14. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

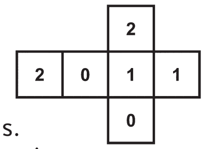
2011

MATHE MATIK

Einzelheiten zur Teilnahme findest Du auf der Rückseite oder unter **www.lwmb.de**. Du kannst Lösungen zu maximal vier Aufgaben einsenden (10. Klasse nicht A1).
Einsendeschluss ist der **10. 11. 2011**.

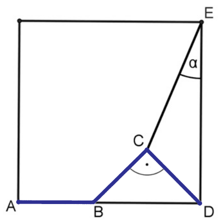
Du besuchst eine Realschule oder ein Gymnasium bis einschließlich Klassenstufe 10.
Du fühlst dich von mathematischen Aufgaben herausgefordert und
Du möchtest deine Fähigkeiten testen und erweitern.
Dann ist dieser Wettbewerb des bayrischen Kultusministeriums genau das Richtige für dich.

Aufgabe 1
David wirft einen besonderen Würfel und schreibt jeweils die oben liegende Zahl auf.
Die Abbildung zeigt ein Netz seines Würfels.



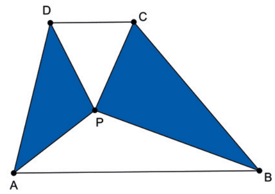
Wie oft muss David mindestens würfeln, damit unter den aufgeschriebenen Zahlen ganz sicher drei Zahlen sind, deren Summe durch 3 teilbar ist?

Aufgabe 2
In dem nebenstehenden Quadrat gilt:
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ und $\angle BCD = 90°$.
Bestimme die Größe des Winkels α.



Aufgabe 3
Robert addiert zuerst sieben aufeinander folgende, danach acht aufeinander folgende und schließlich neun aufeinander folgende positive ganze Zahlen. Er erzielt dabei dreimal das gleiche Ergebnis. Christina stellt fest: „Das ist der kleinste Wert, den man so erhalten kann!“
Welchen Wert hat Robert berechnet?

Aufgabe 4
Gegeben ist ein Trapez ABCD mit den parallelen Seiten [AB] und [CD].
Bestimme die Lage aller Punkte P im Inneren dieses Trapezes, für die die Dreiecke APD und CPB den gleichen Flächeninhalt haben.



Aufgabe 5
Ein gerader Schnitt zerlegt ein Dreieck ABC in zwei Teildreiecke, die zueinander ähnlich, aber nicht kongruent sind.
Zeige: Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.

Hinweis: Zwei Dreiecke heißen zueinander ähnlich, wenn sie in ihren Innenwinkeln übereinstimmen.

Aufgabe 6
Bestimme alle natürlichen Zahlen a und b, für die

$\frac{1}{a} + \frac{a}{b} + \frac{1}{ab} = 1$ gilt.

Klar, da mache ich mit! Bitte **lesbar** ausfüllen und mit den Aufgaben einsenden.
Bei Gruppenarbeiten für jedes Mitglied einen Abschnitt beilegen.

Vorname: ____________ **Name:** ____________ **Geschlecht:** ☐ m ☐ w

Jahrgangsstufe: ______ **Name der Schule:** ____________

Schulort: ____________

Gruppenarbeit: ☐ ja ☐ nein

Nummern der bearbeiteten Aufgaben (höchstens vier!)

1	2	3	4	5	6

Ich bestätige hiermit, alle Aufgaben **selbständig** bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst zu haben.

Unterschrift: ____________

Teilnahmebedingungen und Hinweise

- Teilnahmeberechtigt sind alle Schülerinnen und Schüler aus Realschulen und Gymnasien bis Klassenstufe 10 einschließlich.
- Für den Wettbewerb werden die Lösungen von **höchstens** vier der sechs Aufgaben gewertet. Bis einschließlich Klassenstufe 9 können diese vier Aufgaben beliebig ausgewählt werden. Für Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Klassenstufe 10 werden nur Lösungen der Aufgaben 2 bis 6 gewertet.
- In der ersten Runde ist **Gruppenarbeit** zugelassen. Eine Gruppe kann aus bis zu drei Mitgliedern bestehen. Besucht mindestens ein Gruppenmitglied die Klassenstufe 10, so werden nur Lösungen zu den Aufgaben 2 bis 6 gewertet.
- Bei jeder Aufgabe sind vier Punkte erreichbar. Jeder Teilnehmer mit mindestens acht Punkten erhält eine **Urkunde**. Darüber hinaus werden erste, zweite und dritte Preise vergeben. Einzelteilnehmer mit Preis erhalten einen **Buchpreis** oder **-gutschein**. Für einen ersten Preis sind mindestens 14 Punkte erforderlich. **Alle Teilnehmer** erhalten eine kleine **Anerkennung** für die Teilnahme.
- Einzelteilnehmer und Gruppenmitglieder, deren Lösungen mit einem ersten oder zweiten Preis bewertet wurden, können sich außerdem durch die Teilnahme an der zweiten Runde für ein mehrtägiges mathematisches Seminar qualifizieren. In der zweiten Runde ist keine Gruppenarbeit mehr zugelassen.
- Zu diesen Seminaren, die in den vergangenen Jahren bei den Teilnehmern ein sehr positives Echo gefunden haben, werden 60 Jugendliche eingeladen.
- Für die Lösung jeder Aufgabe sind gesonderte **DIN A4-Blätter** zu verwenden, die jeweils mit dem Namen zu versehen sind und nur einseitig beschrieben und **nicht gefaltet** sein sollen. Bitte alle Blätter in Reihenfolge der Aufgaben oben links zusammenheften.
- An jede Einsendung muss oben links der Rückmeldezettel des Aufgabenblattes angeheftet werden. Er muss mit der unterschriebenen Erklärung versehen sein, dass alle Aufgaben selbständig bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst wurden. Die verwendete Literatur ist anzugeben.
- Zu einer vollständig richtigen Lösung gehört insbesondere, dass alle wesentlichen Zwischenschritte aufgeführt und begründet sind. Die Angabe eines Zahlenwertes alleine oder von Beispielen genügt nicht als Lösung. Werden innerhalb eines Lösungswegs Eigenschaften verwendet, die aus dem Unterricht bekannt sind, so ist deren Nachweis nicht erforderlich. Auf die verwendete Eigenschaft muss jedoch bei der Lösung hingewiesen werden.
- Unübersichtliche oder unleserliche Lösungen können von der Korrektur ausgeschlossen werden.
- Die Korrekturentscheidung ist endgültig und unterliegt nicht dem Rechtsweg.
- Nach Abschluss der Korrektur (Ende Dezember) erhält der Kontaktlehrer bzw. Fachbetreuer Mathematik jeder teilnehmenden Schule Nachricht über die Ergebnisse der Teilnehmer der Schule.
- Die Aufgaben der zweiten Runde werden bereits im Dezember über die Kontaktlehrer an die teilnahmeberechtigten Schüler versandt.
- Eine Rücksendung der korrigierten Arbeiten ist aus organisatorischen Gründen nicht möglich. Es empfiehlt sich deshalb, **eine Kopie anzufertigen**, um die eigenen Lösungen mit den Anmerkungen zu Korrektur und den Lösungsbeispielen vergleichen zu können.
- Die ausreichend frankierten Zuschriften **(Umschlag für DIN A4 mit Porto 1,45 €)** sind zu richten an:

  Albrecht Kliem
  Landeswettbewerb Mathematik
  Wirsberg-Gymnasium
  Am Pleidenturm 16
  97070 Würzburg
- Einsendeschluss ist der **10. 11. 2011** (Datum des Poststempels).
- Übungsmaterial: Aufgaben und Lösungen vergangener Wettbewerbsjahre können unter www.lwmb.de abgerufen werden.

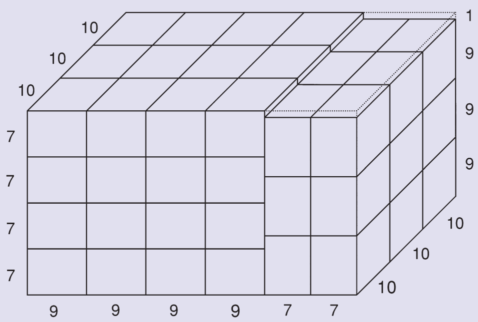
Lösungsbeispiele aus dem vergangenen Jahr

Aufgabe 2

Kleine Holzquader, die alle 10 cm lang, 9 cm breit und 7 cm hoch sind, sollen in eine quaderförmige Kiste mit den Innenmaßen 50 cm, 30 cm und 28 cm gepackt werden. Bestimme die größtmögliche Anzahl an Holzquadern, die in die Kiste passen, und gib eine Möglichkeit an, wie man sie in die Kiste packen kann.

Lösung:
Die größtmögliche Anzahl von Holzquadern, die in die Kiste passen, ist 66.

Beweis:
Das Volumen der Kiste ist $50\text{ cm} \cdot 30\text{ cm} \cdot 28\text{ cm} = 42000\text{ cm}^3$. Ein einzelner Holzquader hat das Volumen $10\text{ cm} \cdot 9\text{ cm} \cdot 7\text{ cm} = 630\text{ cm}^3$. Nun gilt für das Gesamtvolumen: $42000\text{ cm}^3 = 66 \cdot 630\text{ cm}^3 + 420\text{ cm}^3$. Diese Rechnung zeigt, dass mehr als 66 Holzquader sicher nicht in die Kiste passen.
Jetzt weisen wir nach, dass man 66 Holzquader tatsächlich unterbringen kann. Eine mögliche Stapelung von 66 Holzquadern in der Kiste zeigt die Abbildung:



Dabei liegen im linken Teil des Quaders wie abgebildet $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ Quader und füllen diesen linken Teil vollständig aus. Der rechte Teil des Quaders mit den Abmessungen 14 cm, 30 cm und 28 cm lässt sich mit $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ Quadern so ausfüllen, dass nur ein Restquader mit den Abmessungen 14 cm, 30 cm und 1 cm übrig bleibt. Damit ist eine Packung mit $48 + 18 = 66$ Quadern gegeben.

Aufgabe 3

Gegeben sind fünf verschiedene natürliche Zahlen. Bildet man alle möglichen Summen von jeweils zwei dieser Zahlen, so erhält man genau sieben verschiedene Werte. Zeige, dass die Summe aller fünf Zahlen durch 5 teilbar ist.

Lösung:
Wir bezeichnen die fünf verschiedenen natürlichen Zahlen mit a, b, c, d, e, wobei $a<b<c<d<e$ gelten soll. Dann gilt auch:
$a+b < a+c < b+c < b+d < c+d < c+e < d+e$.
Da dies also schon sieben verschiedene Summenwerte sind, müssen die übrigen drei Paarsummen $a+d$, $a+e$ und $b+e$ jeweils mit einem dieser sieben Werte übereinstimmen.
Wegen $a+c < a+d < b+d$ muss also $a+d = b+c$ (1) sein und weil $b+d < b+e < c+e$ ist, ist $b+e = c+d$ (2).

Schließlich ist noch $a+d < a+e < b+e$; daher muss $a+e = b+d$ (3) sein.

Nun folgt der Reihe nach aus den Gleichungen (1), (3) und (2):

$$d-c = b-a = e-d = c-b.$$

Das bedeutet aber, dass benachbarte Zahlen in der Folge unserer fünf Zahlen jeweils denselben Abstand haben – es handelt sich also um eine arithmetische Zahlenfolge.

Setzt man $b-a = k$, so gilt dann $a+b+c+d+e = a+(a+k)+(a+2k)+(a+3k)+(a+4k) = 5(a+2k)$.

Die Summe der fünf Zahlen ist also durch 5 teilbar.