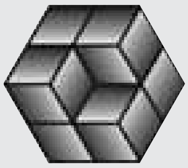
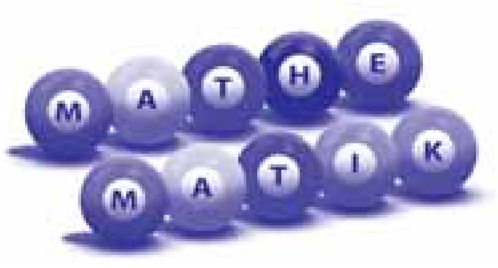


15. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

2012

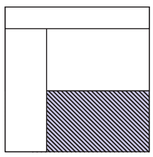


Einzelheiten zur Teilnahme findest Du auf der Rückseite oder unter **www.lwmb.de**. Du kannst Lösungen zu maximal vier Aufgaben einsenden (10. Klasse nicht A1).
Einsendeschluss ist der **8. 11. 2012**.

Du besuchst eine Realschule oder ein Gymnasium bis einschließlich Klassenstufe 10.
Du fühlst dich von mathematischen Aufgaben herausgefordert und
Du möchtest deine Fähigkeiten testen und erweitern.
Dann ist dieser Wettbewerb des bayrischen Kultusministeriums genau das Richtige für dich.

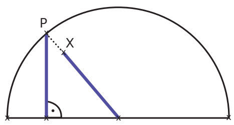
Aufgabe 1
An der Tafel stehen die Zahlen 20 und 12.
Paul will eine weitere natürliche Zahl hinzufügen, so dass jede dieser drei Zahlen das Produkt der beiden anderen ohne Rest teilt.
Bestimme die kleinste Zahl, die Paul an die Tafel schreiben kann.

Aufgabe 2
Im abgebildeten Quadrat haben die vier Rechtecke den gleichen Umfang.
Wie groß ist der Anteil der Fläche des schraffierten Rechtecks an der Fläche des Quadrats?



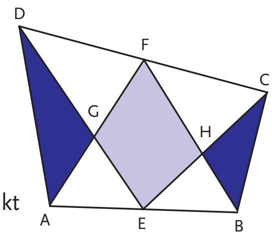
Aufgabe 3
Bestimme die größte Zahl, die kleiner als 1 ist und sich als Summe von drei Stammbrüchen darstellen lässt.
Hinweis: Ein Stammbruch ist ein Bruch mit Zähler 1 und einer natürlichen Zahl als Nenner.

Aufgabe 4
Der Punkt P liegt auf einem Halbkreis mit Mittelpunkt M.
Der Punkt X auf dem Radius MP hat von M den gleichen Abstand wie P vom Durchmesser des Halbkreises.
Auf welcher Kurve bewegt sich X, wenn P den Halbkreis durchläuft?



Aufgabe 5
Petra legt 25 Karten auf den Tisch, die mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., 25 beschriftet sind.
Wie viele Karten kann sie höchstens auswählen, so dass auf diesen Karten keine zwei Zahlen stehen, deren Produkt eine Quadratzahl ist?

Aufgabe 6
In einem konvexen Viereck ABCD sind E und F die Mittelpunkte der Seiten [AB] und [CD]. Außerdem ist G der Schnittpunkt der Strecken [AF] und [ED] und H der Schnittpunkt der Strecken [EC] und [BF].



Zeige: Die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AGD und BCH ist so groß wie der Flächeninhalt des Vierecks EHFG.

Hinweis: Ein Viereck heißt konvex, wenn alle Innenwinkel kleiner als 180° sind.

Der Landeswettbewerb Mathematik Bayern wird gefördert von

Hauptsponsor
Schutz und Sicherheit im Zeichen der Burg
NÜRNBERGER
VERSICHERUNGSGRUPPE
seit 1884

Klar, da mache ich mit! Bitte **lesbar** ausfüllen und mit den Aufgaben einsenden.
Bei Gruppenarbeiten für jedes Mitglied einen Abschnitt beilegen.

Vorname: ______________ **Name:** ______________ **Geschlecht:** ☐ m ☐ w

Jahrgangsstufe: ______ **Name der Schule:** ______________

Schulort: ______________

Gruppenarbeit: ☐ ja ☐ nein

Nummern der bearbeiteten Aufgaben (höchstens vier!)

1	2	3	4	5	6

Ich bestätige hiermit, alle Aufgaben **selbständig** bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst zu haben.

Unterschrift: ______________

Teilnahmebedingungen und Hinweise

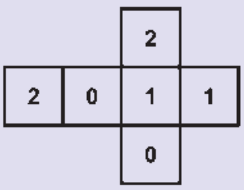
- Teilnahmeberechtigt sind alle Schülerinnen und Schüler aus Realschulen und Gymnasien bis Klassenstufe 10 einschließlich.
- Für den Wettbewerb werden die Lösungen von **höchstens** vier der sechs Aufgaben gewertet. Bis einschließlich Klassenstufe 9 können diese vier Aufgaben beliebig ausgewählt werden. Für Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Klassenstufe 10 werden nur Lösungen der Aufgaben 2 bis 6 gewertet.
- In der ersten Runde ist **Gruppenarbeit** zugelassen. Eine Gruppe kann aus bis zu drei Mitgliedern bestehen. Besucht mindestens ein Gruppenmitglied die Klassenstufe 10, so werden nur Lösungen zu den Aufgaben 2 bis 6 gewertet.
- Bei jeder Aufgabe sind vier Punkte erreichbar. Jeder Teilnehmer mit mindestens acht Punkten erhält eine **Urkunde**. Darüber hinaus werden erste, zweite und dritte Preise vergeben. Einzelteilnehmer mit Preis erhalten einen **Buchpreis** oder **-gutschein**. Für einen ersten Preis sind mindestens 14 Punkte erforderlich. **Alle Teilnehmer** erhalten eine kleine **Anerkennung** für die Teilnahme.
- Einzelteilnehmer und Gruppenmitglieder, deren Lösungen mit einem ersten oder zweiten Preis bewertet wurden, können sich außerdem durch die Teilnahme an der zweiten Runde für ein mehrtägiges mathematisches Seminar qualifizieren. In der zweiten Runde ist keine Gruppenarbeit mehr zugelassen.
- Zu diesen Seminaren, die in den vergangenen Jahren bei den Teilnehmern ein sehr positives Echo gefunden haben, werden 60 Jugendliche eingeladen.
- Für die Lösung jeder Aufgabe sind gesonderte **DIN A4-Blätter** zu verwenden, die jeweils mit dem Namen zu versehen sind und nur einseitig beschrieben und **nicht gefaltet** sein sollen. Bitte alle Blätter in Reihenfolge der Aufgaben oben links zusammenheften.
- An jede Einsendung muss oben links der Rückmeldezettel des Aufgabenblattes angeheftet werden. Er muss mit der unterschriebenen Erklärung versehen sein, dass alle Aufgaben selbständig bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst wurden. Die verwendete Literatur ist anzugeben.
- Zu einer vollständig richtigen Lösung gehört insbesondere, dass alle wesentlichen Zwischenschritte aufgeführt und begründet sind. Die Angabe eines Zahlenwertes alleine oder von Beispielen genügt nicht als Lösung. Werden innerhalb eines Lösungswegs Eigenschaften verwendet, die aus dem Unterricht bekannt sind, so ist deren Nachweis nicht erforderlich. Auf die verwendete Eigenschaft muss jedoch bei der Lösung hingewiesen werden.
- Unübersichtliche oder unleserliche Lösungen können von der Korrektur ausgeschlossen werden.
- Die Korrekturentscheidung ist endgültig und unterliegt nicht dem Rechtsweg.
- Nach Abschluss der Korrektur (Ende Dezember) erhält der Kontaktlehrer bzw. Fachbetreuer Mathematik jeder teilnehmenden Schule Nachricht über die Ergebnisse der Teilnehmer der Schule.
- Die Aufgaben der zweiten Runde werden bereits im Dezember über die Kontaktlehrer an die teilnahmeberechtigten Schüler versandt.
- Eine Rücksendung der korrigierten Arbeiten ist aus organisatorischen Gründen nicht möglich. Es empfiehlt sich deshalb, **eine Kopie anzufertigen**, um die eigenen Lösungen mit den Anmerkungen zu Korrektur und den Lösungsbeispielen vergleichen zu können.
- Die ausreichend frankierten Zuschriften **(Umschlag für DIN A4 mit Porto 1,45 €)** sind zu richten an:

  Albrecht Kliem
  Landeswettbewerb Mathematik
  Wirsberg-Gymnasium
  Am Pleidenturm 16
  97070 Würzburg
- Einsendeschluss ist der **8. 11. 2012**
  (Datum des Poststempels).
- Übungsmaterial: Aufgaben und Lösungen vergangener Wettbewerbsjahre können unter www.lwmb.de abgerufen werden.

Lösungsbeispiele aus dem vergangenen Jahr

Aufgabe 1

David wirft einen besonderen Würfel und schreibt jeweils die oben liegende Zahl auf. Die Abbildung zeigt ein Netz seines Würfels.



Wie oft muss David mindestens würfeln, damit unter den aufgeschriebenen Zahlen ganz sicher drei Zahlen sind, deren Summe durch 3 teilbar ist?

Lösung:
David muss mindestens **fünf** Mal würfeln.

Beweis:
Es kann nur eine der beiden folgenden Situationen eintreten:

<u>Situation A:</u> Unter Davids aufgeschriebenen Zahlen kommt eine Zahl dreimal vor. Wir können dann die Summe dieser drei Zahlen bilden, also eine der folgenden Summen: $0 + 0 + 0 = 0$ oder $1 + 1 + 1 = 3$ oder $2 + 2 + 2 = 6$. Diese Summen sind alle durch 3 teilbar.
<u>Situation B:</u> Unter Davids aufgeschriebenen Zahlen kommt keine Zahl dreimal vor. Dann kommt jede Zahl höchstens zweimal vor.
Da genau fünf Zahlen aufgeschrieben werden, muss folglich jede der Zahlen 0, 1 und 2 mindestens einmal unter diesen Zahlen vertreten sein. Wir können daher die Summe $0 + 1 + 2 = 3$ bilden, die durch 3 teilbar ist.

Bei weniger als 5 Würfen kann es vorkommen, dass unter den gewürfelten Zahlen keine drei sind, deren Summe durch 3 teilbar ist, denn David kann etwa die vier Zahlen 1, 1, 2, 2 würfeln. Die möglichen Summen von drei der vier Zahlen sind $1 + 1 + 2 = 4$ oder $1 + 2 + 2 = 5$. Keine dieser Summen ist durch 3 teilbar.

Aufgabe 3

Robert addiert zuerst sieben aufeinander folgende, danach acht aufeinander folgende und schließlich neun aufeinander folgende positive ganze Zahlen. Er erzielt dabei dreimal das gleiche Ergebnis. Christina stellt fest: „Das ist der kleinste Wert, den man so erhalten kann!“ Welchen Wert hat Robert berechnet?

Lösung:
Robert hat den Wert ***252*** berechnet.

Beweis:
Sieben aufeinanderfolgende Zahlen, deren kleinste a ist, haben die Summe
$a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4) + (a+5) + (a+6) = 7{\cdot}a + 21 = 7{\cdot}(a+3) \quad (1)$
Acht aufeinanderfolgende Zahlen, deren kleinste b ist, haben die Summe
$b + (b+1) + (b+2) + (b+3) + \ldots + (b+6) + (b+7) = 8{\cdot}b + 28 = 4{\cdot}(2b+7) \quad (2)$
Neun aufeinanderfolgende Zahlen, deren kleinste c ist, haben die Summe
$c + (c+1) + (c+2) + (c+3) + \ldots + (c+7) + (c+8) = 9{\cdot}c + 36 = 9{\cdot}(c+4) \quad (3)$

Wenn die gesuchte Zahl die Summe von sieben aufeinander folgenden Zahlen ist, ist sie nach (1) Vielfaches von 7. Ist sie zugleich Summe von acht aufeinander folgenden Zahlen, so ist sie nach (2) auch Vielfaches von 4. Ist diese Zahl auch noch Summe von neun aufeinander folgenden Zahlen, so ist sie nach (3) ebenfalls Vielfaches von 9.
Da die Zahlen 7, 4 und 9 keine gemeinsamen Teiler außer 1 haben, ist die gesuchte Zahl sogar durch das Produkt $7{\cdot}4{\cdot}9 = 252$ teilbar.
Der kleinstmögliche Wert für die gesuchte Zahl ist also 252.

Es gilt:
$252 = 7{\cdot}36 = 7{\cdot}(33+3) = 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39$
$252 = 4{\cdot}63 = 4{\cdot}(2{\cdot}28+7) = 28 + 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35$
$252 = 9{\cdot}28 = 9{\cdot}(24+4) = 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32$

Somit ist 252 tatsächlich eine Zahl, die Summe von sieben, acht bzw. neun aufeinanderfolgenden Zahlen ist.