12. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

2009

Einzelheiten zur Teilnahme findest Du auf der Rückseite oder unter **www.lwmb.de**.
Du kannst Lösungen zu maximal vier Aufgaben einsenden.
(10. Klasse nicht A1 – **Neu:** Schüler der 10. Klasse dürfen also auch A2 bearbeiten).
Einsendeschluss ist der **12. 11. 2009**.

Du besuchst eine Realschule oder ein Gymnasium bis einschließlich Klassenstufe 10.
Du fühlst dich von mathematischen Aufgaben herausgefordert und
Du möchtest deine Fähigkeiten testen und erweitern.
Dann ist dieser Wettbewerb des bayrischen Kultusministeriums genau das Richtige für dich.

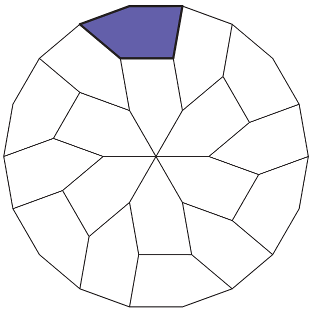
Aufgabe 1

Wird zu einer natürlichen Zahl ihre Quersumme addiert, so erhält man 2010. Bestimme alle Zahlen, bei denen dies zutrifft.

Aufgabe 2

Jedes regelmäßige 18-Eck kann man wie in der Figur dargestellt in kongruente* Fünfecke zerlegen. Bestimme die Innenwinkel eines solchen Fünfecks.

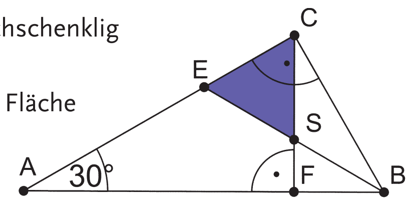
* Figuren heißen kongruent, wenn sie deckungsgleich aufeinander gelegt werden können.



Aufgabe 3

Das Dreieck ABE ist gleichschenklig mit der Basis [AB].

Bestimme den Anteil der Fläche des Dreiecks ESC an der Fläche des Dreiecks ABC.



Aufgabe 4

Die von Null verschiedenen Zahlen z_1 und z_2 sind die Startzahlen einer Zahlenfolge. Die weiteren Zahlen werden folgendermaßen gebildet:
$z_3 = z_2 : z_1$, $z_4 = z_3 : z_2$, ...
Zeige: Das Produkt von 2009 aufeinander folgenden Zahlen dieser Folge ist immer eine Zahl der Folge.

Aufgabe 5

Im gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck ABC ($\gamma = 90°$) schneidet ein Kreis um C die Kathete [CA] in D und die Kathete [CB] in E. Die Lotgeraden von C und D auf die Gerade AE schneiden die Hypotenuse [AB] in den Punkten F bzw. G.
Zeige: $\overline{GF} = \overline{FB}$

Aufgabe 6

Ein Glücksspielautomat wählt zufällig einen Teiler der Zahl 20092010 aus und zeigt seine Einerziffer an.
Auf welche Ziffer sollte ein Spieler setzen?

Der Landeswettbewerb Mathematik Bayern wird gefördert von

Klar, da mache ich mit! Bitte **lesbar** ausfüllen und mit den Aufgaben einsenden.
Bei Gruppenarbeiten für jedes Mitglied einen Abschnitt beilegen.

Vorname: ______________________ **Name:** ______________________ **Geschlecht:** ☐ m ☐ w

Jahrgangsstufe: ________ **Name der Schule:** ______________________

Schulort: ______________________

Nummern der bearbeiteten Aufgaben (höchstens vier!)

1	2	3	4	5	6

Gruppenarbeit: ☐ ja ☐ nein

Ich bestätige hiermit, alle Aufgaben **selbständig** bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst zu haben.

Unterschrift: ______________________

Teilnahmebedingungen und Hinweise

- Teilnahmeberechtigt sind alle Schülerinnen und Schüler aus Realschulen und Gymnasien bis Klassenstufe 10 einschließlich.
- Für den Wettbewerb werden die Lösungen von **höchstens** vier der sechs Aufgaben gewertet. Bis einschließlich Klassenstufe 9 können diese vier Aufgaben beliebig ausgewählt werden. Für Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Klassenstufe 10 werden nur Lösungen der Aufgaben 2 bis 6 gewertet.
- In der ersten Runde ist **Gruppenarbeit** zugelassen. Eine Gruppe kann aus bis zu drei Mitgliedern bestehen. Besucht mindestens ein Gruppenmitglied die Klassenstufe 10, so werden nur Lösungen zu den Aufgaben 2 bis 6 gewertet.
- Bei jeder Aufgabe sind vier Punkte erreichbar. Jeder Teilnehmer mit mindestens acht Punkten erhält eine **Urkunde**. Darüber hinaus werden erste, zweite und dritte Preise vergeben. Einzelteilnehmer mit Preis erhalten einen **Buchpreis** oder **-gutschein**. Für einen ersten Preis sind mindestens 14 Punkte erforderlich. **Alle Teilnehmer** erhalten eine kleine **Anerkennung** für die Teilnahme.
- Einzelteilnehmer und Gruppenmitglieder, deren Lösungen mit einem ersten oder zweiten Preis bewertet wurden, können sich außerdem durch die Teilnahme an der zweiten Runde für ein mehrtägiges mathematisches Seminar qualifizieren. In der zweiten Runde ist keine Gruppenarbeit mehr zugelassen.
- Zu diesen Seminaren, die in den vergangenen Jahren bei den Teilnehmern ein sehr positives Echo gefunden haben, werden 60 Jugendliche eingeladen.
- Für die Lösung jeder Aufgabe sind gesonderte **DIN A4-Blätter** zu verwenden, die jeweils mit dem Namen zu versehen sind und nur einseitig beschrieben und **nicht gefaltet** sein sollen. Bitte alle Blätter in Reihenfolge der Aufgaben oben links zusammenheften.
- An jede Einsendung muss oben links der Rückmeldezettel des Aufgabenblattes angeheftet werden. Er muss mit der unterschriebenen Erklärung versehen sein, dass alle Aufgaben selbständig bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst wurden. Die verwendete Literatur ist anzugeben.
- Zu einer vollständig richtigen Lösung gehört insbesondere, dass alle wesentlichen Zwischenschritte aufgeführt und begründet sind. Die Angabe eines Zahlenwertes alleine oder von Beispielen genügt nicht als Lösung. Werden innerhalb eines Lösungswegs Eigenschaften verwendet, die aus dem Unterricht bekannt sind, so ist deren Nachweis nicht erforderlich. Auf die verwendete Eigenschaft muss jedoch bei der Lösung hingewiesen werden.
- Unübersichtliche oder unleserliche Lösungen können von der Korrektur ausgeschlossen werden.
- Die Korrekturentscheidung ist endgültig und unterliegt nicht dem Rechtsweg.
- Nach Abschluss der Korrektur (Ende Dezember) erhält der Kontaktlehrer bzw. Fachbetreuer Mathematik jeder teilnehmenden Schule Nachricht über die Ergebnisse der Teilnehmer der Schule.
- Die Aufgaben der zweiten Runde werden bereits im Dezember 2008 über die Kontaktlehrer an die teilnahmeberechtigten Schüler versandt.
- Eine Rücksendung der korrigierten Arbeiten ist aus organisatorischen Gründen nicht möglich. Es empfiehlt sich deshalb, **eine Kopie anzufertigen**, um die eigenen Lösungen mit den Anmerkungen zu Korrektur und den Lösungsbeispielen vergleichen zu können.
- Die ausreichend frankierten Zuschriften (Umschlag für DIN A4 mit Porto 1,45 €) sind zu richten an:

  Albrecht Kliem
  Landeswettbewerb Mathematik
  Wirsberg-Gymnasium
  Am Pleidenturm 16
  97070 Würzburg

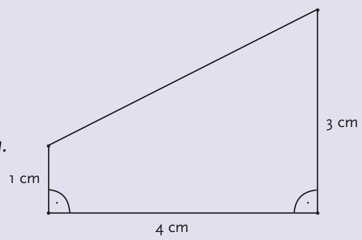
- Einsendeschluss ist der **12. 11. 2009**
  (Datum des Poststempels).

- Übungsmaterial: Aufgaben und Lösungen vergangener Wettbewerbsjahre können unter www.lwmb.de abgerufen werden.

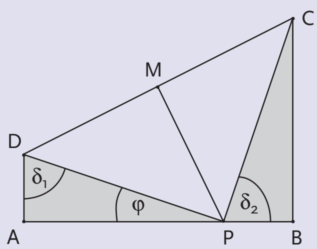
Lösungsbeispiele aus dem vergangenen Jahr

Aufgabe 1

Das abgebildete Viereck soll durch einen einzigen geraden Schnitt so zerlegt werden, dass zwei Teile gleicher Form und Größe entstehen. Begründe, dass dies möglich ist.



Lösung:
Die Eckpunkte des gegebenen Vierecks werden entsprechend nebenstehender Skizze mit A, B, C und D bezeichnet. Sind M der Mittelpunkt von [CD] und P der Punkt aus [AB] mit $\overline{PB} = 1$ cm, so zerlegt ein Schnitt entlang der Geraden PM das Viereck in zwei Teile gleicher Form und Größe.



Begründung:
Zeichnet man in dem vorgegebenen Viereck ABCD die Strecken [PD] und [PC] ein, so gilt:
Die Dreiecke APD und BCP sind nach dem sws-Satz kongruent, denn $\overline{AP} = \overline{BC} = 3$ cm, $\overline{DA} = \overline{PB} = 1$ cm und $\angle PAD = \angle CBP = 90°$ jeweils nach Vorgabe.
Daraus folgt: $\angle ADP = \delta_1 = \delta_2 = \angle BPC$. Demnach gilt:
$\angle CPD = 180° - (\delta_2 + \varphi) = 180° - (\delta_1 + \varphi) = 90°$ (1) und $\overline{PD} = \overline{PC}$ (2)
Nach (1) und (2) ist Dreieck DPC rechtwinklig und gleichschenklig mit Basis [DC].
Da die Mittelsenkrechte MP von [DC] die Symmetrieachse des Dreiecks DPC ist, sind die Teildreiecke DPM und PCM kongruent und ebenfalls rechtwinklig und gleichschenklig. Da die Basen [PD] bzw. [PC] der rechtwinklig, gleichschenkligen Dreiecke DPM und PCM auf den Hypotenusen [PD] bzw. [PC] der kongruenten Dreiecke APD und BCP liegen, haben die beiden Vierecke APMD und BCMP gleiche Form und Größe.

Aufgabe 3

An der Tafel stehen die natürlichen Zahlen von 1 bis n. Du darfst immer dann drei Zahlen wegwischen, wenn eine dieser Zahlen die Summe der beiden anderen ist.
Für welche $n \le 20$ kannst Du alle Zahlen wegwischen?

Lösung:
Dies ist dann und nur dann möglich, wenn n = 3 oder n = 12 oder n = 15 ist.

Begründung:
1. Teil: Nachweis, dass 3, 12, 15 Lösungen sind.

n = 3 Wegen 1 + 2 = 3 können alle Zahlen in einem Zug weggewischt werden.

n = 12 Hier können die Zahlen in vier Dreiergruppen wie folgt gewischt werden:
1 + 5 = 6; 2 + 9 = 11; 3 + 7 = 10; 4 + 8 = 12.

n = 15 Hier können die Zahlen in fünf Dreiergruppen wie folgt gewischt werden:
1 + 14 = 15; 7 + 6 = 13; 2 + 10 = 12; 3 + 8 = 11; 4 + 5 = 9.

2. Teil: Nachweis, dass es keine weiteren Lösungen gibt.
Eine notwendige Bedingung ist offensichtlich, dass n durch 3 teilbar ist, denn es werden pro Zug genau 3 Zahlen entfernt.
Bezeichnet man die drei bei einem „Wisch" gestrichenen Zahlen mit a, b und (a + b), so ist deren Summe $2 \cdot (a + b)$ eine gerade Zahl.
Eine weitere notwendige Bedingung ist also, dass die Gesamtsumme der anfangs an der Tafel stehenden n Zahlen gerade ist.

Diese Summe ist $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Somit muss das Produkt $n \cdot (n + 1)$ durch 4 teilbar sein.
Da nicht beide der aufeinander folgenden Zahlen n und n + 1 gerade sein können, muss entweder n oder n + 1 durch 4 teilbar sein.
Im ersten Fall ist n also durch 4 und auch durch 3 also – wegen der Teilerfremdheit von 4 und 3 – auch durch 12 teilbar. Dies ist mit $n \le 20$ nur für n = 12 der Fall.
Im zweiten Fall ist n + 1 und damit auch n – 3 durch 4 teilbar.
Weil n durch 3 teilbar ist, ist auch n – 3 durch 3 teilbar. In diesem Fall ist also n – 3 durch 12 teilbar. Dies ist offensichtlich mit $n \le 20$ nur für n = 3 oder für n = 15 der Fall.
Es kann also keine weiteren Lösungen als die genannten geben.