2007

10. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

MATHEMATIK

Einzelheiten zur Teilnahme findest Du auf der Rückseite oder unter **www.lwmb.de**.
Du kannst Lösungen zu maximal vier Aufgaben einsenden. (10. Klasse nicht A1 und A2)
Einsendeschluss ist der **08. 11. 2007**.

Du besuchst eine Realschule oder ein Gymnasium bis einschließlich Klassenstufe 10.
Du möchtest deine mathematischen Fähigkeiten testen.
Du fühlst dich von einer Aufgabe herausgefordert, wenn die Lösung nicht sofort erkennbar ist.
Du hast Ausdauer.
Dann ist dieser Wettbewerb des bayrischen Kultusministeriums genau das Richtige für dich.

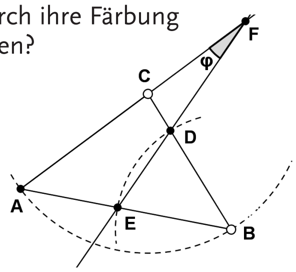
Aufgabe 1

Hans bastelt Würfel. Jede Seitenfläche färbt er entweder weiß oder blau.

Wie viele Würfel, die sich allein durch ihre Färbung unterscheiden, kann Hans herstellen?

Aufgabe 2

Wie groß sind die Innenwinkel des Dreiecks ABC, wenn $\varphi = 12°$ ist?



Aufgabe 3

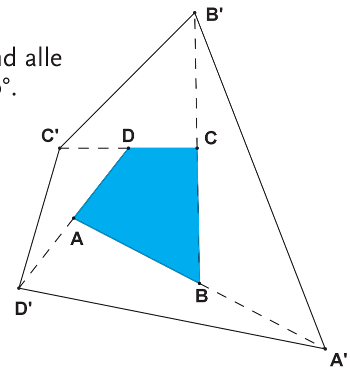
Zwölf Teilnehmer eines Song-Wettbewerbs werden von einer siebenköpfigen Jury bewertet. Jeder Wertungsrichter gibt jedem Teilnehmer zwischen 1 und 12 Punkte; dabei darf er keine zwei Teilnehmer gleich bewerten. Wer die höchste Gesamtpunktzahl erhält, belegt – evtl. zusammen mit weiteren Teilnehmern – den 1. Platz. Sänger Mike erfährt von einem Reporter seine Gesamtpunktzahl und gibt dazu den sachlich richtigen Kommentar: *„Es ist durchaus möglich, dass ich der alleinige Sieger bin.“*

Bestimme die kleinste Gesamtpunktzahl, mit der Mike als einziger den 1. Platz belegen kann.

Aufgabe 4

In einem Viereck ABCD sind alle Innenwinkel kleiner als 180°. Spiegelt man A an B, B an C, C an D und D an A, so entsteht das Viereck A'B'C'D'.

Wie groß ist das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Vierecke?



Aufgabe 5

Bestimme alle natürlichen Zahlen x und y mit $2x + 7y + 2007 = xy$.

Aufgabe 6

Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2, die sich von außen berühren. Ihre Mittelpunkte sind M_1 und M_2. Ein Halbkreis über $[M_1M_2]$ schneidet k_1 in P_1 und k_2 in P_2.

Zeige: Die Kreise k_1 und k_2 schneiden aus der Geraden P_1P_2 gleich lange Sehnen aus.

Klar, da mache ich mit! Bitte **lesbar** ausfüllen und mit den Aufgaben einsenden.
Bei Gruppenarbeiten für jedes Mitglied einen Abschnitt beilegen.

Vorname: ______________________ **Name:** ______________________ **Geschlecht:** ☐ m ☐ w

Jahrgangsstufe: ________ **Name der Schule:** ______________________________

Schulort: ______________________________

Gruppenarbeit: ☐ ja ☐ nein

Nummern der bearbeiteten Aufgaben (höchstens vier!)

1	2	3	4	5	6

Ich bestätige hiermit, alle Aufgaben **selbständig** bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst zu haben.

Unterschrift: ______________________

Teilnahmebedingungen und Hinweise

- Teilnahmeberechtigt sind alle Schülerinnen und Schüler aus Realschulen und Gymnasien bis Klassenstufe 10 einschließlich.
- Für den Wettbewerb werden die Lösungen von **höchstens** vier der sechs Aufgaben gewertet. Bis einschließlich Klassenstufe 9 können diese vier Aufgaben beliebig ausgewählt werden. Für Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Klassenstufe 10 werden nur Lösungen der Aufgaben 3 bis 6 gewertet.
- In der ersten Runde ist **Gruppenarbeit** zugelassen. Eine Gruppe kann aus bis zu drei Mitgliedern bestehen. Besucht mindestens ein Gruppenmitglied die Klassenstufe 10, so werden nur Lösungen zu den Aufgaben 3 bis 6 gewertet.
- Bei jeder Aufgabe sind vier Punkte erreichbar. Jeder Teilnehmer mit mindestens acht Punkten erhält eine **Urkunde**. Darüber hinaus werden erste, zweite und dritte Preise vergeben. Einzelteilnehmer mit Preis erhalten einen **Buchpreis** oder **-gutschein**. Für einen ersten Preis sind mindestens 14 Punkte erforderlich. **Alle Teilnehmer** erhalten eine kleine **Anerkennung** für die Teilnahme.
- Einzelteilnehmer und Gruppenmitglieder, deren Lösungen mit einem ersten oder zweiten Preis bewertet wurden, können sich außerdem durch die Teilnahme an der zweiten Runde für ein mehrtägiges mathematisches Seminar qualifizieren. In der zweiten Runde ist keine Gruppenarbeit mehr zugelassen.
- Zu diesen Seminaren, die in den vergangenen Jahren bei den Teilnehmern ein sehr positives Echo gefunden haben, werden 60 Jugendliche eingeladen.
- Für die Lösung jeder Aufgabe sind gesonderte DIN A4 Blätter zu verwenden, die jeweils mit dem Namen zu versehen sind und nur einseitig beschrieben und nicht gefaltet sein sollen.
- Jeder Einsendung muss der Rückmeldezettel des Aufgabenblattes beiliegen. Er muss mit der unterschriebenen Erklärung versehen sein, dass alle Aufgaben selbständig bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst wurden. Die verwendete Literatur ist anzugeben.
- Zu einer vollständig richtigen Lösung gehört insbesondere, dass alle wesentlichen Zwischenschritte aufgeführt und begründet sind. Die Angabe eines Zahlenwertes alleine oder von Beispielen genügt nicht als Lösung. Werden innerhalb eines Lösungswegs Eigenschaften verwendet, die aus dem Unterricht bekannt sind, so ist deren Nachweis nicht erforderlich. Auf die verwendete Eigenschaft muss jedoch bei der Lösung hingewiesen werden.
- Unübersichtliche oder unleserliche Lösungen können von der Korrektur ausgeschlossen werden.
- Die Korrekturentscheidung ist endgültig und unterliegt nicht dem Rechtsweg.
- Nach Abschluss der Korrektur (Ende Dezember) erhält der Kontaktlehrer bzw. Fachbetreuer Mathematik jeder teilnehmenden Schule Nachricht über die Ergebnisse der Teilnehmer der Schule.

NEU: Die Aufgaben der zweiten Runde werden bereits im Dezember 2007 über die Kontaktlehrer an die teilnahmeberechtigten Schüler versandt.

- Eine Rücksendung der korrigierten Arbeiten ist aus organisatorischen Gründen nicht möglich. Es empfiehlt sich deshalb, **eine Kopie anzufertigen**, um die eigenen Lösungen mit den Anmerkungen zu Korrektur und den Lösungsbeispielen vergleichen zu können.
- Die ausreichend frankierten Zuschriften (Umschlag für DIN A4 mit Porto 1,45 €) sind zu richten an:

Albrecht Kliem
Landeswettbewerb Mathematik
Wirsberg-Gymnasium
Am Pleidenturm 16
97070 Würzburg

- Einsendeschluss ist der **8. 11. 2007** (Datum des Poststempels).
- Übungsmaterial: Aufgaben und Lösungen vergangener Wettbewerbsjahre können unter www.lwmb.de abgerufen werden.

Lösungsbeispiele aus dem vergangenen Jahr

Die folgenden Lösungsbeispiele von zwei Wettbewerbsaufgaben aus der ersten Runde des vergangenen Jahres zeigen, dass man mit den Kenntnissen der Mittelstufe erfolgreich teilnehmen kann.

Aufgabe 2

Xaver addiert die Größen der Innenwinkel eines ebenen Vielecks und erhält den Wert 2006°. Er hat dabei einen Winkel übersehen. Wie groß kann dieser Winkel sein?

Antwort:
Der übersehene Winkel ist entweder 154° oder 334° groß.

Begründung:
Der gesuchte Winkel sei α, die Anzahl der Ecken in dem Vieleck sei n.
Die Winkelsumme in einem ebenen Vieleck mit n Ecken beträgt $(n-2)\cdot 180°$.
Damit muss gelten:
$(n-2)\cdot 180° = \alpha + 2006°$ und somit:
$\alpha = (n-2)\cdot 180° - 2006°$
Wir berechnen aus dieser Formel die Werte von α für $n = 13, 14, 15$ und 16:

n	13	14	15	16
α	–26°	154°	334°	514°

Wenn n größer wird, wird α auch größer, wenn n kleiner wird, wird α auch kleiner.
Da zusätzlich für α gelten muss
$0° < \alpha < 180°$ oder $180° < \alpha < 360°$,
sind 154° und 334° die einzigen möglichen Werte.
(Ein 15-Eck mit einem Innenwinkel 154° und ein 16-Eck mit dem überstumpfen Winkel 334° existieren wirklich, wie etwa aus einer Zeichnung eines solchen Vielecks hervorgeht, bei der man mit der Ecke mit dem gegebenen Winkel α beginnt.)

Aufgabe 3

Für welche natürlichen Zahlen n gibt es genau zwei verschiedene Primzahlen, die $n^3 - n$ teilen?

Antwort:
Nur für $n = 2$ und $n = 3$ gibt es genau zwei verschiedene Primzahlen, die $n^3 - n$ teilen.

Begründung:
Für alle Zahlen n ist

$n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) = (n-1)\cdot n \cdot (n+1)$

das Produkt von drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen.
Unter drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen, ist stets mindestens eine durch 2 und genau eine durch 3 teilbar, d.h. die beiden verschiedenen Primzahlen 2 und 3 sind stets Teiler von $n^3 - n$. Damit muss – wenn n die Bedingungen der Aufgabe erfüllen soll – die Primfaktorzerlegung von $n^3 - n$ stets die Faktoren 2 und 3 enthalten, aber keine weiteren.

1. Fall: $n = 0$ oder $n = 1$: Dann ist $n^3 - n = 0$ und alle Primzahlen (das sind mehr als zwei!) sind Teiler von $n^3 - n$; d.h. $n = 0$ und $n = 1$ sind nicht bei den gesuchten Zahlen.

2. Fall: $n = 2$: Dann ist $n^3 - n = 2^3 - 2 = 6 = 2 \cdot 3$; damit sind 2 und 3 die beiden einzigen Primzahlen, die Teiler von $n^3 - n$ sind. Also ist $n = 2$ eine der gesuchten Zahlen.

3. Fall: $n = 3$: Dann ist $n^3 - n = 3^3 - 3 = 24 = 2^3 \cdot 3$; damit sind 2 und 3 die beiden einzigen Primzahlen, die Teiler von $n^3 - n$ sind. Also ist $n = 3$ eine der gesuchten Zahlen.

4. Fall: $n > 3$ und n ist ungerade: Dann enthält die Primfaktorzerlegung von n nicht den Faktor 2, aber einen ungeraden. Wenn also n die Bedingungen der Aufgabe erfüllen soll, d.h. wenn die Primfaktorzerlegung von $(n-1)\cdot n \cdot (n+1)$ und damit auch die Primfaktorzerlegung von n keine anderen Faktoren als 2 und 3 enthalten darf, dann muss n eine Potenz von 3 sein.
Da n ungerade und durch 3 teilbar ist, sind die zu n benachbarten Zahlen $n - 1$ und $n + 1$ beide gerade und beide nicht durch 3 teilbar. Wenn die Primfaktorzerlegung von $(n-1)\cdot n \cdot (n+1)$ höchstens die Faktoren 2 und 3 enthalten sollen, dann dürfen die Primfaktorzerlegungen von $n - 1$ und $n + 1$ also nur den Faktor 2 enthalten; die beiden Zahlen müssen also zwei Zweierpotenzen sein, die sich um 2 unterscheiden. Die einzigen Zweierpotenzen, die diese Bedingung erfüllen, sind 2 und 4; hieraus folgt sofort $n = 3$; dies steht aber im Widerspruch zur Fallbeschreibung. Es gibt also keine Lösung für n, die zu dieser Fallbeschreibung passt.

5. Fall: $n > 3$ und n ist gerade: Dann sind $n - 1$ und $n + 1$ beide ungerade und beide größer als 2; die Primfaktorzerlegungen beider Zahlen enthalten also eine ungerade Primzahl und nicht die 2. Wenn n die Bedingungen der Aufgabe erfüllen soll, dann dürfen beide Zahlen nur den Faktor 3 enthalten. Beide Zahlen sollen aber auch eine Differenz von 2 haben, was einen Widerspruch darstellt.
Es gibt also keine Lösung für n, die zu dieser Fallbeschreibung passt.

Da mit den 5 Fällen alle möglichen Zahlen n untersucht sind, ist der Beweis abgeschlossen.