# 11. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

2008

MATHEMATIK

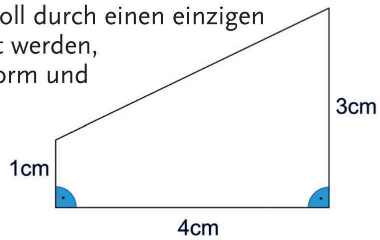
Einzelheiten zur Teilnahme findest Du auf der Rückseite oder unter **www.lwmb.de**.
Du kannst Lösungen zu maximal vier Aufgaben einsenden.
(10. Klasse nicht A1 und A2)
Einsendeschluss ist der **13. 11. 2008**.

**Du** besuchst eine Realschule oder ein Gymnasium bis einschließlich Klassenstufe 10.
**Du** fühlst dich von mathematischen Aufgaben herausgefordert und
**Du** möchtest deine Fähigkeiten testen und erweitern.
**Dann** ist dieser Wettbewerb des bayrischen Kultusministeriums genau das Richtige für dich.

***Aufgabe 1***

Das abgebildete Viereck soll durch einen einzigen geraden Schnitt so zerlegt werden, dass zwei Teile gleicher Form und Größe entstehen.

Begründe, dass dies möglich ist.




***Aufgabe 2***

Gegeben sind sechs verschiedene Zahlen. Theo bildet alle möglichen Differenzen von je zwei dieser Zahlen. Anschließend multipliziert er diese Ergebnisse miteinander.

Warum ist dieses Produkt immer negativ?

***Aufgabe 3***

An der Tafel stehen die natürlichen Zahlen von 1 bis n. Du darfst immer dann drei Zahlen wegwischen, wenn eine dieser Zahlen die Summe der beiden anderen ist.

Für welche $n \leq 20$ kannst Du alle Zahlen wegwischen?

***Aufgabe 4***

Aus mehreren gleichartigen Spielwürfeln soll ein massiver Würfel gebaut werden. Dabei muss die Summe der Augenzahlen auf seiner Oberfläche kleiner sein als die Anzahl der verwendeten Spielwürfel.

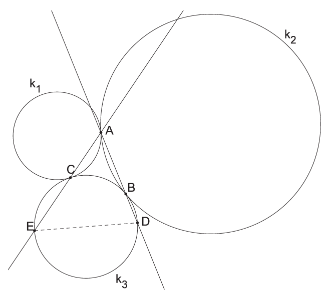
Für welche Anzahlen von Spielwürfeln ist dies möglich?

***Aufgabe 5***

Zeige: Unter drei beliebig gewählten ganzen Zahlen gibt es stets zwei, deren Produkt eine Differenz von zwei Quadratzahlen ist.

***Aufgabe 6***

Drei Kreise $k_1$, $k_2$ und $k_3$ berühren sich von außen paarweise in den Punkten A, B und C (vgl. Abb.). Die Geraden AB und AC schneiden den Kreis $k_3$ zusätzlich in den Punkten D und E.




Zeige, dass [DE] ein Durchmesser von $k_3$ ist.



Klar, da mache ich mit! Bitte **lesbar** ausfüllen und mit den Aufgaben einsenden.
Bei Gruppenarbeiten für jedes Mitglied einen Abschnitt beilegen.

**Vorname:** ____________ **Name:** ____________ **Geschlecht:** ☐ m ☐ w

**Jahrgangsstufe:** ______ **Name der Schule:** ____________

**Schulort:** ____________

**Gruppenarbeit:** ☐ ja ☐ nein

**Nummern** der bearbeiteten Aufgaben (höchstens vier!)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|

Ich bestätige hiermit, alle Aufgaben **selbständig** bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst zu haben.

Unterschrift: ____________

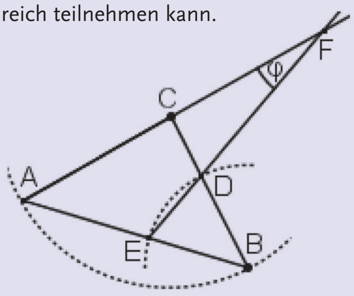
## Teilnahmebedingungen und Hinweise

- Teilnahmeberechtigt sind alle Schülerinnen und Schüler aus Realschulen und Gymnasien bis Klassenstufe 10 einschließlich.
- Für den Wettbewerb werden die Lösungen von **höchstens** vier der sechs Aufgaben gewertet. Bis einschließlich Klassenstufe 9 können diese vier Aufgaben beliebig ausgewählt werden. Für Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Klassenstufe 10 werden nur Lösungen der Aufgaben 3 bis 6 gewertet.
- In der ersten Runde ist **Gruppenarbeit** zugelassen. Eine Gruppe kann aus bis zu drei Mitgliedern bestehen. Besucht mindestens ein Gruppenmitglied die Klassenstufe 10, so werden nur Lösungen zu den Aufgaben 3 bis 6 gewertet.
- Bei jeder Aufgabe sind vier Punkte erreichbar. Jeder Teilnehmer mit mindestens acht Punkten erhält eine **Urkunde**. Darüber hinaus werden erste, zweite und dritte Preise vergeben. Einzelteilnehmer mit Preis erhalten einen **Buchpreis** oder **-gutschein**. Für einen ersten Preis sind mindestens 14 Punkte erforderlich. **Alle Teilnehmer** erhalten eine kleine **Anerkennung** für die Teilnahme.
- Einzelteilnehmer und Gruppenmitglieder, deren Lösungen mit einem ersten oder zweiten Preis bewertet wurden, können sich außerdem durch die Teilnahme an der zweiten Runde für ein mehrtägiges mathematisches Seminar qualifizieren. In der zweiten Runde ist keine Gruppenarbeit mehr zugelassen.
- Zu diesen Seminaren, die in den vergangenen Jahren bei den Teilnehmern ein sehr positives Echo gefunden haben, werden 60 Jugendliche eingeladen.
- Für die Lösung jeder Aufgabe sind gesonderte **DIN A4-Blätter** zu verwenden, die jeweils mit dem Namen zu versehen sind und nur einseitig beschrieben und **nicht gefaltet** sein sollen. Bitte alle Blätter in Reihenfolge der Aufgaben oben links zusammenheften.
- An jede Einsendung muss oben links der Rückmeldezettel des Aufgabenblattes angeheftet werden. Er muss mit der unterschriebenen Erklärung versehen sein, dass alle Aufgaben selbständig bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst wurden. Die verwendete Literatur ist anzugeben.
- Zu einer vollständig richtigen Lösung gehört insbesondere, dass alle wesentlichen Zwischenschritte aufgeführt und begründet sind. Die Angabe eines Zahlenwertes alleine oder von Beispielen genügt nicht als Lösung. Werden innerhalb eines Lösungswegs Eigenschaften verwendet, die aus dem Unterricht bekannt sind, so ist deren Nachweis nicht erforderlich. Auf die verwendete Eigenschaft muss jedoch bei der Lösung hingewiesen werden.
- Unübersichtliche oder unleserliche Lösungen können von der Korrektur ausgeschlossen werden.
- Die Korrekturentscheidung ist endgültig und unterliegt nicht dem Rechtsweg.
- Nach Abschluss der Korrektur (Ende Dezember) erhält der Kontaktlehrer bzw. Fachbetreuer Mathematik jeder teilnehmenden Schule Nachricht über die Ergebnisse der Teilnehmer der Schule.
- Die Aufgaben der zweiten Runde werden bereits im Dezember 2008 über die Kontaktlehrer an die teilnahmeberechtigten Schüler versandt.
- Eine Rücksendung der korrigierten Arbeiten ist aus organisatorischen Gründen nicht möglich. Es empfiehlt sich deshalb, **eine Kopie anzufertigen**, um die eigenen Lösungen mit den Anmerkungen zu Korrektur und den Lösungsbeispielen vergleichen zu können.
- Die ausreichend frankierten Zuschriften (Umschlag für DIN A4 mit Porto 1,45 €) sind zu richten an:

  Albrecht Kliem<br>
  Landeswettbewerb Mathematik<br>
  Wirsberg-Gymnasium<br>
  Am Pleidenturm 16<br>
  97070 Würzburg
- Einsendeschluss ist der **13. 11. 2008** (Datum des Poststempels).
- Übungsmaterial: Aufgaben und Lösungen vergangener Wettbewerbsjahre können unter www.lwmb.de abgerufen werden.

### Lösungsbeispiele aus dem vergangenen Jahr

Die folgenden Lösungsbeispiele von zwei Wettbewerbsaufgaben aus der ersten Runde des vergangenen Jahres zeigen, dass man mit den Kenntnissen der Mittelstufe erfolgreich teilnehmen kann.

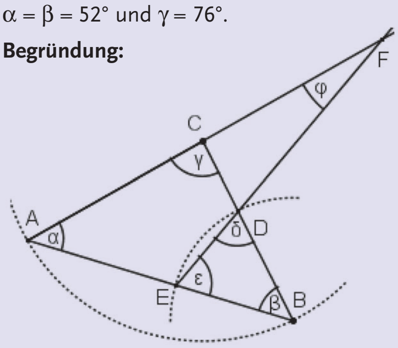



**Aufgabe 2**

*Wie groß sind die Innenwinkel des Dreiecks ABC, wenn $\varphi = 12°$ ist?*

**Antwort:**
$\alpha = \beta = 52°$ und $\gamma = 76°$.

**Begründung:**




Da die Punkte A und B auf einem Kreis mit Mittelpunkt C liegen, ist $\overline{AC} = \overline{BC}$. Somit ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit Basis [AB]. Daher sind die beiden Basiswinkel dieses Dreiecks gleich groß, also $\alpha = \beta$. (1) Da die Punkte D und E auf einem Kreis mit Mittelpunkt B liegen, ist $\overline{DB} = \overline{EB}$. Somit ist das Dreieck EBD gleichschenklig mit Basis [DE]. Daher sind die Basiswinkel gleich groß, also $\delta = \varepsilon$. (2) Die Winkelsumme im Dreieck EBD ist nach (1) und (2):

$\beta + \delta + \varepsilon = \alpha + 2 \cdot \varepsilon = 180°$. Somit ist

$$\varepsilon = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Somit ist $\angle$ DEA

$$= 180° - \varepsilon = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

Die Winkelsumme im Dreieck AEF ist:

$$\alpha + \left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) + \varphi = \frac{3}{2} \cdot \alpha + 90° + \varphi = 180°$$

Mit $\varphi = 12°$ ist: $\frac{3}{2} \cdot \alpha = 90° - \varphi = 78°$.

Also: $\alpha = \frac{2}{3} \cdot 78° = 52° = \beta$.

Aus dem Winkelsummensatz für das Dreieck ABC ergibt sich schließlich:

$\gamma = 180° - 2 \cdot \alpha = 180° - 2 \cdot 52° = 76°$.

**Aufgabe 5**

*Bestimme alle natürlichen Zahlen x und y mit $2x + 7y + 2007 = xy$.*

**Antwort:**
Es gibt für das Paar (x; y) vier Lösungen: (8; 2023), (50; 49), (54; 45), (2028; 3).

**Begründung:**
Die Gleichung $2x + 7y + 2007 = x \cdot y$ ist äquivalent zu $2007 = x \cdot y - 2x - 7y$.
In der letzten Gleichung kann man die rechte Seite umformen:
$x \cdot y - 2x - 7y = (x - 7) \cdot (y - 2) - 14$.

Somit erhält man:

$2007 = (x - 7) \cdot (y - 2) - 14$ oder
$2021 = (x - 7) \cdot (y - 2)$. (*)

Die Primfaktorzerlegung von 2021 ist $2021 = 43 \cdot 47$. Also sind 1, 43, 47 und 2021 die einzigen Teiler von 2021.

Da $|x - 7|$ nach (*) ein Teiler von $2021 = 43 \cdot 47$ ist, kann $x - 7$ nur $\pm 1$, $\pm 43$, $\pm 47$ oder $\pm 2021$ sein.
Die Fälle $x - 7 = -43$, $x - 7 = -47$ und $x - 7 = -2021$ können sofort ausgeschlossen werden, da hier x negativ wäre, was der Angabe widerspricht.
Der Fall $x - 7 = -1$ ergibt $x = 6$ und $y = -2019$. Dies widerspricht ebenfalls der Angabe. Somit bleiben die folgenden vier Fälle zu untersuchen:

| $x - 7$ | $y - 2$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2021 | 8 | 2023 |
| 43 | 47 | 50 | 49 |
| 47 | 43 | 54 | 45 |
| 2021 | 1 | 2028 | 3 |

Dies sind genau die vier Lösungen.

Weitere Lösungsbeispiele findest du unter www.lwmb.de