebenstehende Figur zu betrachten. Das gleichseitige Dreieck mit drei Reihen lässt sich in der angegebenen Weise durch drei Trapeze überdecken.



Die drei darunter liegenden Reihen bilden ein Trapez, das sich in drei gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge 3 cm zerlegen lässt. Jedes dieser Dreiecke kann seinerseits durch drei Trapeze der gegebenen Form überdeckt werden.

Diese Argumentation gilt dann für das sich anschließende Trapez, das wieder aus drei Reihen gebildet wird.

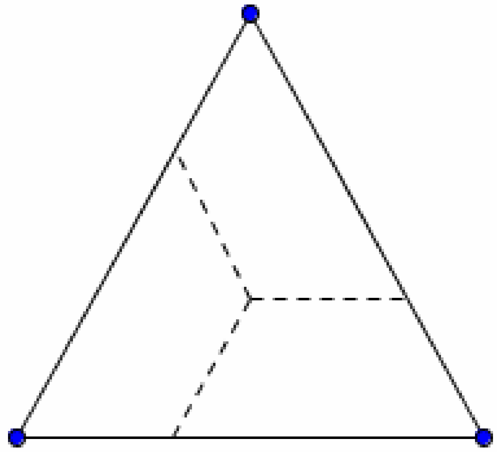
Dieses Trapez besteht aus fünf gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge 3 cm, von denen jedes wieder mit drei Trapezen überdeckt werden kann.

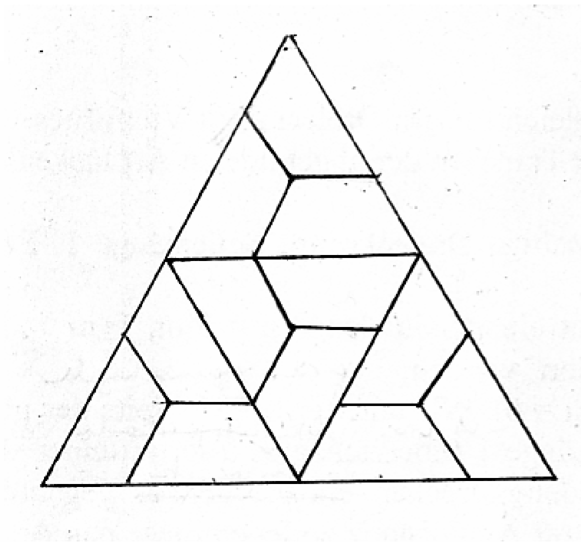
Dieses Verfahren durch die Zusammenfassung von jeweils drei Reihen lässt sich nun beliebig fortsetzen.

Da die Kantenlänge des großen Dreieckes ein Vielfaches von 3 cm ist, geht dieses Verfahren auf.

Die folgende Abbildungen geben mögliche Zerlegungen an für

n = 3 n = 6





Alternative Möglichkeiten zum Beweis der Summenformel:

- mittels doppelter Schreibung der Summenden in der umgekehrten Reihenfolge:

1	+	3	+	5	+	…	+	2n – 3	+	2n – 1
2n – 1	+	2n – 3	+	2n – 5	+	…	+	3	+	1
2n	+	2n	+	2n	+	…	+	2n	+	2n

Da jeder Summand bei dieser Schreibweise doppelt berücksichtigt wurde, muss das Produkt $n \cdot 2n = 2n^2$ durch zwei dividiert werden. Die Gesamtzahl der kleinen Dreiecke im gleichseitigen Dreieck mit der

- mittels der Gaußschen Summenformel:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + ... + 2n{-}1 &= (1 + 2 + 3 + \dots + 2n{-}1 + 2n) - (2 + 4 + \dots + 2n) \\ &= 0{,}5 \cdot 2n \cdot (2n+1) - 2 \cdot (1 + 2 + \dots + n) \\ &= 2n^2 + n - 2 \cdot 0{,}5 \cdot n \cdot (n+1) \\ &= 2n^2 + n - n^2 - n = n^2 \end{aligned}$$

Bemerkung:

Bei Kenntnis der Flächeninhaltsformel kann Teil 1 auch wie folgt gezeigt werden:

Ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge n hat den Flächeninhalt $A_\Delta = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot n^2$.

Das gegebene Trapez (Zerlegung in drei gleichseitige Dreiecke mit der Kantenlänge 1) hat den Inhalt

$A_{Tr} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot$

Da $A_\Delta : A_{Tr} = n^2 : 3$ ganzzahlig sein muss, muss n durch 3 teilbar sein.

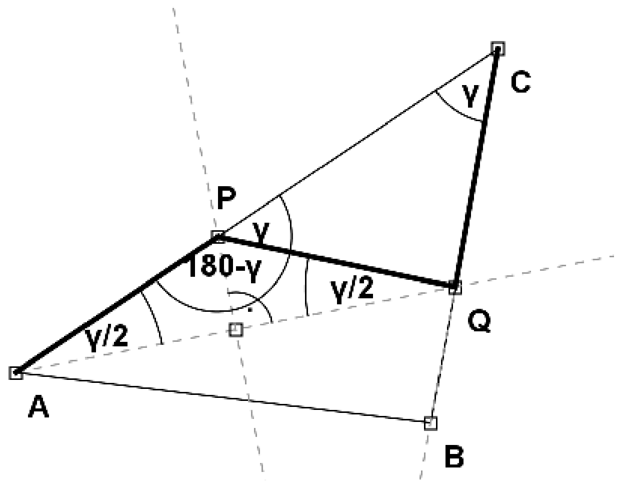
Aufgabe 3

Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Konstruiere einen Punkt P im Inneren der Strecke [AC] und einen Punkt Q auf der Geraden BC so, dass gilt: $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$.

1. Lösung:

Vorbemerkungen:

(1) Da $\overline{PQ} = \overline{QC}$ gelten soll, muss das Dreieck PQC gleichschenklig sein mit Spitze Q. Da das Dreieck ABC spitzwinklig ist (also insbesondere $\angle ACB = \gamma < 90°$) und P im Innern der Strecke [AC] liegen soll, liegt Q auf der Halbgeraden [CB und es gilt für die Basiswinkel im Dreieck PQC:
$\angle QPC = \angle PCQ = \angle ACB = \gamma$.



(2) Da $\overline{AP} = \overline{PQ}$ gelten soll, muss das Dreieck AQP gleichschenklig sein mit Spitze P; es gilt für die Basiswinkel: $\angle QAP = \angle PQA$.

(3) Da $\angle APQ$ und $\angle QPC$ unter den gegebenen Voraussetzungen Nebenwinkel sind, gilt mit (1): $\angle APQ = 180° - \angle QPC = 180° - \gamma$. Da $\angle QAP = \angle PQA$ nach (2), folgt aus dem Winkelsummensatz für Dreiecke: $\angle QAP = \angle PQA = (180° - \angle APQ) : 2 = [180° - (180° - \gamma)] : 2 = \frac{\gamma}{2}$

1. Konstruktionsmöglichkeit:

Da mit dem Dreieck ABC insbesondere der Winkel $\gamma = \angle ACB$ gegeben ist, lässt sich auch der Winkel $\frac{\gamma}{2}$ konstruieren. Trägt man $\frac{\gamma}{2}$ in A so an, dass der 2. Schenkel auf [AC liegt, so schneidet der 1. Schenkel die Gerade BC im Punkt Q. Trägt man nun anschließend den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ in Q so an, dass der 1. Schenkel auf [QA liegt, so schneidet der 2. Schenkel die Gerade AC in P.

Da nach Voraussetzung das Dreieck ABC spitzwinklig ist, also insbesondere $\gamma < 90°$, ist diese Konstruktion stets möglich und liefert die Punkte $P \in [AC]$ und $Q \in BC$ mit den gesuchten Eigenschaften: Aus $\angle QAP = \angle PQA = \frac{\gamma}{2}$ folgt, dass $\overline{AP} = \overline{PQ}$ und $\angle QPC = 2 \cdot \frac{\gamma}{2} = \gamma$ (Außenwinkel).
Mit $\angle PCQ = \gamma = \angle QPC$ folgt $\overline{PQ} = \overline{QC}$.

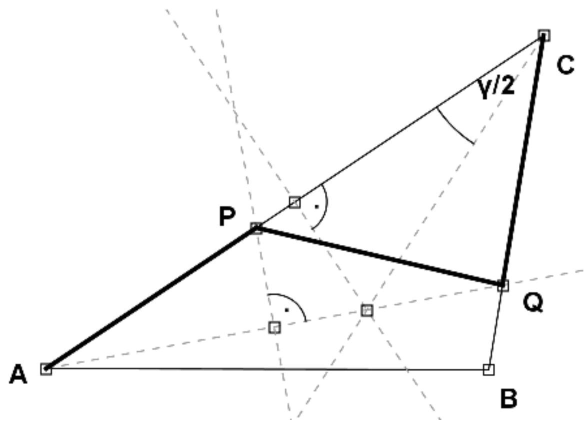
Bemerkung: Q liegt stets auf [CB; $Q \in [BC]$ für $\alpha \geq \frac{\gamma}{2}$.

2. Konstruktionsmöglichkeit:

Man konstruiert zunächst die Winkelhalbierende w des Winkels $\angle PCQ = \angle ACB$ und spiegelt diese an der Mittelsenkrechten der Strecke [AC].

Das Spiegelbild w' von w geht durch A und schneidet die Gerade BC im gesuchten Punkt Q.

Da $\gamma < 90°$, existiert der Schnittpunkt Q und liegt, falls $\alpha > \frac{\gamma}{2}$, innerhalb der Strecke [BC].



Anschließend konstruiert man die Mittelsenkrechte der Strecke [AQ]. Ihr Schnittpunkt mit der Strecke [AC] ist der gesuchte Punkt P.

Der Schnittpunkt innerhalb der Strecke [AC] existiert immer. Begründung: Im Dreieck AQC gilt: $\angle CQA = 180° - \frac{3}{2}\gamma$. Wegen $\gamma < 90°$ gilt $\angle CQA > 2\gamma - \frac{3}{2}\gamma = \frac{\gamma}{2}$.

Da im Dreieck AQC somit der Innenwinkel bei A kleiner ist als der Innenwinkel bei Q, schneidet die Mittelsenkrechte der Strecke [AQ] die dem größeren Winkel gegenüberliegende Seite [AC] zwischen den Punkten A und C.

Da P auf der Mittelsenkrechten von AQ liegt, gilt: $\overline{AP} = \overline{PQ}$.

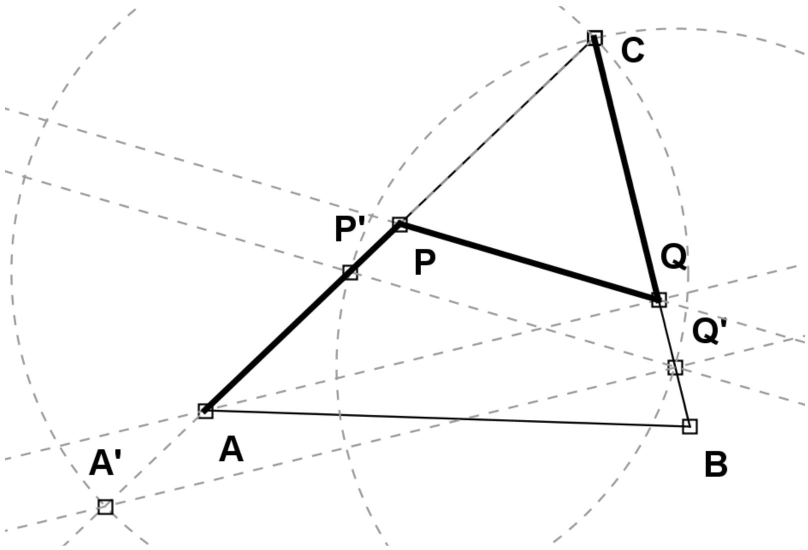
Da $\angle APQ$ und $\angle QPC$ Nebenwinkel sind, folgt mit $\angle APQ = 180° - 2 \cdot \frac{\gamma}{2} = 180° - \gamma$, dass $\angle QPC = \gamma$.

Aus der Umkehrung des Basiswinkelsatzes für das gleichschenklige Dreieck PQC folgt: $\overline{PQ} = \overline{QC}$.

2. Lösung (mit zentrischer Streckung):

Man wählt einen beliebigen Punkt Q' auf der Halbgeraden [CB und zeichnet einen Kreis k_1 um Q' mit dem Radius $\overline{Q'C}$. P' und C sind die Schnittpunkte von k_1 mit der Geraden AC. Da das Dreieck ABC spitzwinklig ist, also insbesondere $\gamma < 90°$, liegt P' auf der Halbgeraden [CA und $P' \neq C$. Das Dreieck P'Q'C ist gleichschenklig mit der Basis [P'C].

Der Kreis k_2 um P' durch Q' schneidet die Gerade P'A in zwei Punkten. Der von C weiter entfernte Punkt heißt A'.



Damit gilt insgesamt: $\overline{CQ'} = \overline{Q'P'} = \overline{P'A'}$

Anschließend konstruiert man die Parallele g zu A'Q' durch A. g schneidet BC im Punkt Q, die Parallele zu P'Q' durch Q schneidet [AC] im Punkt P. Dieses Verfahren beschreibt die zentrische Streckung mit Zentrum C, die A' auf A, Q' auf Q und P' auf P abbildet.
Demnach sind die Streckenzüge CQ'P'A' und CQPA ähnlich, also $\overline{CQ} = \overline{QP} = \overline{PA}$.

Aufgabe 4

Von einer n-stelligen Zahl wird die Einerziffer weggelassen. Von der entstandenen Zahl wird wiederum die Einerziffer weggelassen. Das Verfahren wird fortgeführt, bis eine einstellige Zahl erreicht ist. Dabei entstehen n-1 neue Zahlen. Das Neunfache ihrer Summe wird von der ursprünglichen Zahl subtrahiert.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem entstehenden Differenzwert und der ursprünglichen Zahl?

Lösung:

Der Differenzwert ist die Quersumme der ursprünglichen Zahl.

Bezeichnungen:

Die Ausgangszahl ist: $z = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + a_{n-3} \cdot 10^{n-3} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$

Die daraus entstehenden Zahlen sind:

$$
\begin{aligned}
&z_1 = a_{n-1}\cdot 10^{n-2} + a_{n-2}\cdot 10^{n-3} + \ldots + a_3\cdot 10^2 + a_2\cdot 10^1 + a_1\cdot 10^0\\
&z_2 = a_{n-1}\cdot 10^{n-3} + a_{n-2}\cdot 10^{n-4} + \ldots + a_3\cdot 10^1 + a_2\cdot 10^0\\
&\ldots\\
&z_{n-2} = a_{n-1}\cdot 10^1 + a_{n-2}\cdot 10^0\\
&z_{n-1} = a_{n-1}\cdot 10^0
\end{aligned}
$$

Der gesuchte Differenzwert Δ lässt sich dann wie folgt berechnen:

Beweis 1:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= z - (z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1})\cdot 9\\
&= z - (z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1})\cdot (10-1)\\
&= z - 10\cdot z_1 + z_1 - 10\cdot z_2 + z_2 - \ldots + \ldots - 10\cdot z_{n-2} + z_{n-2} - 10\cdot z_{n-1} + z_{n-1}\\
&= \quad a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + a_{n-2}\cdot 10^{n-2} + a_{n-3}\cdot 10^{n-3} + \ldots + a_2\cdot 10^2 \quad + a_1\cdot 10^1 \quad + a_0\cdot 10^0\\
&\quad - a_{n-1}\cdot 10^{n-1} - a_{n-2}\cdot 10^{n-2} - a_{n-3}\cdot 10^{n-3} - \ldots - a_2\cdot 10^2 \quad - a_1\cdot 10^1\\
&\qquad + a_{n-1}\cdot 10^{n-2} + a_{n-2}\cdot 10^{n-3} + \ldots + a_3\cdot 10^2 \quad + a_2\cdot 10^1 \quad + a_1\cdot 10^0\\
&\qquad - a_{n-1}\cdot 10^{n-2} - a_{n-2}\cdot 10^{n-3} - \ldots - a_3\cdot 10^2 \quad - a_2\cdot 10^1\\
&\qquad\qquad + a_{n-1}\cdot 10^{n-3} + \ldots + a_4\cdot 10^2 \quad + a_3\cdot 10^1 \quad + a_2\cdot 10^0\\
&\qquad\qquad - \ldots\\
&\qquad\qquad\qquad + \ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - a_{n-1}\cdot 10^2 - a_{n-2}\cdot 10^1\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a_{n-1}\cdot 10^1 - a_{n-2}\cdot 10^0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - a_{n-1}\cdot 10^1\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a_{n-1}\cdot 10^0\\
&= a_0\cdot 10^0 + a_1\cdot 10^0 + a_2\cdot 10^0 + \ldots + a_{n-2}\cdot 10^0 + a_{n-1}\cdot 10^0\\
&= a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0
\end{aligned}
$$

Beweis 2:

Subtrahiert man von z zuerst $9\cdot z_1$, vom Ergebnis dann $9\cdot z_2$ usw. bis $9\cdot z_{n-1}$, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
z - 9\cdot z_1 \quad &= z - 10\cdot z_1 + z_1\\
&= a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10^1 + a_0 - a_{n-1}\cdot 10^{n-1} - \ldots - a_1\cdot 10^1 + z_1\\
&= \mathbf{a_o + z_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_0 + z_1 - 9\cdot z_2 \quad &= a_0 + z_1 - 10\cdot z_2 + z_2\\
&= a_0 + a_{n-1}\cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2\cdot 10^1 + a_1 - a_{n-1}\cdot 10^{n-2} - \ldots - a_2\cdot 10^1 + z_2\\
&= \mathbf{a_0 + a_1 + z_2}
\end{aligned}
$$

...

$$
\begin{aligned}
a_0 + \ldots + a_{n-3} + z_{n-2} - 9\cdot z_{n-1} &= a_0 + \ldots + a_{n-3} + z_{n-2} - 10\cdot z_{n-1} + z_{n-1}\\
&= a_0 + \ldots + a_{n-3} + a_{n-1}\cdot 10^1 + a_{n-2} - a_{n-1}\cdot 10^1 + a_{n-1}\\
&= \mathbf{a_o + a_1 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5

Lässt sich jede positive ganze Zahl in der Form $(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)$ darstellen, wobei a, b, c und d ebenfalls positive ganze Zahlen sind?

Antwort:

Ja.

1. Beweis:

Zunächst schreibt man den Term um:

$$\left(a^2+b^2\right)-\left(c^2+d^2\right)=a^2+b^2-c^2-d^2=\left(a^2-c^2\right)-\left(d^2-b^2\right)$$

Sei x eine beliebige positive ganze Zahl. Wir geben positive ganze Zahlen a, b, c und d an, so dass

$$x=\left(a^2-c^2\right)-\left(d^2-b^2\right).$$

1. Fall: x = 1

Setze a = 5, b = 1, c = 4 und d = 3. Dann ist

$$\left(a^2-c^2\right)-\left(d^2-b^2\right)=5^2-4^2-(3^2-1^2)=9-8=1.$$

2. Fall: x ist ungerade und x > 1, d.h. es existiert eine natürliche Zahl n mit x = 2n+1

Setze a = n+1, c = n und b = d. Dann ist

$$\left(a^2-c^2\right)-\left(d^2-b^2\right)=(n+1)^2-n^2-(d^2-d^2)=n^2+2n+1-n^2=2n+1=x.$$

3. Fall: x ist gerade, d.h. es existiert eine natürliche Zahl n mit x = 2n

Setze a = n+2, b = 1, c = n+1 und d = 2. Dann ist

$$\left(a^2-c^2\right)-\left(d^2-b^2\right)=(n+2)^2-(n+1)^2-(2^2-1^2)=n^2+4n+4-n^2-2n-1-3=2n=x.$$

2. Beweis:

Zunächst schreibt man den Term um:

$$\left(a^2+b^2\right)-\left(c^2+d^2\right)=\left(a^2-c^2\right)+\left(b^2-d^2\right).$$

Sei x eine beliebige positive ganze Zahl. Wir geben positive ganze Zahlen a,b,c und d an, so dass

$$x=\left(a^2-c^2\right)+\left(b^2-d^2\right).$$

1. Fall: x ist gerade

Dann existiert eine positive ganze Zahl k, so dass x = 2k.

Wir setzen a = k + 2, c = k + 1, b = 1 und d = 2.

Dann gilt:

$$\left(a^2-c^2\right)+\left(b^2-d^2\right)=(k+2)^2-(k+1)^2+1^2-2^2=k^2+4k+4-k^2-2k-1+1-4=2k=x.$$

2. Fall: x ist ungerade

Dann existiert eine positive ganze Zahl k, so dass x = 2k – 1.

Wir setzen a = k + 4, c = k + 3, b = 1 und d = 3.

Dann gilt:

$$\left(a^2-c^2\right)+\left(b^2-d^2\right)=(k+4)^2-(k+3)^2+1^2-3^2=k^2+8k+16-k^2-6k-9+1-9=2k-1=x.$$

6. Aufgabe:

In einem Dreieck ABC schneidet der Thaleskreis über der Strecke [AB] die Gerade AC in A und Q und die Gerade BC in B und P.

Welche Bedingung müssen die Innenwinkel des Dreiecks ABC erfüllen, damit sein Flächeninhalt viermal so groß ist wie der Inhalt des Dreiecks QPC?

Ergebnis:

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist genau dann viermal so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks PQC, wenn $\gamma = 60^o$ oder $\gamma = 120^o$ ist.

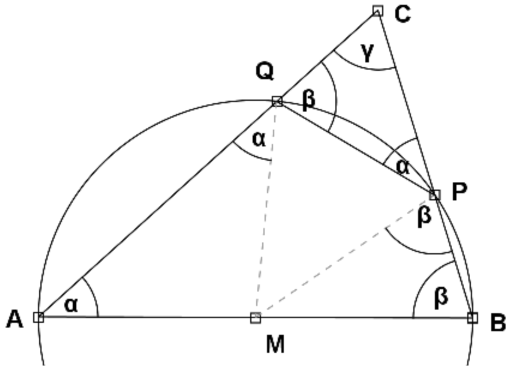
Beweis:

Zunächst wird im ersten Schritt gezeigt, dass das Dreieck QPC ähnlich zum Dreieck ABC ist. Im zweiten Schritt wird daraus die gesuchte Bedingung hergeleitet.

1. Schritt:

Da $\overline{MA} = \overline{MQ} = \overline{MP} = \overline{MB}$, folgt: Die Dreiecke MAQ, MQP und MBP sind gleichschenklig mit Spitze M.

1. Fall: Alle drei Winkel im Dreieck ABC sind spitz, d.h. die Punkte P und Q liegen auf den Strecken [AC] und [BC].

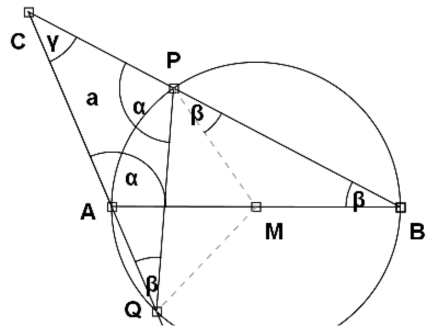


$\angle MAQ = \angle AQM = \alpha \Rightarrow \angle QMA = 180^o - 2\alpha$
$\angle PBM = \angle MPB = \beta \Rightarrow \angle BMP = 180^o - 2\beta$
$\Rightarrow \ \angle PMQ = 180^0 - (180^o - 2\alpha + 180^o - 2\beta) = 2\alpha + 2\beta - 180^o$
$\Rightarrow \ \angle MQP = (180^o - (2\alpha + 2\beta - 180^o)):2 = 180^o - \alpha - \beta$
$\Rightarrow \ \angle PQC = 180^o - (\alpha + 180^o - \alpha - \beta) = \beta$

Da $\angle QCP = \gamma \Rightarrow \ \angle CPQ = \alpha$

2. Fall: $\alpha > 90^o$, d.h. A liegt auf der Strecke [CQ].

$\angle QAM = \angle MQA = 180^o - \alpha \Rightarrow \ \angle AMQ = 180^o - 2(180^o - \alpha) = 2\alpha - 180^o$
$\angle PBM = \angle MPB = \beta \Rightarrow \ \angle BMP = 180^o - 2\beta \Rightarrow \ \angle PMA = 2\beta$
$\Rightarrow \ \angle PMQ = 2\alpha + 2\beta - 180^0$
$\Rightarrow \ \angle MQP = (180^o - (2\alpha + 2\beta - 180^o)):2 = 180^o - \alpha - \beta$
$\Rightarrow \ \angle PQC = \angle MQA - \angle MQP = 180^o - \alpha - (180^o - \alpha - \beta) = \beta$

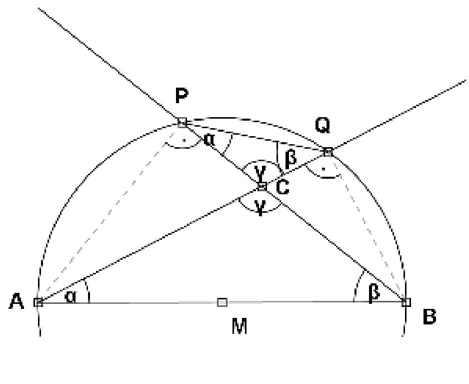


Da $\angle QCP = \gamma \Rightarrow \ \angle CPQ = \alpha$

3. Fall: $\beta > 90^o$, d.h. B liegt auf der Strecke [CP].
Dieser Fall lässt sich analog zum 2. Fall behandeln.

4. Fall: $\gamma > 90^o$, d.h. C liegt im Inneren des Thaleskreises.

Da $\angle APB = 90°$ (Thales!), gilt wegen der Winkelsumme im Dreieck ABP
$\angle MAP = 90^o - \beta$ und wegen $\overline{AM} = \overline{MP}$ auch $\angle APM = 90^o - \beta$.
$\Rightarrow \ \angle PMA = 180^o - 2(90^o - \beta) = 2\beta$
Analog: $\angle BMQ = 2\alpha$
$\Rightarrow \ \angle QMP = 180^o - (2\alpha + 2\beta)$
$\Rightarrow \ \angle MPQ = (180^o - (180^o - (2\alpha + 2\beta))):2 = \alpha + \beta$
$\Rightarrow \ \angle CPQ = \angle APM + \angle MPQ - 90^o = 90^o - \beta + \alpha + \beta - 90^o = \alpha$



Da $\angle QCP = \gamma$ (Scheitelwinkel) $\Rightarrow \ \angle PQC = \beta$

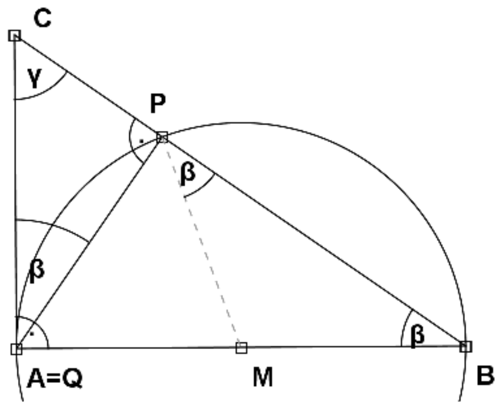
5. Fall: $\alpha = 90^\circ$, also Q = A

$\angle PMQ = 2\beta$ (Außenwinkelsatz im Dreieck MBP)

$\Rightarrow \angle MQP = (180° - 2\beta):2 = 90° - \beta$

$\Rightarrow \angle PQC = \angle MQC - \angle MQP = 90° - (90°-\beta) = \beta$.

Da $\angle QCP = \gamma$, folgt $\angle CPQ = \alpha = 90°$



Alternative: Da P auf dem Thaleskreis über [AB] liegt, steht QP = AP senkrecht auf BC, d. h.

$\angle CPQ = 90° = \alpha$. Da $\angle QCP = \gamma$, folgt $\angle PQC = \beta$.

6. Fall: $\beta = 90^\circ$, also P = B
Dieser Fall lässt sich analog zum 5. Fall behandeln.

7. Fall: $\gamma = 90^\circ$, d.h. C liegt auf dem Thaleskreis

Es ist Q = P = C. Das Dreieck QPC ist entartet, sein Flächeninhalt 0. Da das Dreieck ABC einen Flächeninhalt größer 0 hat, kann die geforderte Bedingung nicht erfüllt werden.

Zusammenfassung: In den Fällen 1 bis 6 stimmen die Dreiecke QPC und ABC stets in allen drei Winkeln überein, sie sind also ähnlich.

Daraus folgt: Es existiert eine positive Zahl m mit $\overline{AB} = m \cdot \overline{PQ}$ und $F_{\Delta ABC} = m^2 \cdot F_{\Delta PQC}$.

Alternative:

In den Fällen 1, 2 und 3 liefert der Sekantensatz, im Fall 4 der Sehnensatz, in den Fällen 5 und 6 der Kathetensatz:

$\overline{CP} \cdot \overline{CB} = \overline{CQ} \cdot \overline{CA} \Leftrightarrow \overline{CP} : \overline{CQ} = \overline{CA} : \overline{CB}$

Mit $\angle QCP = \angle ACB$ folgt wieder die Ähnlichkeit der Dreiecke QPC und ABC.

2. Schritt:

$F_{\Delta ABC} = 4 \cdot F_{\Delta PQC} \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = 2$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = 2 \cdot \overline{PQ} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 0{,}5 \cdot \overline{AB} = \overline{MP} = \overline{MQ}$

$\Leftrightarrow \Delta$ MPQ ist gleichseitig

$\Leftrightarrow \angle MPQ = 60^\circ$

$\Leftrightarrow$ … für die Fälle 1, 2 und 3:

$\angle MQP = 180^\circ - \alpha - \beta = 60^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta = 120^\circ \Leftrightarrow \gamma = 60^\circ$

… für Fall 4

$\angle MPQ = \alpha + \beta = 60^\circ \Leftrightarrow \gamma = 120^\circ$

… für die Fälle 5 und 6:

$60° = \angle PMQ = 2\beta \Leftrightarrow \beta = 30°$. Mit $\alpha = 90°$ folgt $\gamma = 60^\circ$

bzw. $60° = \angle PMQ = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 30°$. Mit $\beta = 90°$ folgt $\gamma = 60^\circ$.