3. Landeswettbewerb Mathematik Bayern
2. Runde 2000/2001 - Aufgaben und Lösungsbeispiele

Aufgabe 1

Auf einer Tafel stehen 40 positive, ganze Zahlen in acht Zeilen und fünf Spalten angeordnet.
Die Zahlen dürfen nur auf folgende zwei Arten abgeändert werden:

(Z) Alle Zahlen einer Zeile werden verdoppelt.

(S) Alle Zahlen einer Spalte werden um 1 vermindert.

Kann man so erreichen, dass 40-mal die Zahl Null auf der Tafel steht?

Lösung

Man kann erreichen, dass 40-mal die Zahl Null auf der Tafel steht. Das folgende Verfahren hat zunächst das Ziel, schrittweise alle Zahlen einer beliebigen Spalte „auf Null zu bringen“. Beschrieben wird nun das Verfahren für die i–te Spalte ($i = 1...5$) :

n sei die kleinste positive ganze Zahl, die in der i–ten Spalte vorkommt. Diese Zahl kann möglicherweise in mehreren Feldern der Spalte vorkommen.

<u>Schritt 1:</u> Man wendet $(n - 1)$-mal die Umformungsregel (S) auf die i–te Spalte an.

Dadurch werden alle Zahlen der Spalte um $n - 1$ vermindert. Die Felder, in denen die Zahl n stand, enthalten nun jeweils eine Eins. Alle anderen Felder enthalten Zahlen größer als 1.

<u>Schritt 2:</u> Man wendet die Umformungsregel (Z) einmal auf diejenigen <u>Zeilen</u> an, deren Felder in der i–ten Spalte eine Eins enthalten.

Die Felder der i–ten Spalte, die eine Eins enthielten, enthalten nach Schritt 2 jeweils eine Zwei, der Inhalt aller anderen Felder der Spalte bleibt unverändert.

<u>Schritt 3:</u> Man wendet die Umformungsregel (S) einmal auf die i–te Spalte an.

Nun stehen in den gleichen Feldern wie nach Schritt 1 wiederum Einsen. In allen anderen Feldern haben sich die Zahlen um 1 vermindert. Möglicherweise sind dadurch in der i–ten Spalte weitere Felder mit Einsen hinzugekommen.

<u>Schritt 4:</u> Man wiederholt Schritt 2 und Schritt 3 so lange, bis in allen Feldern der i–ten Spalte nur Einsen stehen.

Dies ist möglich, da sich mit jeder Durchführung der Schritte 2 und 3 in der i–ten Spalte alle Zahlen, die größer als 1 sind, um 1 vermindern und alle Felder mit Einsen nach diesen beiden Schritten wieder eine Eins enthalten.

<u>Schritt 5:</u> Man wendet die Umformungsregel (S) einmal auf die i–te Spalte an.

Nun steht in allen Feldern der Spalte die Zahl Null.

Mit diesem Verfahren bearbeitet man nacheinander alle fünf Spalten. Da eine Umformung nach der Regel (Z) sich nicht auf ein Feld auswirkt, in dem die Zahl Null steht, bleiben bereits bearbeitete Spalten unverändert.

Nach endlich vielen Schritten steht 40-mal die Zahl Null auf der Tafel.

Aufgabe 2
In einem Dreieck ABC wird durch den Mittelpunkt M der Seite [AB] die Senkrechte zur Winkelhalbierenden w_γ gezeichnet. Sie schneidet die Gerade AC im Punkt X und die Gerade BC im Punkt Y.
Beweise: $\overline{AX} = \overline{BY}$.

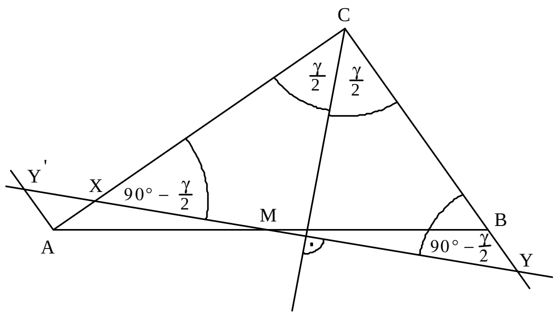
Vorbemerkung:

Wenn das Dreieck ABC gleichschenklig ist mit der Basis [AB], dann ist die Mittelsenkrechte von [AB] gleichzeitig auch die Winkelhalbierende. Die Orthogonale zur Winkelhalbierenden durch den Mittelpunkt der Strecke [AB] ist dann die Gerade AB. Die Punkte X und Y stimmen in diesem Fall mit dem Punkt A bzw. B überein. Die Strecken [AX] und [BY] haben dann die Länge 0.

Bei den folgenden Lösungen wird vorausgesetzt, dass im Dreieck ABC die Seiten [AC] und [BC] nicht gleich lang sind. Außerdem wird angenommen, dass [AC] die längere Seite sei.

1. Lösung

Im Dreieck ABC wird die Halbierende des Winkels ACB gezeichnet. Die Orthogonale zu dieser Winkelhalbierenden durch den Mittelpunkt M der Strecke [AB] schneidet die Geraden AC und BC in den Punkten X und Y.



Das Dreieck MYB wird am Punkt M gespiegelt. Dabei fällt B auf A, M bleibt fest, der Bildpunkt von Y sei Y'. Y' liegt auf der Geraden XY.

Auf Grund der Abbildungseigenschaften der Punktspiegelung gilt:

(1) $\overline{BY} = \overline{AY'}$

(2) $\angle BYM = \angle AY'M = 90° - \dfrac{\gamma}{2}$

Die Winkel MXC und Y'XA sind Scheitelwinkel und deshalb gleich groß.

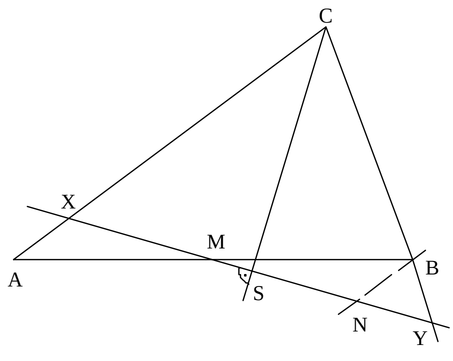
Es gilt also auch $\angle MXC = \angle Y'XA = 90° - \dfrac{\gamma}{2}$.

Wegen der übereinstimmenden Größe der Winkel Y'XA und AY'X ist das Dreieck XY'A gleichschenklig mit der Basis [XY'].

Die Schenkel [AX] und [AY'] sind gleich lang. Wegen Eigenschaft (1) gilt also $\overline{AX} = \overline{AY'} = \overline{BY}$.

2. Lösung

S sei der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_γ mit der Geraden XY.



Das Dreieck XSC ist nach dem Kongruenzsatz WSW kongruent zum Dreieck YCS, da

$\overline{CS} = \overline{CS}$

$\angle XCS = \angle SCY = \gamma/2$ und

$\angle CSX = \angle YSC = 90^\circ$ gilt.

Daher ist auch $\angle YXC = \angle CYX$ (*).

Die Parallele (Hilfslinie) zu AC durch B schneidet XY in N.

Nach dem Kongruenzsatz WSW ist das Dreieck AMX kongruent zum Dreieck BMN, da

$\overline{MA} = \overline{MB}$ (nach Voraussetzung)

$\angle XMA = \angle NMB$ (Scheitelwinkel)

$\angle MAX = \angle MBN$ (Wechselwinkel). Daher gilt: $\overline{AX} = \overline{BN}$ (**).

Wegen der Parallelität der Geraden NB und AC ist $\angle YNB = \angle YXC$ (Stufenwinkel).

Wegen (*) gilt $\angle$ YXC = $\angle$ CYX und damit auch $\angle$ YNB = $\angle$ BYN, also ist das Dreieck NYB gleichschenklig mit Basis [NY]. Daher gilt $\overline{BN} = \overline{BY}$ und wegen (**) auch $\overline{AX} = \overline{BY}$.

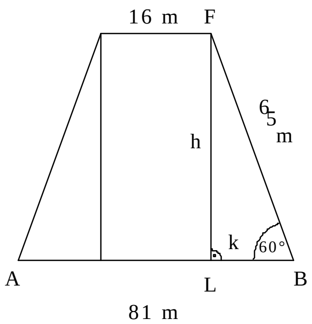
Aufgabe 3

Eine Azteken-Pyramide hat die Form eines Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grund- und Deckfläche. Die Grundfläche besitzt eine Kantenlänge von 81 m, die Deckfläche eine Kantenlänge von 16 m. Die Seitenkanten sind 65 m lang. Eine Außentreppe für Touristen führt zur Deckfläche des Pyramidenstumpfs. Sie beginnt an einer Ecke der Grundfläche und überquert jede Seitenfläche genau einmal, bevor sie an einer Ecke der Deckfläche endet. Dabei ist ihre Steigung überall gleich.

Welche Entfernungen haben die Punkte, an denen die Treppe die Kanten trifft, von den zugehörigen Eckpunkten der Grundfläche?

1. Lösung

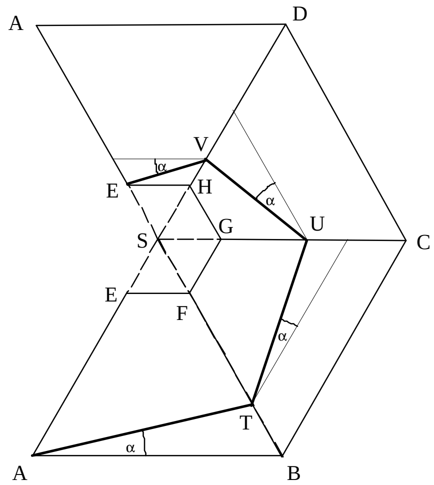
Die Seitenflächen des Pyramidenstumpfs sind gleichschenklige Trapeze. Die parallelen Seiten haben die Längen 81 m bzw. 16 m, die Schenkel haben die Länge 65 m. Die Trapezhöhe sei h. Dann ergibt sich für die Länge k:



k = ½ (81 m - 16 m) = 32,5 m.

Folglich hat das rechtwinklige Dreieck LBF eine Kathete, die halb so lang ist wie die Hypotenuse. Der von dieser Kathete und der Hypotenuse eingeschlossene Winkel hat demnach die Weite 60^0. Die Seitenflächen des Pyramidenstumpfs sind also gleichschenklige Trapeze mit Basiswinkeln der Weite 60^0.

Vier dieser Trapeze bilden den Mantel des Pyramidenstumpfs. Wegen der Basiswinkel mit der Weite 60^0 schneiden sich die Verlängerungen der Trapezschenkel alle in einem Punkt S ebenfalls unter Winkeln der Weite 60^0. Die Dreiecke EFS, FGS, GHS und HES sind demnach gleichseitig mit den Seitenlängen $\overline{EF}$ = 16 m.



Die Treppe beginne in Punkt A und sei mit einem Winkel der Weite α gegen die Grundkante [AB] ansteigend. Sie trifft die Kante [BF] im Punkt T. Von T aus wird die Treppe unter dem Winkel derselben Weite gegenüber der Grundkante [BC] fortgesetzt und erreicht die Kante [CG] im Punkt U. Entsprechend setzt man die Treppe über die dritte und vierte Seitenfläche des Pyramidenstumpfs fort. Sie trifft die Kante [DH] im Punkt V und die Kante [AE] nach Voraussetzung im Punkt E der Deckfläche.

Die Dreiecke ATS, TUS, UVS und VES sind alle ähnlich, denn sie haben je einen Winkel der Weite 60^0 bei S und je einen Winkel der Weite 60^0 - α bei A bzw. T bzw. U bzw. V. Folglich gilt:

$$\overline{AS} : \overline{ST} = \overline{ST} : \overline{SU} \text{ und } \overline{ST} : \overline{SU} = \overline{SU} : \overline{SV} \text{ und } \overline{SU} : \overline{SV} = \overline{SV} : \overline{SE}.$$

Mit $\overline{ST}$ = x m, $\overline{SU}$ = y m und $\overline{SV}$ = z m erhält man daraus:

(1) 81 : x = x : y

(2) x : y = y : z

(3) y : z = z : 16

Gleichung (3) läßt sich umformen zu (3’) $y = \dfrac{z^2}{16}$.

Setzt man (3') in (2) ein, so ergibt sich (2') $x = \frac{y^2}{z} = \frac{z^3}{256}$.

Gleichung (1) läßt sich umformen zu (1') $81y = x^2$.

Setzt man (2') und (3') in (1') ein, erhält man $81\ \frac{z^2}{16} = \frac{z^6}{256^2}$.

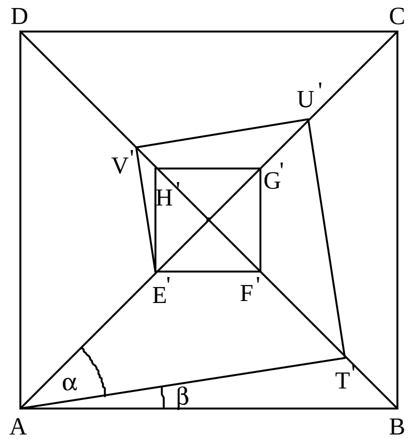
Dies läßt sich wie folgt umformen: $z^4 = 16 \cdot 81 \cdot 256 \quad \Rightarrow \quad z = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Daraus ergibt sich schließlich, dass y = 36 und x = 54.

Demzufolge ist $\overline{BT} = \overline{SB} - x\,\text{m} = 27\,\text{m}$, $\overline{CU} = \overline{SC} - y\,\text{m} = 45\,\text{m}$ und $\overline{DV} = \overline{SD} - z\,\text{m} = 57\,\text{m}$.

2. Lösung

Die Treppe beginnt in einer Ecke A der Grundfläche ABCD und endet nach Aufgabenstellung im Punkt E der Deckfläche EFGH. Die Seitenkanten [AE], [BF], [CG] und [DH] des Pyramiden-stumpfes schneiden sich in der Spitze S der Gesamtpyramide. [BF] wird von der Treppe in T, [CG] in U und [DH] in V geschnitten. In der Figur ist der Sachverhalt im Grundriss dargestellt. Von den über der Grundebene liegenden Punkten wie E, F usw. hat man die Bilder E', F' usw.



Je kleiner der Winkel α = ∠T'AS' ist, desto größer ist der Winkel β = ∠BAT', desto höher liegt T über der Grundebene und desto kürzer ist der horizontale Abstand von A zu T', desto steiler verläuft also die Treppe.

Entsprechendes gilt für die Wegabschnitte auf den drei anderen Seitenflächen der Pyramide. Wegen der Symmetrie der Pyramide ist muss also ∠U'T'S' = ∠V'U'S' = ∠E'V'S' = α sein.

Da die Diagonalen im Quadrat zueinander orthogonal sind, sind auch die aufeinanderfolgenden Abschnitte der Treppe zueinander orthogonal.

Nach dem Höhensatz gilt mit $t = \overline{S'T'}$, $u = \overline{S'U'}$ und $v = \overline{S'V'}$ das Gleichungssystem

(1) $t^2 = \overline{S'A} \cdot u$

(2) $u^2 = t \cdot v$

(3) $v^2 = u \cdot \overline{S'E'}$

Quadriert man Gleichung (1) und setzt (2) ein, so ergibt sich

$$t^3 = \overline{S'A}^2 \cdot v.$$

Löst man Gleichung (1) nach u auf und setzt in (3) ein, so erhält man

$$v^2 = \frac{t^2}{\overline{S'A}} \cdot \overline{S'E'}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen eliminiert man v und erhält

$$t = \sqrt[4]{\overline{S'A}^3 \cdot \overline{S'E'}}$$

und daraus mit $\overline{S'A} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 81\,\text{m}$ und $\overline{S'E'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 16\,\text{m}$ den Wert $t = 27\sqrt{2}\ \text{m}$.

Mit den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich ferner $u = 18\sqrt{2}\ \text{m}$ und $v = 12\sqrt{2}\ \text{m}$.

Daraus erhält man $\overline{BT'} = \overline{S'B} - t = \overline{S'A} - t = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 27\,m$

und entsprechend $\overline{CU'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 45\,m$ sowie $\overline{DV'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 57\,m$.

Um nun die gesuchten Abstände auf den Seitenkanten des Pyramidenstumpfes zu finden, berechnen wir seine Höhe:

$\overline{AE'}^2 + \overline{E'E}^2 = \overline{AE}^2$ mit $\overline{AE'} = \frac{81m - 16m}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 65m$, also $\overline{EE'} = \overline{AE'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 65m$

Das Dreieck AE'E ist also gleichschenklig-rechtwinklig. Seine Hypotenuse ist $\sqrt{2}$ mal so lang wie seine Katheten. Dasselbe gilt für die Dreiecke BT'T, CU'U und DV'V.
Daraus folgt das Ergebnis:

$\overline{BT} = \sqrt{2} \cdot \overline{BT'} = 27\,m$, $\overline{CU} = 45\,m$ und $\overline{DV} = 57\,m$.

Aufgabe 4

Zeige: Eine Primzahl p ist genau dann die Differenz von zwei dritten Potenzen ganzer Zahlen, wenn p = 2 ist oder wenn (p-1)/6 als Summe 1 + 2 + 3 + ... + n (n $\in$ N) geschrieben werden kann.

Vorbemerkung: Es sind zwei Aussagen zu zeigen:

"$\Rightarrow$" Wenn eine Primzahl *p* Differenz von zwei dritten Potenzen ganzer Zahlen ist, dann gilt $p = 2$ oder $\frac{p-1}{6}$ kann als Summe $1+2+3+....+n$ $(n \in N)$ geschrieben werden.

"$\Leftarrow$" Wenn für eine Primzahl *p* gilt *p=2* oder wenn $\frac{p-1}{6}$ als Summe $1+2+3+....+n$ $(n \in N)$ geschrieben werden kann, ist *p* die Differenz von zwei dritten Potenzen ganzer Zahlen.

1. Lösung

$\boxed{„\Rightarrow“ :}$ Die Primzahl *p* sei Differenz zweier Kubikzahlen, also $p = a^3 - b^3$ für ganze Zahlen *a* und *b*.
Da *p* eine Primzahl ist, kann weder *a* noch *b* gleich 0 sein.
Wäre *a* < 0, so müsste auch *b* < 0 sein, da sonst $a^3 - b^3 < 0$ wäre.

Dann ist aber $p = a^3 - b^3 = (-b)^3 - (-a)^3$, und somit ist *p* eine Differenz von **positiven** Kubikzahlen. Wir können also annehmen, dass *a* > 0 ist. Es bleiben noch zwei Möglichkeiten: *b* > 0 bzw. *b* < 0.

Wenn *b* < 0, so kann man *c* = – *b* setzen, damit ergibt sich $p = a^3 + c^3$. Also ist *p* die *Summe* von zwei positiven Kubikzahlen.
Wenn *b* > 0 ist, so *p* die *Differenz* von zwei positiven Kubikzahlen.
Somit haben wir die beiden folgenden Fälle:

Fall 1: $p = a^3 + c^3$ ist ***Summe*** von zwei positiven Kubikzahlen. Für *p* ergibt sich hier die Zerlegung $p = (a + c)(a^2 - ac + c^2)$. Weil *p* eine Primzahl ist, muss *a* + *c* = 1 oder *a* + *c* = *p* sein.

- Falls *a* + *c* = 1, dann müsste *a* oder *c* gleich 0 sein, ein Widerspruch.
- Falls *a* + *c* = *p*, dann muss in der Zerlegung $p = (a + c)(a^2 - ac + c^2)$ der Faktor $(a^2 - ac + c^2)$ gleich 1 sein. Aus $1 = a^2 - ac + c^2 > a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2$ folgt jetzt $(a - c)^2 = 0$, also *a* = *c*. Somit ist $p = a + c = 2a$ eine gerade Primzahl, folglich *p* = 2.

Fall 2: $p = a^3 - b^3$ ist ***Differenz*** von zwei positiven Kubikzahlen. Dann ist $p = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ und somit *a* – *b* = 1 oder *a* – *b* = *p*.

- Falls *a* - *b* = 1, dann ist $p = (b + 1)^3 - b^3 = 3b(b + 1) + 1$, also $\frac{p-1}{6} = \frac{b(b+1)}{2} = 1 + \ldots + b$.
- Falls *a* - *b* = *p*, dann ist $(a^2 + ab + b^2) = 1$. Es müsste nun *a* oder *b* gleich 0 sein, ein Widerspruch.

$\boxed{„\Leftarrow“ :}$ Beweis der Rückrichtung

- Für die Primzahl p gebe es eine Zahl n mit $\frac{p-1}{6} = 1 + \ldots + n$. Dann ist $\frac{p-1}{6} = \frac{n(n+1)}{2}$, also ist $p = 3n(n+1) + 1 = (n+1)^3 - n^3$ eine Differenz von zwei Kubikzahlen.
- Wenn schließlich $p = 2$, so ist $p = 1^3 - (-1)^3$, also ebenfalls eine Differenz von zwei dritten Potenzen.

Variante für Fall 2:

Erkennt man die Zerlegung $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ nicht, so kann man in diesem Fall dennoch wie folgt zu einer Lösung der Aufgabe kommen: Da $a \geq b$ gibt es $k \geq 0$, so dass $a = b + k$.
Damit gilt $a^3 - b^3 = (b+k)^3 - b^3 = 3bk^2 + 3b^2k + k^3 = k(3bk + 3b^2 + k^2)$.
Da $p = a^3 - b^3 = k(3bk + 3b^2 + k^2)$ eine Primzahl ist, gibt es wieder zwei Möglichkeiten:
$k = 1$ oder $k = p$.

- Falls $k = 1$, dann ist $a = b + 1$ und $p = a^3 - b^3 = 3b(b+1) + 1$, somit $\frac{p-1}{6} = \frac{b(b+1)}{2} = 1 + \ldots + b$.
- Falls $k = p$, dann muss der zweite Faktor $3bk + 3b^2 + k^2$ gleich 1 sein. Da $b \geq 0$ und $k \geq 0$, folgt $k = 1$ und $b = 0$. Somit muss $p = 1$ sein und ist keine Primzahl.

2. Lösung

$\boxed{„\Rightarrow“ :}$ Es sei $p = a^3 - b^3$ mit **ganzen** Zahlen a und b. Aus $a^3 - b^3 > 0$ folgt $a^3 > b^3$, dies ist äquivalent zu $a > b$.
Es ist $p = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Da $a > b$ ist der erste Faktor und damit auch der zweite positiv.
Da p eine Primzahl ist, muss einer der Faktoren also 1 sein.

<u>1. Fall:</u> $(a-b) = 1$ Damit ist $a = b+1$ und $p = (b+1)^2 + (b+1)b + b^2 = 3b^2 + 3b + 1$**,** somit ist $\frac{p-1}{6} = \frac{3b^2+3b}{6} = \frac{b(b+1)}{2}$. Nach der Gaußschen Summenformel stimmt für $b > 0$ der letzte Term mit der Summe der ersten b **natürlichen** Zahlen $1+2+3+....+b$ überein. Für $b < -1$ ist $\frac{b(b+1)}{2} = \frac{(-b)(-b-1)}{2} = 1+2+....+(-b-1)$ die geforderte Summe aus **natürlichen** Zahlen. Die Fälle $b = 0$ und $b = -1$ führen beide auf $p = 1$, welches im Widerspruch zur Primzahleigenschaft steht.

<u>2. Fall:</u> $(a^2 + ab + b^2) = 1$ Fasst man dies als quadratische Gleichung für die ganze Zahl b auf, so ergibt die Gleichung $b^2 + ab + a^2 - 1 = 0$ die Diskriminante $D = a^2 - 4(a^2 - 1) = 4 - 3a^2$.
Damit $D \geq 0$ erfüllt ist, muss $a \in \{-1, 0, 1\}$ gelten.

- Für $a = -1$ ist $b^2 - b = 0$ und damit $b = 1$ oder $b = 0$ welche beide nicht mit $a > b$ vereinbar sind.
- Für $a = 0$ ist $b^2 - 1 = 0$ und damit $b = 1$ oder $b = -1$, woraus sich mit $p = 0^3 - 1^3 = -1$ bzw. $p = 0^3 - (-1)^3 = 1$ keine Primzahlen ergeben.
- Nur für $a = 1$ ergibt sich bei einer der beiden Lösungen von $b^2 + b = 0$,also $b = 0$ oder $b = -1$, eine Primzahl: $p = 1^3 - 0^3 = 1$ ist keine Primzahl, aber $p = 1^3 - (-1)^3 = 2$ ist die angegebene Primzahl.

$\boxed{„\Leftarrow“ :}$(siehe auch 1. Lösung) Für die Primzahl p gebe es eine Zahl n mit $\frac{p-1}{6} = 1 + \ldots + n$. Dann ist $\frac{p-1}{6} = \frac{n(n+1)}{2}$, also ist $p = 3n(n+1) + 1 = (n+1)^3 - n^3$ eine Differenz von zwei Kubikzahlen.
Wenn schließlich $p = 2$, so ist $p = 1^3 - (-1)^3$, also ebenfalls eine Differenz von zwei dritten Potenzen.