2013

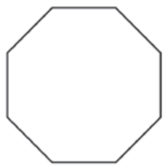
16. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

MATHEMATIK

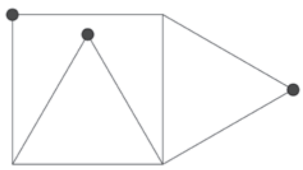
Einzelheiten zur Teilnahme findest Du auf der Rückseite oder unter **www.lwmb.de**.
Du kannst Lösungen zu maximal vier Aufgaben einsenden (10. Klasse nicht Aufgabe 1).
Einsendeschluss ist der **07.11.2013**.

Du besuchst eine Realschule oder ein Gymnasium bis einschließlich Klassenstufe 10.
Du fühlst dich von mathematischen Aufgaben herausgefordert und
Du möchtest deine Fähigkeiten testen und erweitern.
Dann ist dieser Wettbewerb des bayrischen Kultusministeriums genau das Richtige für dich.

Aufgabe 1
Wolfgang will die Zahlen 1, 2, 3, ..., 8 an die Ecken eines Achtecks schreiben und jede Zahl einmal verwenden. Dabei soll die Summe von je zwei Zahlen, die an benachbarten Ecken stehen, eine Primzahl sein.
Welche Möglichkeiten hat Wolfgang, das Achteck so zu beschriften?

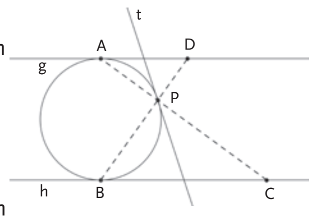


Aufgabe 2
Die nebenstehende Figur besteht aus einem Quadrat und zwei gleichseitigen Dreiecken.
Liegen die drei fett markierten Punkte auf einer Geraden?



Aufgabe 3
Josef addiert zwei zufällig ausgewählte dreistellige Zahlen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es dabei mindestens einen Übertrag?

Aufgabe 4
Ein Kreis berührt die Parallelen g und h in den Punkten A und B. Zwei Verbindungsstrecken [AC] und [BD] der Parallelen schneiden sich auf dem Kreis im Punkt P.
Zeige: Die Kreistangente durch P halbiert die Strecken [AD] und [BC].



Aufgabe 5
Die Diagonalen eines konvexen Vierecks zerlegen dieses in vier Teildreiecke. Die Schwerpunkte dieser Teildreiecke bilden ein neues Viereck.
Welcher Anteil der ursprünglichen Vierecksfläche wird durch das neue Viereck überdeckt?

Aufgabe 6
Zeige: Bildet man von fünf verschiedenen natürlichen Zahlen alle möglichen positiven Differenzen je zweier dieser Zahlen, so ist das Produkt aller Differenzen durch 288 teilbar.

Klar, da mache ich mit! Bitte **lesbar** ausfüllen und mit den Aufgaben einsenden.
Bei Gruppenarbeiten für jedes Mitglied einen Abschnitt beilegen.

Vorname: ____________ **Name:** ____________ **Geschlecht:** ☐ m ☐ w

Jahrgangsstufe: ______ **Name der Schule:** ____________

Schulort: ____________

Gruppenarbeit: ☐ ja ☐ nein

Nummern der bearbeiteten Aufgaben (höchstens vier!)

1	2	3	4	5	6

Ich bestätige hiermit, alle Aufgaben **selbständig** bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst zu haben.

Unterschrift: ____________

Teilnahmebedingungen und Hinweise

- Teilnahmeberechtigt sind alle Schülerinnen und Schüler aus Realschulen und Gymnasien bis Klassenstufe 10 einschließlich.
- Für den Wettbewerb werden die Lösungen von **höchstens** vier der sechs Aufgaben gewertet. Bis einschließlich Klassenstufe 9 können diese vier Aufgaben beliebig ausgewählt werden. Für Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Klassenstufe 10 werden nur Lösungen der Aufgaben 2 bis 6 gewertet.
- In der ersten Runde ist **Gruppenarbeit** zugelassen. Eine Gruppe kann aus bis zu drei Mitgliedern bestehen. Besucht mindestens ein Gruppenmitglied die Klassenstufe 10, so werden nur Lösungen zu den Aufgaben 2 bis 6 gewertet.
- Bei jeder Aufgabe sind vier Punkte erreichbar. Jeder Teilnehmer mit mindestens acht Punkten erhält eine **Urkunde**. Darüber hinaus werden erste, zweite und dritte Preise vergeben. Einzelteilnehmer mit Preis erhalten einen **Buchpreis** oder **-gutschein**. Für einen ersten Preis sind mindestens 14 Punkte erforderlich. **Alle Teilnehmer** erhalten eine kleine **Anerkennung** für die Teilnahme.
- Einzelteilnehmer und Gruppenmitglieder, deren Lösungen mit einem ersten oder zweiten Preis bewertet wurden, können sich außerdem durch die Teilnahme an der zweiten Runde für ein mehrtägiges mathematisches Seminar qualifizieren. In der zweiten Runde ist keine Gruppenarbeit mehr zugelassen.
- Zu diesen Seminaren, die in den vergangenen Jahren bei den Teilnehmern ein sehr positives Echo gefunden haben, werden 60 Jugendliche eingeladen.
- Für die Lösung jeder Aufgabe sind gesonderte **DIN A4-Blätter** zu verwenden, die jeweils mit dem Namen zu versehen sind und nur einseitig beschrieben und **nicht gefaltet** sein sollen. Bitte alle Blätter in Reihenfolge der Aufgaben oben links zusammenheften.
- An jede Einsendung muss oben links der Rückmeldezettel des Aufgabenblattes angeheftet werden. Er muss mit der unterschriebenen Erklärung versehen sein, dass alle Aufgaben selbständig bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst wurden. Die verwendete Literatur ist anzugeben.
- Zu einer vollständig richtigen Lösung gehört insbesondere, dass alle wesentlichen Zwischenschritte aufgeführt und begründet sind. Die Angabe eines Zahlenwertes alleine oder von Beispielen genügt nicht als Lösung. Werden innerhalb eines Lösungswegs Eigenschaften verwendet, die aus dem Unterricht bekannt sind, so ist deren Nachweis nicht erforderlich. Auf die verwendete Eigenschaft muss jedoch bei der Lösung hingewiesen werden.
- Unübersichtliche oder unleserliche Lösungen können von der Korrektur ausgeschlossen werden.
- Die Korrekturentscheidung ist endgültig und unterliegt nicht dem Rechtsweg.
- Nach Abschluss der Korrektur (Ende Dezember) erhält der Kontaktlehrer bzw. Fachbetreuer Mathematik jeder teilnehmenden Schule Nachricht über die Ergebnisse der Teilnehmer der Schule.
- Die Aufgaben der zweiten Runde werden bereits im Dezember über die Kontaktlehrer an die teilnahmeberechtigten Schüler versandt.
- Eine Rücksendung der korrigierten Arbeiten ist aus organisatorischen Gründen nicht möglich. Es empfiehlt sich deshalb, **eine Kopie anzufertigen**, um die eigenen Lösungen mit den Anmerkungen zu Korrektur und den Lösungsbeispielen vergleichen zu können.
- Die ausreichend frankierten Zuschriften **(Umschlag für DIN A4 mit Porto 1,45 €)** sind zu richten an:

  Albrecht Kliem
  Landeswettbewerb Mathematik
  Wirsberg-Gymnasium
  Am Pleidenturm 16
  97070 Würzburg

- Einsendeschluss ist der **07.11.2013** (Datum des Poststempels).

- Übungsmaterial: Aufgaben und Lösungen vergangener Wettbewerbsjahre können unter www.lwmb.de abgerufen werden.

Lösungsbeispiele aus dem vergangenen Jahr

Aufgabe 1

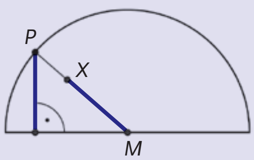
An der Tafel stehen die Zahlen 20 und 12. Paul will eine weitere natürliche Zahl hinzufügen, so dass jede dieser drei Zahlen das Produkt der beiden anderen ohne Rest teilt. Bestimme die kleinste Zahl, die Paul an die Tafel schreiben kann.

Lösung:
Die gesuchte Zahl ist **15**.

Wenn eine natürliche Zahl n die Bedingung der Aufgabe erfüllt, dann muss $12 \cdot n$ ohne Rest durch 20 teilbar sein. Da 20 durch 5 teilbar ist, muss $12 \cdot n$ auch durch 5 teilbar sein und weil 12 und 5 teilerfremd sind, muss dann n selbst durch 5 teilbar sein. Ebenso muss für eine Zahl n, die die Bedingung der Aufgabe erfüllt, auch $20 \cdot n$ durch 12 und damit auch durch 3 ohne Rest teilbar sein. Weil aber 20 und 3 teilerfremd sind, muss dann n selbst durch 3 teilbar sein. Die kleinste natürliche Zahl n, die sowohl durch 5 als auch durch 3 teilbar ist, ist $n = 15$. Tatsächlich sind für $n = 15$ auch alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt:
15 teilt $20 \cdot 12 = 240\ (= 16 \cdot 15)$,
20 teilt $15 \cdot 12 = 180\ (= 9 \cdot 20)$ und
12 teilt $15 \cdot 20 = 300\ (= 25 \cdot 12)$.

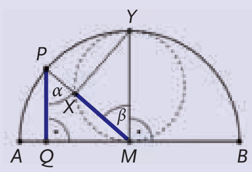
Aufgabe 4

Der Punkt P liegt auf einem Halbkreis mit Mittelpunkt M. Der Punkt X auf dem Radius $[MP]$ hat von M den gleichen Abstand wie P vom Durchmesser des Halbkreises. Auf welcher Kurve bewegt sich X, wenn P den Halbkreis durchläuft?



Lösung:
Wir bezeichnen die Endpunkte des Durchmessers mit A und B und mit Y den Endpunkt des Radius $[MY]$, der senkrecht auf $[AB]$ steht. Dann bewegt sich X auf dem Kreis mit Durchmesser $[MY]$.

In den Spezialfällen $P = A$, $P = Y$ und $P = B$ ergeben sich für X die Punkte $X = M$, $X = Y$ bzw. $X = M$. Hier liegt X also tatsächlich auf dem genannten Kreis. Im Folgenden sehen wir von diesen Spezialfällen ab, so dass alle genannten Dreiecke und Winkel auch wirklich existieren. Außerdem können wir wegen der Spiegelsymmetrie der Figur davon ausgehen, dass P auf dem Bogen zwischen A und Y des Halbkreises liegt. Zusätzlich sei Q der Lotfußpunkt von P auf $[AB]$. Die beiden Dreiecke PQM und MYX sind kongruent nach Kongruenzsatz SWS, denn



$PQ = MX$ nach Voraussetzung,
$PM = MY$ als Radien des Halbkreises und
$\alpha = \beta$ als Wechselwinkel an den Parallelen PQ und MY (beide stehen senkrecht auf AB). Deswegen ist, unabhängig von der Lage von P, der Winkel $\angle MXY = \angle MQP = 90°$. Nach der Umkehrung des Satzes des Thales liegt X damit auf dem Kreis mit Durchmesser $[MY]$.

Tatsächlich kommt auch jeder Punkt des Kreises mit Durchmesser $[MY]$ als Punkt X vor, das heißt dieser Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte X, wenn P den Halbkreis durchläuft. Um dies einzusehen, muss man zu gegebenem X auf dem Kreis mit Durchmesser $[MY]$ einen Punkt P finden, der entsprechend der Konstruktion in der Aufgabe zu dem Punkt X führt. Dies gelingt aber einfach, indem man den Strahl $[MX$ (falls $M \neq X$) mit dem Halbkreis schneidet und diesen Schnittpunkt P nennt. Nach Satz des Thales ist dann das Dreieck MXY rechtwinklig und kongruent zum Dreieck PQM, weswegen tatsächlich $PQ = MX$ gilt. Im Falle $X = M$ wählt man zum Beispiel $P = A$.