4. Landeswettbewerb Mathematik Bayern
1. Runde 2001/2002 – Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 1

Yannick besitzt gleichseitige Dreiecke, Quadrate sowie regelmäßige Sechs- und Achtecke, die alle dieselbe Seitenlänge haben. Er legt damit ohne Lücken und Überlappungen regelmäßige Muster. Dabei treffen Ecken immer auf Ecken und an jeder Ecke dürfen zwar verschiedenartige Vielecke zusammentreffen, aber sie müssen an allen Ecken in jeweils gleicher Reihenfolge angeordnet sein.

Finde alle möglichen Muster und zeige, dass es keine weiteren gibt.

Lösung

Die Innenwinkel der regelmäßigen Vielecke haben die Winkelweiten 60° (Dreieck), 90° (Quadrat), 120° (Sechseck) und 135° (Achteck). Damit an einer Ecke keine Lücken oder Überschneidungen auftreten, muss sich der Vollwinkel von 360° als Summe dieser Winkel darstellen lassen. Wir erhalten durch systematisches Probieren folgende Möglichkeiten:

Vielecke der gleichen Art:	$6 \cdot 60° = 360°$	sechs Dreiecke	(1)
	$4 \cdot 90° = 360°$	vier Quadrate	(2)
	$3 \cdot 120 = 360°$	drei Sechsecke	(3)

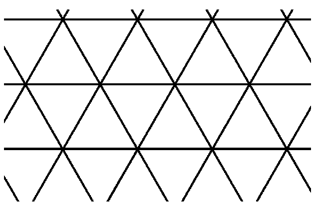
Ein Muster nur mit Achtecken ist nicht möglich, da 360 kein Vielfaches von 135 ist.

Da 135 die einzige ungerade Zahl ist, kann es nur zwei Achtecke oder kein Achteck geben, das an einem Eckpunkt des Musters vorkommt. Bei der folgenden Übersicht wurde immer versucht, möglichst große zulässige Summanden von 360° bzw. vom verbleibenden Winkelmaß zu subtrahieren.

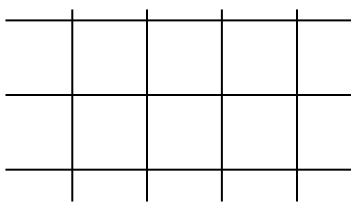
Vielecke unterschiedlicher Art:

$2 \cdot 135° + 90° = 360°$	zwei Achtecke, ein Quadrat	(4)
$2 \cdot 120° + 2 \cdot 60° = 360°$	zwei Sechsecke, zwei Dreiecke	(5)
$1 \cdot 120° + 2 \cdot 90° + 1 \cdot 60° = 360°$	ein Sechseck, zwei Quadrate, ein Dreieck	(6)
$1 \cdot 120° + 4 \cdot 60° = 360°$	ein Sechseck, vier Dreiecke	(7)
$2 \cdot 90° + 3 \cdot 60° = 360°$	zwei Quadrate, drei Dreiecke	(8)

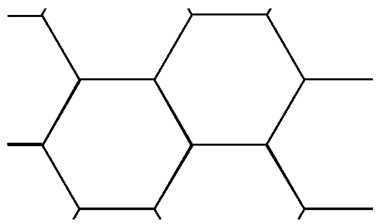
Die folgenden Bilder zeigen, dass es für jeden dieser Fälle ein regelmäßiges Muster gibt. Da bei der Anordnung der zwei Quadrate und der drei Dreiecke sogar zwei Möglichkeiten existieren, sind insgesamt neun Überdeckungen der Ebene mit den geforderten Eigenschaften möglich.



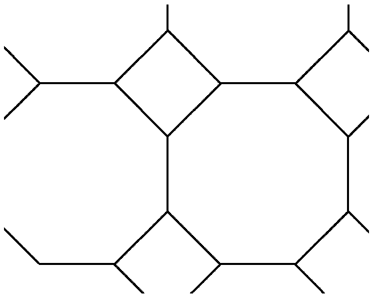
(1)



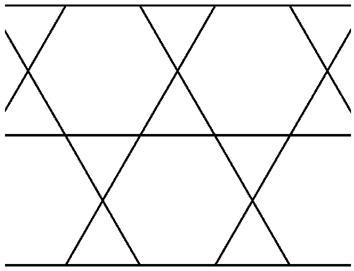
(2)



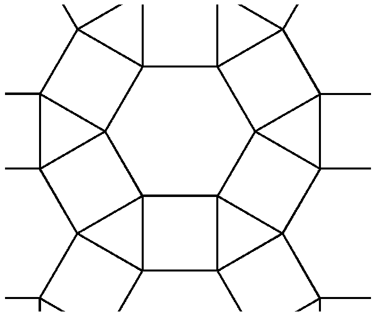
(3)



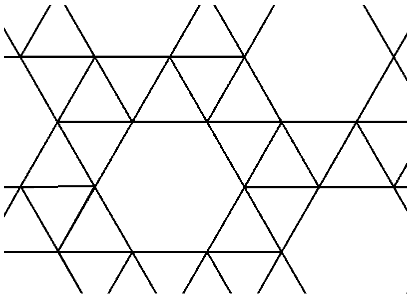
(4)



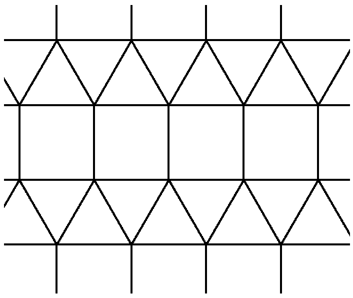
(5)



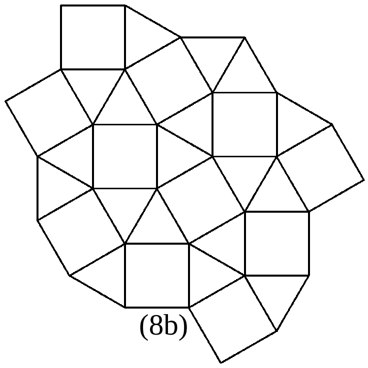
(6)



(7)



(8a)



(8b)

Aufgabe 2

Die Felder eines Schachbretts sind in beliebiger Reihenfolge mit den Zahlen 1 bis 64 belegt. Man darf zwei Felder auswählen und bildet die Summe und das Produkt ihrer Zahlen. Danach wird die Zahl des einen Feldes durch die Einerziffer dieser Summe und die Zahl des anderen Feldes durch die Einerziffer dieses Produktes ersetzt.

Kann man durch mehrfache Anwendung dieses Verfahrens erreichen, dass das Schachbrett mit lauter gleichen Zahlen belegt ist?

1. Lösung

Antwort: Man kann nicht erreichen, dass alle Felder des Schachbretts mit der gleichen Zahl belegt sind.

Begründung:

Wendet man das Verfahren einmal an, so erhält man zwei einstellige Zahlen, d.h. wenn man das Schachbrett mit der gleichen Zahl belegen kann, dann muss diese Zahl einstellig sein.

Ist mindestens eine der verwendeten Zahlen eine Zehnerzahl oder die Zahl 0, dann ist die Einerziffer des Produkts 0.

Wenn man das Schachbrett mit der gleichen Zahl belegen kann, dann muss diese Zahl die Null sein.

Von den Ausgangszahlen brauchen wir nur die Einerreste betrachten, denn nur diese haben Einfluss auf den Einerrest von Summe und Produkt.

Ist genau eine Ausgangszahl 0, so ist der Einerrest des Produktes, nicht aber der Einerrest der Summe 0. Damit erhöht sich die Anzahl der Nullen nicht.

Ist keine Ausgangszahl 0, so kann nie gleichzeitig der Einerrest der Summe und des Produktes 0 werden.

Bei wiederholter Anwendung dieses Verfahrens erhöht sich die Anzahl der Nullen bei jedem Schritt um höchstens 1.

Eine Startzahl ist sicher ungleich 0. Durch wiederholte Anwendung des Verfahren kann man in einem Schritt die Anzahl der Nullen um höchstens 1 erhöhen. Sollen alle Felder mit 0 belegt sein, so hätte man im letzten Schritt als Ausgangszahlen 0 und eine von 0 verschiedene Zahl. Die Einerziffer der Summe dieser beiden Zahlen ist aber nie 0.

Man kann nicht erreichen, dass alle Felder des Schachbretts mit gleichen Zahlen belegt sind.

2. Lösung

Auf dem Schachbrett befinden sich 32 gerade und 32 ungerade Zahlen. Kombiniert man diese nach der vorgegebenen Methode, so ergeben sich folgende neue Belegungen der kombinierten Felder:

Fall 1: Beide Zahlen sind gerade.

Da sowohl das Produkt als auch die Summe von zwei geraden Zahlen wieder gerade ist, bleibt die Anzahl der geraden und die Anzahl der ungeraden Zahlen auf dem Schachbrett unverändert.

Fall 2: Eine Zahl ist gerade, die andere ist ungerade.

Das Produkt einer geraden Zahl mit einer ungeraden Zahl ist gerade, die Summe einer geraden Zahl und einer ungeraden Zahl ist ungerade.

In diesem Fall ändert sich nichts an der Anzahl der geraden und der ungeraden Zahlen.

Fall 3: Die beiden Zahlen sind ungerade.

Das Produkt der beiden Zahlen ist ungerade, ihre Summe ist gerade.

Die Anzahl der ungeraden Zahlen vermindert sich um 1, die Anzahl der geraden erhöht sich um 1.

Insgesamt werden also nur im dritten Fall die Anzahlen der geraden und der ungeraden Zahlen verändert. Will man lauter gleiche Zahlen auf dem Schachbrett haben, so müssen diese also gerade sein, weil man nur die Anzahl der ungeraden verringern kann. Diese verringert sich jeweils um 1, beginnend mit 32. Bei diesem Verfahren wird schließlich irgendwann nur noch eine ungerade Zahl auf dem Schachbrett sein, während alle anderen Zahlen gerade sind. Um diese letzte ungerade Zahl zu beseitigen, fehlt aber für die Anwendung von Fall 3 ein ungerader Partner. Deshalb kann sie nicht beseitigt werden.

Aufgabe 3

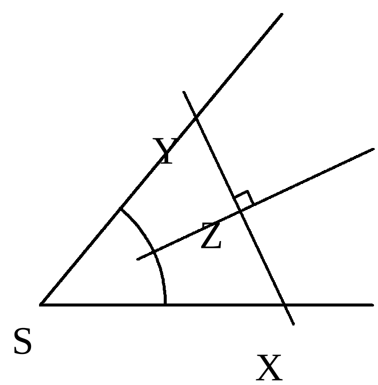
In einem Dreieck ABC werden die Winkelhalbierenden von α und β sowie die Winkelhalbierenden der Außenwinkel von α und β gezeichnet. Von C aus werden die Lote auf diese vier Winkelhalbierenden gefällt.

Zeige, dass die vier Lotfußpunkte auf einer Parallelen zu AB liegen.

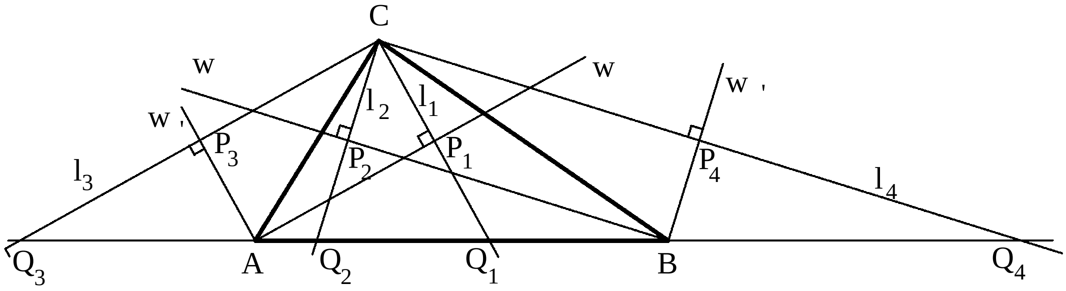
1. Lösung (Verwendung der Spiegelung an den Winkelhalbierenden)

Vorüberlegung:

Jedes Lot zu der Winkelhalbierenden w_φ eines Winkels φ in einem Punkt $Z \neq S$ von w_φ schneidet auf den Schenkeln des Winkels zwei Punkte X und Y aus. Die Dreiecke SXZ und SZY sind nach dem Kongruenzsatz WSW kongruent, denn die beiden Dreiecke stimmen im rechten Winkel bei Z, den Winkelmaßen $\frac{1}{2}\varphi$ und der Streckenlänge $\overline{SZ}$ überein. Daraus folgt, dass auch die Strecken [ZX] und [ZY] gleich lang sind. Der Punkt X ist also der Bildpunkt von Y bei der Achsenspiegelung an w_φ und umgekehrt.



In der nachfolgenden Figur sind die Winkelhalbierenden der Winkel α und β sowie ihrer Außenwinkel α' und β' eingezeichnet. Die vier Lote auf diese Winkelhalbierenden werden mit l_1, l_2, l_3 und l_4 bezeichnet.



Entsprechend der Zeichnung gilt:

$l_1 \perp w_{á}$; $\quad l_1 \cap w_{á} = \{P_1\}$; $\quad l_1 \cap AB = \{Q_1\}$;
$l_2 \perp w_{â}$; $\quad l_2 \cap w_{â} = \{P_2\}$; $\quad l_2 \cap AB = \{Q_2\}$;
$l_3 \perp w_{á'}$; $\quad l_3 \cap w_{á'} = \{P_3\}$; $\quad l_3 \cap AB = \{Q_3\}$;
$l_4 \perp w_{â'}$; $\quad l_4 \cap w_{â'} = \{P_4\}$; $\quad l_4 \cap AB = \{Q_4\}$;

Gemäß der Vorüberlegung sind die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 die Spiegelpunkte von C bezüglich der entsprechenden Winkelhalbierenden.

Also gilt: P_1 ist der Mittelpunkt der Strecke [Q_1C], P_2 ist der Mittelpunkt der Strecke [Q_2C], usw.

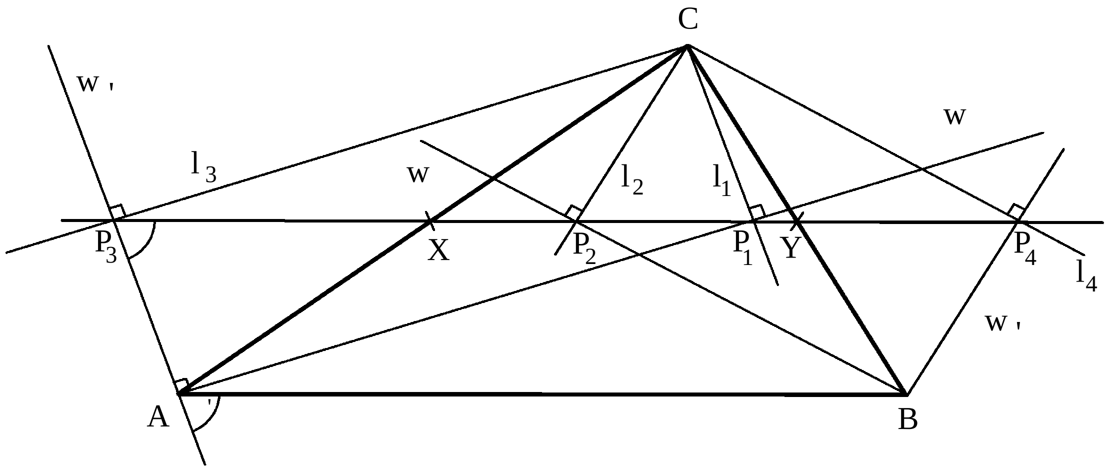
Also ist P_1P_2 ist die Mittelparallele im Dreieck Q_2Q_1C und hat daher den Abstand $\frac{1}{2}\,h_c$ von AB.

Entsprechend ist P_3P_4 die Mittelparallele im Dreieck Q_3Q_4C und hat daher den Abstand $\frac{1}{2}\,h_c$ von AB.

Da beide Parallelen auf der gleichen Seite der Geraden AB liegen, fallen sie zusammen. Die vier Lotfußpunkte P_1, P_2, P_3 und P_4 liegen auf der Mittelparallelen des Dreiecks ABC.

2. Lösung (Rechteckseigenschaften von Teilfiguren)

Von C aus werden die Lote auf die Winkelhalbierende w_α und die Außenwinkelhalbierende $w_{\alpha'}$ gefällt. Die Lotfußpunkte sollen P_1 bzw. P_3 heißen.



Die Winkelhalbierende und die Außenwinkelhalbierende sind zueinander orthogonal, also ist w(P_1AP_3) = 90°.

Das Viereck AP_1CP_3 ist somit ein Viereck mit mindestens drei rechten Winkeln, also ein Rechteck.

Die Strecken [AC] und [P_1P_3] sind die Diagonalen des Rechtecks AP_1CP_3. Die Dreiecke AP_1C und P_3P_1C sind kongruent nach dem Kongruenzsatz SWS. Daher sind die gleichliegenden Winkel $\angle P_1AC$ und $\angle P_1P_3C$ gleich weit. Wegen w(P_1AC) = w(BAP_1) = $\frac{1}{2}\alpha$ (nach Voraussetzung) gilt also auch w(P_1P_3C) = $\frac{1}{2}\alpha$.

Die Geraden P_3P_1 und AB schneiden die Gerade durch A und P_3 unter den Winkeln φ und φ' . Die Weite dieser Winkel ist jeweils $90°-\frac{1}{2}\alpha$. Die Geraden P_3P_1 und AB sind demnach parallel (Umkehrung des Stufenwinkelsatzes).

Die Diagonalen [AC] und $[P_1P_3]$ dieses Rechtecks schneiden sich im Punkt X. Da sich die Rechtecksdiagonalen halbieren, ist X insbesondere der Mittelpunkt der Dreiecksseite [AC]. Somit liegen die drei Punkte P_3, X und P_1 auf der zu AB parallelen Mittellinie des Dreiecks ABC.

Von C aus werden die Lote auf die Winkelhalbierende w_β und die Außenwinkelhalbierende $w_{\beta'}$ gefällt. Die Lotfußpunkte sollen P_2 bzw. P_4 heißen.

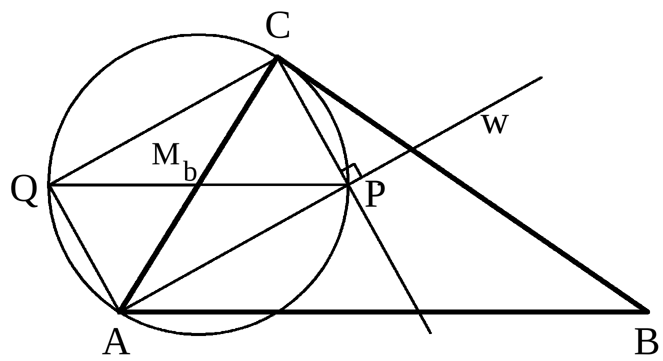
Auf entsprechende Weise kann man nun zeigen, dass das Viereck P_2BP_4C ein Rechteck mit dem Diagonalenschnittpunkt Y ist und die drei Punkte P_2, Y und P_4 auf der zu AB parallelen Mittellinie des Dreiecks ABC liegen.

Da diese Mittellinie durch die Punkte X und Y eindeutig festgelegt ist, liegen die Punkte P_3, P_1, P_2 und P_4 also auf ein und derselben zu AB parallelen Geraden. Dies war zu zeigen.

3. Lösung (Verwendung des Satzes von Thales)

Behauptung: Die vier Lotfußpunkte liegen auf der Mittelparallelen des Dreiecks ABC.

Wir zeigen dies für den Lotfußpunkt P von C auf die Winkelhalbierende von α und den Lotfußpunkt Q von C auf die Winkelhalbierende des Außenwinkels α' von α . Für die zwei verbleibenden Lotfußpunkte verläuft der Beweis analog.



Nach Voraussetzung gilt:
$CP \perp w_\alpha$ und $CQ \perp w_{\alpha'}$ $\Rightarrow$ w(CPA) = 90° = w(AQC) $\Rightarrow$ P und Q liegen auf dem Thaleskreis über [AC]. Der Radius des Thaleskreises werde mit r bezeichnet.

$\Rightarrow \overline{AM_b} = r = \overline{PM_b} = \overline{QM_b}$

$\Rightarrow$ Die Dreiecke APM_b und QAM_b sind gleichschenklig mit Spitze M_b .

$\Rightarrow$ $w(M_bPA) = w(PAM_b) = \frac{1}{2}\alpha = w(BAP)$ sowie $w(AQM_b) = w(M_bAQ) = \frac{1}{2}\alpha' = 180° - w(BAQ)$

$\Rightarrow$ M_bP ist parallel zu AB (Wechselwinkel bzw. Nachbarwinkel) und M_bQ ist parallel zu AB (Nachbarwinkel).

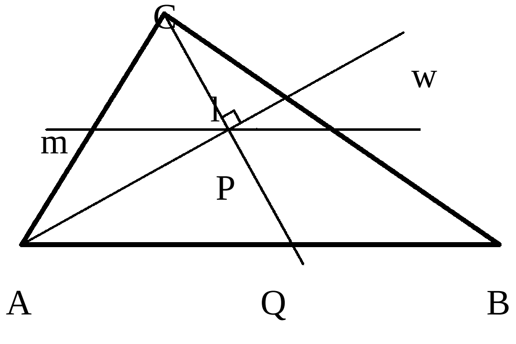
Da M_b der Mittelpunkt der Strecke [AC] ist, liegen P und Q also auf der Mittelparallelen des Dreiecks ABC.

4. Lösung (Spiegelung)

Wir zeigen, dass die vier Lotfußpunkte auf der Mittelparallelen m des Dreiecks ABC mit m || AB liegen.

Für den Fußpunkt P des Lotes von C auf die Winkelhalbierende w_α des Winkels α ergibt sich das folgendermaßen:

Bei der Spiegelung an w_α wird AC auf AB abgebildet. Das Bild Q von C liegt also auf AB, zugleich aber auf CP. Daher ist P der Mittelpunkt der Strecke [CQ]. Die Mittelparallele m halbiert nach dem Satz über die Mittelparallele bzw. über die Streifenschar ebenfalls die Strecke [CQ], also liegt P auf m.



Entsprechend zeigt man, dass auch die anderen Lotfußpunkte auf m liegen.

Aufgabe 4

Eine natürliche Zahl soll ***aufteilbar*** heißen, wenn die Summe einiger Ziffern dieser Zahl gleich der Summe ihrer restlichen Ziffern ist.
Beispielsweise sind die Zahlen 25371 und 2851 ***aufteilbar***, weil 2 + 7 = 5 + 3 + 1 bzw. 2 + 5 + 1 = 8 gilt.

Weise nach, dass es zwei, aber nicht drei aufeinanderfolgende Zahlen gibt, die ***aufteilbar*** sind.

Lösung

Eine Zahl kann höchstens dann aufteilbar sein, wenn die Summe ihrer Ziffern gerade ist, da nur dann eine Aufteilung der Ziffern in zwei Teilmengen mit gleicher Summe möglich ist.

Vergrößert man eine natürliche Zahl um 1 und endete die Ausgangszahl nicht auf die Einerziffer 9, so vergrößert sich die Summe ihrer Ziffern um 1. Auf eine natürliche Zahl mit einer geraden Ziffernsumme folgt in diesem Fall eine Zahl mit ungerader Ziffernsumme und umgekehrt.

Zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen können höchstens dann beide eine gerade Ziffernsumme haben, wenn die kleinere der beiden Zahlen die Einerziffer 9 hat.

Daraus folgt, dass es keine drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen geben kann, die alle drei eine gerade Ziffernsumme haben.

Damit ist nachgewiesen, dass es keine drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen geben kann, die alle drei ***aufteilbar*** sind.

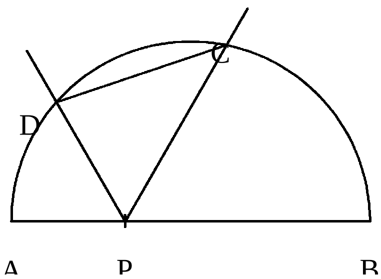
Da beispielsweise die beiden Zahlen 549 und 550 wegen 5 + 4 = 9 bzw. 5 + 0 = 5 aufteilbar sind, ist die Existenz von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen, die aufteilbar sind, gesichert.

Aufgabe 5

Auf dem Durchmesser [AB] eines Halbkreises wird ein beliebiger Punkt P ($P \neq A$, $P \neq B$) gewählt. Von P aus werden zwei Halbgeraden gezeichnet, so dass bei P drei Winkel der Weite 60° entstehen (siehe Skizze).

Diese Halbgeraden schneiden den Halbkreis in den Punkten C und D.

Wie lang ist die Strecke [CD]?



Lösungen

Behauptung: Die Länge der Strecke [CD] stimmt mit dem Kreisradius r überein.

Ist P der Mittelpunkt des Halbkreises, so gilt $\overline{PC} = \overline{PD} = r$ und $w(CPD) = 180° - 2 \cdot 60° = 60°$.

Das Dreieck PCD ist gleichschenklig mit einem 60°-Winkel an der Spitze und damit sogar gleichseitig. Es gilt also $\overline{CD} = r$.

Bei den folgenden Lösungen wird davon ausgegangen, dass P zwischen dem Mittelpunkt des Halbkreises und dem Punkt A liegt. Im anderen Fall wird P an M gespiegelt.

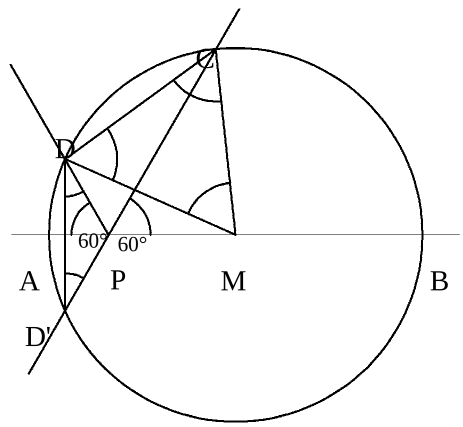
1. Lösung (Anwendung von Symmetrie und Peripheriewinkelsatz)

D und D' entstehen durch symmetrische Konstruktion bezüglich der Achse AB. Daraus folgt $\alpha = \beta$.

Aus der Winkelsumme im Dreieck D'PD erhalten wir

$\alpha = \beta = 30°$.

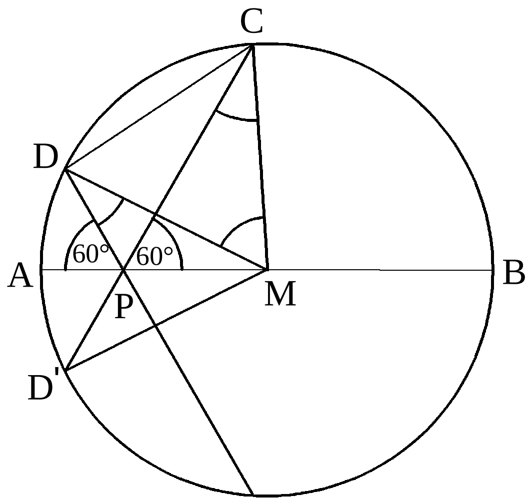
Der Umfangswinkelsatz liefert bei Anwendung auf die Sehne [CD]: $\mu = 2\beta = 60°$.



Da das Dreieck DMC wegen $\overline{MC} = \overline{MD} = r$ gleichschenklig ist, folgt $\gamma = \delta = (180° - \mu) : 2 = 60°$. Das Dreieck DMC ist also sogar gleichseitig, also ist $\overline{CD} = r$.

2. Lösung (Kongruenz)

Zum Beweis der Behauptung werden der Halbkreis zu einem Kreis und die Halbgeraden zu Geraden ergänzt. Mit den in der nebenstehenden Skizze verwendeten Bezeichnungen ergibt sich dann:



Die Winkel $\sphericalangle$ MD'C und $\sphericalangle$ D'CM haben dieselbe Weite, da das Dreieck D'MC gleichschenklig ist.

Die Winkel $\sphericalangle$ D'PM und $\sphericalangle$ MPD haben die Weite 120° und liegen deshalb in den Dreiecken D'MP bzw. MDP jeweils der längeren Dreiecksseite gegenüber. Nach dem Kongruenzsatz SsW sind diese beiden Dreiecke zueinander kongruent.

Damit ist $\beta = \gamma$.

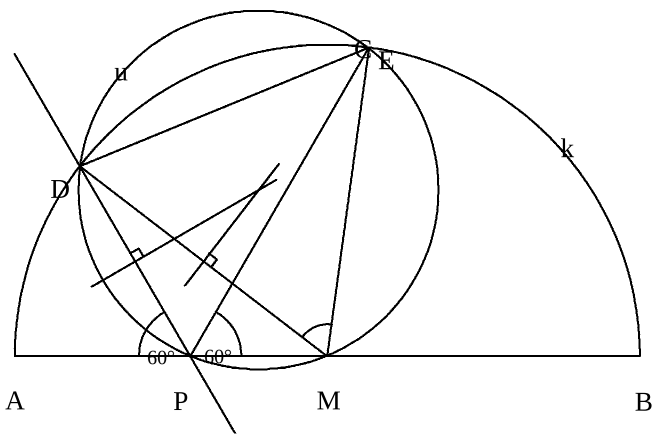
Die Winkelsumme in Dreieck MCD ergibt:

$$\begin{aligned}
\delta &= 180° - (w(DCM) + w(MDC)\ ) \\
&= 180° - (\beta + w(DCP) + w(MDC)\ ) \\
&= 180° - (w(DCP) + w(MDC) + \gamma) \qquad , \text{da } \beta = \gamma \\
&= 180° - (w(DCP) + w(PDC) \\
&= 180° - \left(180° - w(CPD)\right) \\
&= 60°
\end{aligned}$$

Da das Dreieck DCM gleichschenklig ist, ergibt sich mit $\delta = 60°$, dass dieses Dreieck gleichseitig ist. Damit ist $\overline{CD} = r$.

3. Lösung (Anwendung des Fasskreises)

k ist der gegebene Halbkreis mit Durchmesser [AB]. Der Radius sei r.



Wir betrachten D $\in$ k mit w(MPD) = 120°.

Der Umkreis u des Dreiecks MPD schneidet k außer in D noch in einem weiteren Punkt E, da sich wegen P $\notin$ DM und $\angle$MPD = 120° $\neq$ 90° die Kreise k und u nicht in D berühren können.

Somit ist das Viereck MEDP ein Sehnenviereck ist, in dem sich – wie bekannt – Gegenwinkel zu 180^0 ergänzen. Deshalb gilt:

w(DEM) = 60°. (1)

Da $\overline{MD} = \overline{ME} = r$ ist, gilt:

Δ MED ist gleichschenklig. (2)

Aus (1) und (2) folgt:

Δ MED ist gleichseitig, d.h. $\overline{DE} = r$ und w(EMD) = 60°.

Aus der letzten Aussage folgt, dass u der 60°-Fasskreisbogen über [DE] ist.

Da P $\in$ u ist, gilt: w(EPD) = 60°.

Demnach ist C = E, also $\overline{DE} = \overline{DC} = r$.

Die gegebene Strecke [CD] hat also immer die Länge r, unabhängig von der Lage des Punktes P.

4. Lösung (Rechnen mit Kreis- und Geradengleichungen)

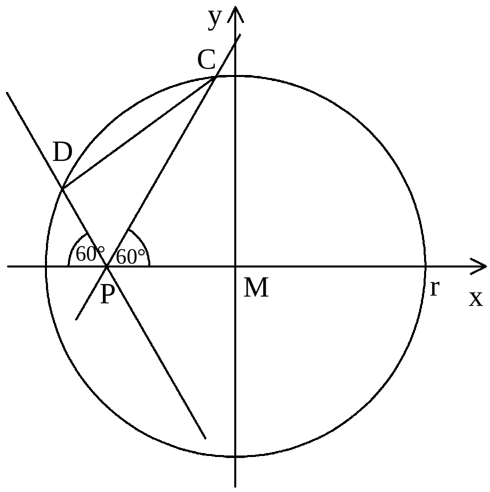
Legen wir den Mittelpunkt des Kreises mit Radius r in den Ursprung des Koordinatensystems, so erhalten wir die Kreisgleichung

$k:\ x^2 + y^2 = r^2;\ \ M(0/0)$

Der Punkt P wird auf der negativen x-Achse angenommen. Für seine Koordinaten gelte P (–s / 0), 0 < s < r.

Die Gleichungen der Geraden durch P, die die x-Achse im Winkel von 60° schneiden, haben die Steigungen $\sqrt{3}$ bzw. $-\sqrt{3}$ (Begründung siehe unten).

Die beiden Geraden g_1 und g_2 haben also die Gleichungen: $g_1:\ \ y = \sqrt{3}\cdot(x+s)$ und $g_2:\ \ y = -\sqrt{3}\cdot(x+s)$



Durch Ersetzen der Variablen y in der Kreisgleichung durch $\sqrt{3}\cdot(x+s)$ bzw. $-\sqrt{3}\cdot(x+s)$ erhalten wir in beiden Fällen die quadratische Gleichung

$$x^2 + 3\cdot(x+s)^2 = r^2 \quad\Leftrightarrow\quad 4x^2 + 6s\cdot x + 3s^2 - r^2 = 0$$

$$x = \frac{-6s + \sqrt{36s^2 - 48s^2 + 16r^2}}{8} \quad\vee\quad x = \frac{-6s - \sqrt{-12s^2 + 16r^2}}{8}$$

$$x = \frac{-3s + \sqrt{4r^2 - 3s^2}}{4} \quad\vee\quad x = \frac{-3s - \sqrt{4r^2 - 3s^2}}{4}$$

Da s < r, ist die Diskriminante positiv.

Nach der Bezeichnung in der Figur ist $x = \frac{-3s + \sqrt{4r^2 - 3s^2}}{4}$ die x-Koordinate des Punktes C und $x = \frac{-3s - \sqrt{4r^2 - 3s^2}}{4}$ die x-Koordinate des Punktes D. Die y-Koordinaten dieser Punkte ergeben sich durch das Einsetzen der x-Koordinaten in die entsprechende Geradengleichung.

Die Länge der Strecke [CD] wird nach dem Satz von Pythagoras berechnet.

$$\overline{CD}^2 = (y_D - y_C)^2 + (x_D - x_C)^2 =$$

$$\left(-\sqrt{3}\cdot\left(\frac{-3s - \sqrt{4r^2 - 3s^2}}{4} + s\right) - \sqrt{3}\cdot\left(\frac{-3s + \sqrt{4r^2 - 3s^2}}{4} + s\right)\right)^2 + \left(\frac{-3s - \sqrt{4r^2 - 3s^2}}{4} - \frac{-3s + \sqrt{4r^2 - 3s^2}}{4}\right)^2$$

$$= 3\cdot\left(-\frac{3}{2}s + 2s\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4r^2 - 3s^2}\right)^2$$

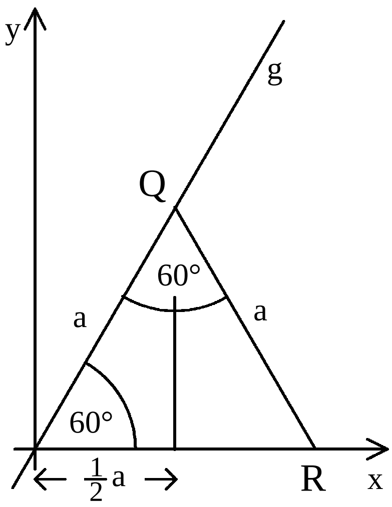
$$= 3\cdot\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(4r^2 - 3s^2\right)$$

$$= r^2$$

Die Länge der Strecke [CD] stimmt mit dem Radius des Kreises überein.

Nachweis der Steigung der Geraden g

Das nebenstehende Bild zeigt die Ursprungsgerade g, die mit der positiven x-Achse einen 60°-Winkel bildet. Der Punkt Q wird auf dieser Geraden beliebig gewählt. Außerdem wird durch Q eine Gerade gezeichnet, die mit g einen Winkel von 60° bildet. Auf Grund der Winkelsumme ist dann auch der dritte Innenwinkel ein 60°-Winkel. Das Dreieck ORQ ist deshalb gleichseitig.



Die x-Koordinate des Punktes Q stimmt mit der halbem Seitenlänge des Dreiecks überein, die y-Koordinate von Q ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck, also $\frac{1}{2}a \cdot \sqrt{3}$. Die Steigung der Geraden OQ ist der Quotient aus der Differenz der y-Koordinaten und der Differenz der x-Koordinaten von O und Q.

Daraus folgt: $m = \frac{\frac{1}{2}a \cdot \sqrt{3}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}$.

Aus Symmetriegründen ist die Steigung der zweiten Geraden $-\sqrt{3}$.

Aufgabe 6

Drei natürliche Zahlen a, b und c mit a < b < c werden Jahrtausendtrio genannt, wenn die größte und die kleinste Zahl die Differenz 2001 haben und die Summe von je zwei der drei Zahlen eine Quadratzahl ist.

Wie viele Jahrtausendtrios gibt es?

Lösung

Nach Aufgabenstellung sind für ein Jahrtausendtrio a, b, c mit a < b < c die drei Summen a + b, a + c und b + c jeweils Quadratzahlen. Es gibt also natürliche Zahlen x, y und z, so dass $x^2 = a + b$, $y^2 = a + c$ und $z^2 = b + c$. Aus b < c folgt a + b < a + c und damit x < y. Aus a < b folgt a + c < b + c und damit y < z. Es ist also x < y < z, d.h. y muss zwischen x und z liegen.

Außerdem ist 2001 = c – a. Setzt man in dieser Gleichung $c = z^2 - b$ und $a = x^2 - b$ ein, so ergibt sich

$$2001 = (z^2 - b) - (x^2 - b) = z^2 - x^2 = (z - x)\cdot(z + x).$$

z – x und z + x müssen also Teiler von 2001 sein. Um alle Möglichkeiten zu finden, bestimmen wir die Primzahlzerlegung von 2001, also $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$.

Somit hat 2001 die acht Teiler 1, 3, 23, 29, 69, 87, 667, 2001. Da z – x < z + x gilt, ergeben sich die folgenden vier Fälle:

1) z – x = 1, z + x = 2001

2) z – x = 3, z + x = 667

3) z – x = 23, z + x = 87

4) z – x = 29, z + x = 69

In Fall 1) ist 2z = (z – x)+(z + x) = 2002, also z = 1001 und x = z – 1 = 1000. Da die natürliche Zahl y zwischen x und z liegen muss, ist dieser Fall ausgeschlossen.

In Fall 2) ergibt sich ebenso 2z = 670, also z = 335 und x = 332.

In Fall 3) ist 2z = 110, also z = 55 und x = 32.

In Fall 4) ist 2z = 98, also z = 49 und x = 20.

In jedem der Fälle muss y zwischen x und z liegen. Es darf y aber nicht eine beliebige natürliche Zahl zwischen x und z sein, denn aus $y^2 = a + c = 2a + (c - a) = 2a + 2001$ folgen zwei weitere Einschränkungen:

1. y ungerade

2. y • 45

Mit diesen beiden Einschränkungen bleibt in Fall 2 nur y = 333, in Fall 3 bleibt y = 45, 47, 49, 51, 53 und in Fall 4 bleibt nur y = 45, 47. Insgesamt gibt es also 8 Möglichkeiten.

Um zu überprüfen, ob alle acht Möglichkeiten zu Jahrtausendtrios führen oder ob es noch weitere Einschränkungen gibt, berechnen wir jeweils die zugehörigen Jahrtausendtrios.

Es ist $a = \frac{y^2 - 2001}{2}$ und $c = \frac{y^2 + 2001}{2}$.

Daraus ergibt sich b durch $b = x^2 - a = z^2 - c$. Somit erhält man folgende Tabelle:

Fall 2	Fall 3					Fall 4	
x = 332 z = 335	x = 32 z = 55					x = 20 z = 49	
y = 333	y = 45	y = 47	y = 49	y = 51	y = 53	y = 45	y = 47
a = 54 444 b = 55 780 c = 56 445	a = 12 b = 1012 c = 2013	a = 104 b = 920 c = 2105	a = 200 b = 824 c = 2201	a = 300 b = 724 c = 2301	a = 404 b = 620 c = 2405	a = 12 b = 388 c = 2013	a = 104 b = 296 c = 2105

In den letzten drei Zeilen haben sich in allen 8 Fällen Jahrtausendtrios ergeben.

Es gibt also genau 8 Jahrtausendtrios.